УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НАИЛУЧШИЕ *n*-ЧЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

We find exact values of the best n-term approximations with restrictions on polynomials that are used as an instrument of approximation of λ, q-ellipsoids in the spaces $S_{\varphi}^{p,\mu}$.

Знайдено точні значення найкращих n-членних наближень з обмеженнями на поліноми, що використовуються як апарат наближення λ, q-еліпсоїдів у просторах $S_{\varphi}^{p,\mu}$.

В настоящей работе продолжаются исследования аппроксимационных характеристик пространств S_{φ}^{p}, начатые в [1 – 10].

Приведем необходимые определения.

1. Пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что любой паре элементов $x, y \in \mathfrak{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит φ, сопоставлено число (x, y) — „скалярное произведение” — так, что выполняются условия:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\bar{z}$ — число, комплексно-сопряженное с z;

2) $\left(\lambda x_1 + \nu x_2, y\right) = \lambda(x_1, y) + \nu\left(x_2, y\right)$, λ, ν — произвольные числа;

3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Пусть, далее, $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая система неотрицательных чисел, $\mu_k \geq 0$, $k \in N = \{1, 2, \ldots\}$.

Каждому элементу $x \in \mathfrak{X}$ сопоставим систему чисел $\hat{x}(k) = \hat{x}_{\varphi}(k)$ посредством равенств $\hat{x}(k) = (x, \varphi_k)$, $k \in N$, и при данном фиксированном $p \in (0, \infty)$ положим

$$S_{\varphi}^{p,\mu} = S_{\varphi}^{p,\mu}(\mathfrak{X}) = \left\{ x \in \mathfrak{X} \colon \sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{x}_{\varphi}(k) \mu_k \right|^p < \infty \right\}. \qquad (1)$$

Элементы $x, y \in S_{\varphi}^{p,\mu}$ считаются тождественными, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_{\varphi}(k) = \hat{y}_{\varphi}(k)$.

В случае, когда $\mu_k \equiv 1$, $k \in N$, множества $S_{\varphi}^{p,\mu}$ совпадают с множествами S_{φ}^{p}, которые введены и изучались в [1 – 6]; в общем случае они впервые рассматривались в [7].

Для произвольных векторов $x, y \in \mathfrak{X}$ определим φ, μ-расстояние между ними с помощью равенства

$$\rho(x, y)_{p,\mu} \overset{\mathrm{df}}{=} \|x - y\|_{p,\mu} = \|x - y\|_{p,\mu,\varphi} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \hat{x}_{\varphi}(k) - \hat{y}_{\varphi}(k) \right|^p \mu_k^p \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2)$$

Нулевым элементом пространства $S_{\varphi}^{p,\mu}$ называется вектор θ, для которого $\hat{\theta}_{\varphi}(k) = 0$ при всех $k \in N$. Расстояние $\rho(\theta, x)_{p,\mu}$, $x \in S_{\varphi}^{p,\mu}$, называется φ, μ-

© А. И. СТЕПАНЕЦ, 2005

нормой элемента x и обозначается $\|x\|_{p,\mu}$. Таким образом, по определению

$$\|x\|_{p,\mu} = \|x\|_{p,\mu,\varphi} = \rho(\theta, x)_{p,\mu} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|x_\varphi(k)\mu_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3}$$

В [7] показано, что множество $S_\varphi^{p,\mu}$ — линейное пространство с теми же операциями сложения и умножения на числа векторов, которые определены во всем $\mathfrak{X}$.

Если в системе μ все числа μ_k отличны от нуля, то равенство $\|x\|_{p,\mu} = 0$ возможно только при $x = \theta$. Отсюда следует, что при $p \geq 1$ и $\mu_k > 0$, $k \in N$, функционал $\|\cdot\|_{p,\mu}$, определяемый равенством (3), удовлетворяет всем аксиомам нормы, а при $p \in (0, 1)$ — квазинормы.

Поэтому если $\mu_k > 1$, $k \in N$, то при $p \geq 1$ $S_\varphi^{p,\mu}$ — линейное нормированное пространство, а при $p \in (0, 1)$ — пространство с квазинормой, содержащее ортогональную систему $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$, причем $\|\varphi_k\| = \mu_k$, $k \in N$.

Пусть теперь f — произвольный элемент пространства $S_\varphi^{p,\mu}$ и

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \tag{4}$$

— его формальный ряд по системе φ.

Пространства $S_\varphi^{p,\mu}$ наследуют важнейшие свойства сепарабельных гильбертовых пространств: равенство Парсеваля в виде соотношения (3) и минимальное свойство частных сумм Фурье, которое формулируется следующим образом.

Предложение 1. *Пусть* $\{g_\alpha\}$ *— семейство ограниченных подмножеств множества* N*, зависящих от параметра* α *и таких, что любое число* $n \in N$ *принадлежит всем множествам* $\{g_\alpha\}$ *с достаточно большими индексами* α.

Пусть, далее, $f \in S_\varphi^{p,\mu}$, $p \in (0, \infty)$, *и*

$$S_\alpha(f) = S_{g_\alpha}(f) = \sum_{k \in g_\alpha}\hat{f}(k)\varphi_k$$

— частная сумма ряда Фурье $S[f]_\varphi$ *элемента* f*, соответствующая множеству* $\{g_\alpha\}$*. Тогда среди всех сумм вида*

$$\Phi_\alpha = \sum_{k \in g_\alpha} c_k\varphi_k$$

наименее уклоняется от f *в пространстве* $S_\varphi^{p,\mu}$ *частная сумма* $S_\alpha(f)$*, т. е.*

$$\inf_{c_k}\|f - \Phi_\alpha\|_{p,\mu} = \|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu}.$$

При этом

$$\|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu}^p = \|f\|_{p,\mu}^p - \sum_{k \in g_\alpha}\left|\mu_k\hat{f}(k)\right|^p$$

и

$$\lim_{\alpha\to\infty}\|f - S_\alpha(f)\|_{p,\mu} = 0. \tag{5}$$

Из (5) следует, что для любого элемента $f \in S_\varphi^{p,\mu}$ его ряд Фурье (4) по системе φ сходится к f по норме пространства $S_\varphi^{p,\mu}$, т. е. система φ полна в $S_\varphi^{p,\mu}$ и $S_\varphi^{p,\mu}$ сепарабельно.

2. ψ-Интегралы. Выделим в пространствах $S_\varphi^{p,\mu}$ объекты приближения — объединения элементов $f \in \mathfrak{X}$, соответствующих в теории аппроксимации понятию класса функций.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathfrak{X}$, ряд Фурье которого имеет вид (4), существует элемент $F \in \mathfrak{X}$, для которого

$$S[f]_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \hat{f}(k) \varphi_k, \tag{6}$$

т. е. когда

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}(k), \quad k \in N, \tag{7}$$

то вектор F называется ψ-интегралом вектора f. В таком случае записываем $F = \mathcal{J}^\psi f$. Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ обозначается множество ψ-интегралов всех элементов из $\mathfrak{N}$. В частности, $\psi S_\varphi^{p,\mu}$ — множество ψ-интегралов всех векторов, принадлежащих данному пространству $S_\varphi^{p,\mu}$.

Если f и F связаны соотношением (6) или (7), то иногда удобно f называть ψ-производной элемента F и писать $f = D^\psi F = F^\psi$.

В дальнейшем предполагается, что система φ подчинена условию

$$\lim_{k\to\infty} |\psi_k| = 0. \tag{8}$$

Ясно, что это условие обеспечивает включение $\psi S_\varphi^{p,\mu} \subset S_\varphi^{p,\mu}$ и для такого включения необходимым и достаточным является условие ограниченности множества чисел $|\psi_k|$, $k \in N$.

Пусть

$$U_\varphi^{p,\mu} = \left\{ f \in S_\varphi^{p,\mu} : \|f\|_{p,\mu} \le 1 \right\} \tag{9}$$

— единичный шар в данном пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ и $\psi U_\varphi^{p,\mu}$ — множество ψ-интегралов всех элементов из $U_\varphi^{p,\mu}$. Множества $\psi U_\varphi^{p,\mu}$ и являются основными объектами, чьи аппроксимационные характеристики здесь изучаются. Заметим, что если $\psi_k \ne 0 \;\; \forall\, k \in N$, то в силу (7) и (9)

$$\psi U_\varphi^{p,\mu} = \left\{ f \in S_\varphi^{p,\mu} : \sum_{k=1}^{\infty} \left| \mu_k \frac{\hat{f}(k)}{\psi_k} \right|^p \le 1 \right\}, \tag{10}$$

т. е. множество $\psi U_\varphi^{p,\mu}$ является p-эллипсоидом в пространстве $S_\varphi^{p,\mu}$ с полуосями, равными $|\psi_k|$.

3. Аппроксимационные характеристики. Пусть Γ_n — множество всех наборов γ_n из n различных натуральных чисел, $n \ge 1$, и $\mathcal{P}_n$ — множество всех полиномов вида

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} c_k \varphi_k, \tag{11}$$

где c_k — некоторые комплексные числа. Тогда величина

$$E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \inf_{P_{\gamma_n} \in \mathcal{P}_n} \left\| f - P_{\gamma_n} \right\|_{p,\mu}, \quad f \in S_\varphi^{p,\mu}, \tag{12}$$

называется наилучшим приближением элемента f посредством полиномов, построенных по заданному набору γ_n из n базисных векторов, а величина

$$e_n(f)_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n} E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} \tag{13}$$

— наилучшим n-членным приближением элемента $f \in S_\varphi^{p,\mu}$.

Наряду с $e_n(f)_{p,\mu}$ будем рассматривать величины

$$e_n(f; \Gamma_n')_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n \in \Gamma_n'} E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu}, \tag{14}$$

в которых Γ_n' — некоторое собственное подмножество из Γ_n.

В связи с этим величину $e_n(f)_{p,\mu}$ можно назвать абсолютным наилучшим приближением, а величину $e_n(f; \Gamma')_{p,\mu}$ — наилучшим n-членным приближением с ограничениями, имея в виду, что термин „ограничение" здесь относится к выбору подмножества Γ_n'.

В работе в качестве Γ_n' рассматриваются два подмножества $\Gamma_n^{(1)}$ и $\Gamma_n^{(2)}$. Через $\Gamma_n^{(1)}$ обозначается множество наборов

$$\gamma_n^{(1)} = \{in+1,\ in+2, \ldots, (i+1)n\}, \quad i = 0, 1, \ldots,$$

а через $\Gamma_n^{(2)}$ — множество наборов

$$\gamma_n^{(2)} = \{i+1,\ i+2, \ldots, i+n\}, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Ясно, что всегда $\Gamma_n^{(1)} \subset \Gamma_n^{(2)} \subset \Gamma_n$, и поэтому выполняются неравенства

$$e_n(f)_{p,\mu} \leq e_n\left(f; \Gamma_n^{(2)}\right)_{p,\mu} \leq e_n\left(f; \Gamma_n^{(1)}\right)_{p,\mu}. \tag{15}$$

Поэтому если положить

$$e_n(\mathfrak{N}; \Gamma_n')_{p,\mu} = \sup_{f \in \mathfrak{N}} e_n(f; \Gamma_n')_{p,\mu},$$

где $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $S_\varphi^{p,\mu}$, то будут выполняться оценки

$$e_n(\mathfrak{N})_{p,\mu} \leq e_n\left(\mathfrak{N}; \Gamma_n^{(2)}\right)_{p,\mu} \leq e_n\left(\mathfrak{N}; \Gamma_n^{(1)}\right)_{p,\mu}. \tag{16}$$

В качестве множеств $\mathfrak{N}$ будут использоваться множества $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$ ψ-интегралов всех элементов единичного шара $U_\varphi^{q,\lambda}$ в пространстве $S_\varphi^{q,\lambda}$.

Таким образом, в работе исследуются величины

$$e_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(i)}\right)_{p,\mu} = \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}} e_n\left(f; \Gamma_n^{(i)}\right)_{p,\mu}, \quad i = 1, 2.$$

4. Основные результаты. Сразу отметим, что случаи, когда $p \geq q > 0$ и $q > p > 0$, требуют отдельных рассмотрений. Поэтому сначала рассмотрим первую ситуацию. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть p и q — действительные числа такие, что $p \geq q > 0$; ψ, μ и λ — последовательности, для которых величины*

$$\left|\psi'_k\right| = \left|\frac{\psi_k \mu_k}{\lambda_k}\right|, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

не возрастая, стремятся к нулю. Тогда при любом $n \in N$ *выполняются равенства*

$$e_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma^{(1)}\right)_{p,\mu} = e_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma^{(2)}\right)_{p,\mu} = (l^* - 1)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{l^*} \left|\psi'_{(k-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-1/q}, \tag{18}$$

где l^* *— натуральное число, для которого*

$$\sup_{l>1} (l-1)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{l} \left|\psi'_{(k-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-1/q} = (l^* - 1)\left(\sum_{k=1}^{l^*} \left|\psi'_{(k-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-1/q}.$$

Такое число l^* *всегда существует.*

Доказательство. Эта теорема в случае, когда $\mu_k \equiv \lambda_k \equiv 1$, $k \in N$, по существу доказана в [7]. И в общем случае ее доказательство получается фактически с помощью рассуждений из [7].

Прежде всего убедимся, что в рассматриваемом случае

$$\psi U_\varphi^{q,\lambda} \subset S_\varphi^{p,\mu}. \tag{19}$$

Действительно, если $f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}$, то в силу (7) $\hat{f}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}_\varphi^\psi(k)$ и

$$\left\|\hat{f}^\psi\right\|_{q,\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \left|f_\varphi^\psi(k)\right|^q \lambda_k^q \le 1. \tag{20}$$

Поэтому с учетом неравенства Иенсена

$$\|f\|_{p,\mu} = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p \mu_k^p = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\psi'_k\right|^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\right|^p \lambda_k^p \le \left|\psi'_1\right|^p,$$

откуда и следует включение (19).

Вследствие соотношения (16) для доказательства теоремы достаточно убедиться, что величина $e_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma^{(1)}\right)_{p,q}$ не больше, а величина $e_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma^{(2)}\right)_{p,\mu}$ не меньше правой части (18).

В силу предложения 1 для любого набора $\gamma_n \in \Gamma_n$ и любого элемента $f \in S_\varphi^{p,\mu}$

$$E_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \mathscr{E}_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \left\| f - \sum_{k \in \gamma_n} \hat{f}_\varphi(k)\varphi_k \right\|_{p,\mu},$$

поэтому для любого подмножества $\Gamma'_n \subset \Gamma_n$ имеем

$$e_n^p\left(f; \Gamma'_n\right)_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n \in \Gamma'_n} \mathscr{E}^p_{\gamma_n}(f)_{p,\mu} = \inf_{\gamma_n \in \Gamma'_n} \left\| f - S_{\gamma_n}(f) \right\|^p_{p,\mu} =$$

$$= \inf_{\gamma_n \in \Gamma'_n} \sum_{k \,\bar{\in}\, \gamma_n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p \mu_k^p = \inf_{\gamma_n \in \Gamma'_n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p \mu_k^p - \sum_{k \in \gamma_n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p \mu_k^p \right) =$$

$$= \|f\|^p_{p,\mu} - \sup_{\gamma_n \in \Gamma'_n} \sum_{k \in \gamma_n} \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p \mu_k^p. \tag{21}$$

Следовательно, с учетом (7) при $i = 1, 2$ имеем

$$e_n^p\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(i)}\right)_{p,\mu} =$$

$$= \sup_{f \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\right|^p \mu_k^p - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(i)}} \sum_{k \in \gamma_n} |\psi_k|^p \left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\right|^p \mu_k^p \right).$$

Отсюда, принимая во внимание (20) и полагая $m_k = \left|\hat{f}_\varphi^\psi(k)\lambda_k\right|^q$, получаем

$$e_n^p\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(i)}\right)_{p,\mu} \le \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left|\psi_k'\right|^p m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(i)}} \sum_{k \in \gamma_n} \left|\psi_k'\right|^p m_k^r, \quad i = 1, 2, \right.$$

$$\left. r = \frac{p}{q}: \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1,\ m_k \ge 0 \right\}. \tag{22}$$

Для нахождения точного значения правой части (22) при $i = 1$ воспользуемся следующей леммой, доказанной в [7].

Лемма 1. *Пусть* $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел, для которой*

$$\lim_{k \to \infty} \alpha_k = 0, \tag{23}$$

и $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность неотрицательных чисел такая, что*

$$|m| = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \le 1. \tag{24}$$

(*В таком случае записываем* $\alpha \in A$ *и, соответственно,* $m \in \mathcal{M}$.)

Пусть, далее, при каждом $n \in N$

$$F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(i)}} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r, \quad \alpha \in A, \quad m \in \mathcal{M}, \quad r > 0,$$

и

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{m \in \mathcal{M}} F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m).$$

Тогда при любом $r \ge 1$ *и* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{q > 1} (q-1) \left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \right)^{-r}. \tag{25}$$

Верхняя грань в правой части (25) *всегда достигается при некотором значении* q^*. *При этом для последовательности* $m' = \{m_k'\}_{k=1}^{\infty}$ *из* $\mathcal{M}$,

$$m_k' = \begin{cases} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \left(\sum_{j=1}^{q^*} \alpha_{(j-1)n+1}^{-1/r} \right)^{-1}, & k = (i-1)n+1, \quad i = 1, 2, \ldots, q^*, \\ 0 & \text{— при остальных значениях } k, \end{cases} \tag{26}$$

выполняется равенство

$$F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m') = (q^* - 1) \left(\sum_{i=1}^{q^*} \alpha_{(i-1)n+1}^{-1/r} \right)^{-r}.$$

Полагая $\alpha_k = \left|\psi'_k\right|^p$, $k \in N$, видим, что для нахождения значений правой части (22) применима лемма 1, согласно которой находим

$$e_n^p\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda};\Gamma_n^{(1)}\right)_{p,\mu} \le \sup_{l>1}(l-1)\left(\sum_{i=1}^{l}\left|\psi'_{(i-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}}, \tag{27}$$

при этом существует значение l^*, реализующее верхнюю грань правой части этого соотношения. Для завершения доказательства теоремы остается показать, что величина $e_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda};\Gamma^{(2)}\right)_{p,\mu}$ не меньше правой части (27). Для этого покажем, что во множестве $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$ имеется элемент f_*, для которого

$$e_n^p\left(f_*;\Gamma_n^{(2)}\right)_{p,\mu} = (l^*-1)\left(\sum_{i=1}^{l^*}\left|\psi'_{(i-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}}. \tag{28}$$

С этой целью, исходя из соотношения (26), полагаем

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k,$$

где числа c_k подобраны так, что

$$c_k^q = \begin{cases} \dfrac{\left|\psi'_{(i-1)n+1}\right|^{-q}}{\lambda_{(i-1)n+1}^q}\left(\sum_{j=1}^{l^*}\left|\psi'_{(j-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-1}, & k=(i-1)n+1, \quad i=1,2,\ldots,l^*, \\ 0 & \text{— при остальных значениях } k. \end{cases} \tag{29}$$

Элемент h является линейной комбинацией конечного числа элементов системы φ, поэтому он принадлежит всем пространствам S_φ^p при любом $p > 0$, и так как

$$\|h\|_{q,\lambda}^q = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^q \lambda_k^q = 1,$$

то $h \in U_\varphi^{q,\lambda}$. Поэтому, полагая $f_* = \mathcal{I}^\psi h$, видим, что $f_* \in U_\varphi^{q,\lambda}$ и $f_*^\psi = h$. В то же время (см. (21))

$$e_n^p\left(f_*;\Gamma_n^{(2)}\right)_{p,\mu} = \sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k|^p\left|\hat{f}_*^\psi(k)\right|^p\mu_k^p - \sup_{\gamma_n\in\Gamma_n^{(2)}}\sum_{k\in\gamma_n}|\psi_k|^p\left|\hat{f}_*^\psi(k)\right|^p\mu_k^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k|^p c_k^p\mu_k^p - \sup_{\gamma_n\in\Gamma_n^{(2)}}\sum_{k\in\gamma_n}|\psi_k|^p c_k^p\mu_k^p.$$

Согласно (29)

$$c_k^p = \begin{cases} \dfrac{\left|\psi'_{(i-1)n+1}\right|^{-p}}{\lambda_{(i-1)n+1}^p}\left(\sum_{j=1}^{l^*}\left|\psi'_{(j-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}}, & k=(i-1)n+1, \quad i=1,2,\ldots,l^*, \\ 0 & \text{— при остальных значениях } k. \end{cases} \tag{30}$$

Следовательно, учитывая, что множество $\gamma_n \subset \Gamma_n^{(2)}$ может содержать только одно число вида $(i-1)n+1$, $i=\overline{1,\,l^*}$, получаем равенство (28):

$$e_n^p\Big(f_*;\Gamma_n^{(2)}\Big)_{p,\mu} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l^*}\left|\psi_{(i-1)n+1}\right|^p c_{(i-1)n+1}^p \mu_{(i-1)n+1}^p - \max_{1\le i\le l^*}\left|\psi_{(i-1)n+1}\right|^p c_{(i-1)n+1}^p \mu_{(i-1)n+1}^p =$$

$$= (l^*-1)\left(\sum_{i=1}^{l^*}\left|\psi'_{(i-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}},$$

поскольку при любом i, $i=\overline{1,\,l^*}$, согласно (30)

$$\left|\psi_{(i-1)n+1}\right|^p c_{(i-1)n+1}^p \mu_{(i-1)n+1}^p = \left(\sum_{i=1}^{l^*}\left|\psi'_{(i-1)n+1}\right|^{-q}\right)^{-\frac{p}{q}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $q > p > 0$. В этом случае условия (17) уже не обеспечивают включение (19). Такое включение на этот раз будут гарантировать условия

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\psi'_k\right|^{\frac{pq}{q-p}} < \infty, \qquad \psi'_k = \psi_k\frac{\mu_k}{\lambda_k}, \quad k\in N, \tag{31}$$

в чем нетрудно убедиться, например, с помощью неравенства Гельдера. Заметим, что условия (31) будут также и необходимыми для сходимости рассматриваемых здесь рядов.

Докажем следующее утверждение, позволяющее находить величины $e_n\Big(\psi U_\varphi^{q,\lambda};\Gamma_n^{(i)}\Big)_{p,\mu}$ при $q > p > 0$.

Теорема 2. *Пусть p и q — действительные числа такие, что $q > p > 0$; ψ, μ и λ — последовательности, для которых величины* (17), *не возрастая, стремятся к нулю и, кроме того, удовлетворяют условию* (31). *Тогда при любом $n\in N$ выполняется равенство*

$$e_n^p\Big(\psi U_\varphi^{q,\lambda};\Gamma_n^{(1)}\Big)_{p,\mu} = \tilde\sigma_1^{-\frac{p}{q}}(s)\left[(s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \tilde\sigma_1^{\frac{p}{q-p}}(s)\tilde\sigma_2(s)\right]^{\frac{q-p}{q}}, \tag{32}$$

в котором

$$\tilde\sigma_1(s) = \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=(k-1)n+1}^{\infty}\left|\psi'_i\right|^{\frac{pq}{q}}\right)^{-\frac{q-p}{q}}, \tag{33}$$

$$\tilde\sigma_2(s) = \sum_{k=sn+1}^{\infty}\left|\psi'_k\right|^{\frac{pq}{q-p}}. \tag{34}$$

Число s выбрано из условия

$$\left(\sum_{k=(s-1)n+1}^{sn}\left|\psi'_k\right|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{-\frac{q-p}{p}} \le \frac{\tilde\sigma_1(s)}{s-1} < \left(\sum_{k=sn+1}^{(s+1)n}\left|\psi'_k\right|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{-\frac{q-p}{p}}. \tag{35}$$

Такое число s всегда существует и единственно.

Доказательство. Установим необходимую оценку сверху величины $e_n\Big(\psi U_\varphi^{q,\lambda};\Gamma_n^{(1)}\Big)_{p,\mu}$. Для этого будем пользоваться неравенством (22), а также следующим аналогом леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющих условию* (23), *и, кроме того, при данном* $r \in (0,1)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} < \infty,$$

а $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность неотрицательных чисел, для которой выполняется условие* (24). (*В таком случае записываем* $\alpha \in A_r$ *и, как и раньше,* $m \in \mathcal{M}$.)

Пусть, далее, при каждом $n \in N$

$$F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(1)}} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r, \qquad \alpha \in A_r, \quad m \in \mathcal{M}, \quad r \in (0,1), \tag{36}$$

и

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{m \in \mathcal{M}} F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m). \tag{37}$$

Тогда при любых $r \in (0,1)$ *и* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \bar{\sigma}_1^{-r}(s)\left[(s-1)^{\frac{1}{1-r}} + \bar{\sigma}_1^{\frac{r}{1-r}}(s)\bar{\sigma}_2(s)\right]^{1-r}, \tag{38}$$

где

$$\bar{\sigma}_1(s) = \bar{\sigma}_1(\alpha; s) = \sum_{k=1}^{s}\left(\sum_{i=(k-1)n+1}^{kn} \alpha_1^{\frac{1}{1-r}}\right)^{-\frac{1-r}{r}}, \tag{39}$$

$$\bar{\sigma}_2(s) = \bar{\sigma}_2(\alpha; s) = \sum_{k=sn+1}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}}; \tag{39'}$$

число s *выбрано из условия*

$$a_i^{-\frac{1}{r}} \le \frac{\bar{\sigma}_1(s)}{s-1} < a_{s+1}^{-\frac{1}{r}}, \qquad a_j = \left(\sum_{i=(j-1)n+1}^{jn} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}}\right)^{1-r}, \quad j = 1, 2, \ldots; \tag{40}$$

такое число s *всегда существует и единственно.*

Верхняя грань в (37) *реализуется последовательностью* m^*, *для которой*

$$m_k^* = \mu_i^* \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} a_i^{-\frac{1}{1-r}}, \qquad (i-1)n+1 \le k \le in, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{41}$$

где

$$\mu_i^* = \begin{cases} \left(\dfrac{t_s}{a_i}\right)^{1/r}, & i = 1, 2, \ldots, s, \\[2ex] \dfrac{1 - t_s^{1/r}\bar{\sigma}_1(s)}{\bar{\sigma}_2(s)} a_i^{\frac{1}{1-r}}, & i > s, \\[2ex] t_s = \left(\bar{\sigma}_1(s) + \left(\dfrac{\bar{\sigma}_1(s)}{s-1}\right)^{\frac{1}{1-r}} \bar{\sigma}_2(s)\right)^{-r}. \end{cases} \tag{42}$$

***Доказательство леммы* 2.** Ясно, что при сделанных предположениях точная верхняя грань в (36) всегда достигается для некоторого (возможно, не единственного) набора $\gamma'_n \in \Gamma_n^{(1)}$ и равна некоторому числу S:

$$\sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(1)}} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r = \sum_{k \in \gamma'_n} \alpha_k m_k^r = S.$$

Отметив это, ряд в (36) при данном $m \in \mathcal{M}$ представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(\alpha, m), \qquad A_i(\alpha, m) = \sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \alpha_k m_k^r. \tag{43}$$

Для оценки сверху величины $A_i(\alpha, m)$ воспользуемся следующим утверждением, которое легко следует из неравенства Гельдера (его доказательство приведено в [5], § 11.7).

Утверждение 1. *Если*

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n x_k^r, \quad \alpha \in A_r, \quad 0 < r < 1, \quad n \in N,$$

то

$$\sup\left\{ f_n(x) \colon x_k \ge 0, \quad \sum_{k=1}^{n} x_k \le c, \ c > 0 \right\} = f_n(x^*),$$

где

$$x_k^* = \frac{c\alpha_k^{\frac{1}{1-r}}}{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}}.$$

Отсюда получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mu_k \ge 0$, *и*

$$M_i = \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} \mu_j, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$A_i(\alpha, \mu) \le A_i(\alpha, \bar{\mu}) = \sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \alpha_k \bar{\mu}_k^r,$$

где

$$\bar{\mu}_k = M_i \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \left(\sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right)^{-1},$$

так что

$$A_i(\alpha, \bar{\mu}) = a_i M_i^r, \qquad a_i = \left(\sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right)^{1-r}, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{44}$$

Руководствуясь этим фактом, для данного $m \in \mathcal{M}$ получим оценки величин $A_i(\alpha, m)$. Пусть

$$M_i = \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} m_j, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Если для данного i $a_i M_i^r \le S$, то положим $\overline{M}_i = M_i$; если же $a_i M_i^r > S$, то через $\overline{M}_i$ обозначим число, для которого $a_i \overline{M}_i^r = S$. В таком случае всегда $\overline{M}_i \le M_i$ и, следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \overline{M}_i \le \sum_{i=1}^{\infty} M_i = \sum_{k=1}^{\infty} m_k = |m| \le 1.$$

В то же время

$$A_i(\alpha, m) \le a_i \overline{M}_i^r,$$

поэтому и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r \le \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{M}_i^r. \tag{45}$$

Рассмотрим выражение

$$\sum\left(a, \overline{M}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \overline{M}_i^r - \sup_{i \ge 1} a_i \overline{M}_i^r. \tag{46}$$

По построению $\sup\limits_i a_i M_i^r \le S$, следовательно, согласно (36) и (45) имеем

$$F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m) \le \sum\left(a, \overline{M}\right)$$

и, значит,

$$\sup_{|m| \le 1} F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m) \le \sup_{|\overline{M}| \le 1} \sum\left(a, \overline{M}\right), \qquad \left|\overline{M}\right| = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{M}_i. \tag{47}$$

В силу (46)

$$\sup_{|\overline{M}| \le 1} \sum\left(a, \overline{M}\right) = \sup_{|\mu| \le 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \mu_k^r - \sup_{k \ge 1} a_k \mu_k^r \right) \stackrel{\text{df}}{=} \mathscr{E}_1(a, r). \tag{48}$$

Для нахождения значения $\mathscr{E}_1(a, r)$ воспользуемся следующим утверждением, полученным в [5] (§ 11.7).

Лемма 3. *Пусть при данном* $r \in (0, 1)$ $\alpha \in A_r$ *и* $m \in \mathcal{M}$. *Пусть, далее,*

$$F_{n,r}(\alpha, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r,$$

где γ_n *— произвольный набор из* n *натуральных чисел. Тогда*

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_n(\alpha, r) = \sup_{m \in \mathcal{M}} F_{n,r}(\alpha) = \sigma_1^{-r}(s) \left[(s-n)^{\frac{1}{1-r}} + \sigma_1^{\frac{1}{1-r}}(s) \sigma_2(s) \right]^{1-r}, \tag{49}$$

где

$$\sigma_1(s) = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k^{-\frac{1}{r}}, \qquad \sigma_2(s) = \sum_{k=s+1}^{\infty} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}},$$

число s *выбрано из условия*

$$\alpha_s^{-\frac{1}{r}} \le \frac{\sigma_1(s)}{s-n} < \alpha_{s+1}^{-\frac{1}{r}}, \quad s > n. \tag{50}$$

Такое число s *всегда существует и единственно. Верхняя грань в соотношении* (49) *реализуется последовательностью* $m = \{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *из* $\mathcal{M}$, *у которой*

$$\mu_k = \begin{cases} \left(\dfrac{t_s}{a_k}\right)^{1/r}, & i = 1, 2, \ldots, s, \\ \dfrac{1 - t_s^{1/r}\sigma_1(s)}{\sigma_2(s)}\, a_k^{\frac{1}{1-r}}, & k > s, \end{cases} \tag{51}$$

$$t_s = \left(\sigma_1(s) + \left(\frac{\sigma_1(s)}{s-n}\right)^{\frac{1}{1-r}} \sigma_2(s)\right)^{-r}.$$

Сопоставляя (48) и (49), видим, что величина $\mathcal{E}_1(a, r)$ совпадает с $\mathcal{E}_1(\alpha, r)$ при $\alpha = a$. Последовательность a удовлетворяет всем требованиям леммы 3: числа a_i не возрастают и $a_i > 0$ при всех $i \in N$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\frac{1}{1-r}} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=(i-1)n+1}^{\infty} \alpha_j^{\frac{1}{1-r}} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^{\frac{1}{1-r}} < \infty.$$

Применяя лемму 3, находим

$$\mathcal{E}_1(a; r) = \bar{\sigma}_1^{-r}(s)\left[(s-1)^{\frac{1}{1-r}} + \bar{\sigma}_1^{\frac{r}{1-r}}(s)\bar{\sigma}_2(s)\right]^{1-r}, \tag{52}$$

где число s выбрано из условия (40), а величины $\bar{\sigma}_1(s)$ и $\bar{\sigma}_2(s)$ определены соотношениями (39) и (39′). При этом точная верхняя грань в (48) реализуется последовательностью μ^*, для которой

$$\mu_k^* = \begin{cases} \left(\dfrac{t_s}{a_k}\right)^{1/r}, & k = 1, 2, \ldots, s, \\ \dfrac{1 - t_s^{1/r}\bar{\sigma}_1(s)}{\bar{\sigma}_2(s)}\, a_k^{\frac{1}{1-r}}, & k > s, \\ t_s = \left(\bar{\sigma}_1(s) + \left(\dfrac{\bar{\sigma}_1(s)}{s-1}\right)^{\frac{1}{1-r}} \bar{\sigma}_2(s)\right)^{-r}. \end{cases} \tag{53}$$

Объединяя соотношения (38) и (48) – (52), получаем

$$\sigma_{n,r}(\alpha) \le \bar{\sigma}_1^{-r}(s)\left[(s-1)^{\frac{1}{1-r}} + \bar{\sigma}_1^{-\frac{r}{1-r}}(s)\bar{\sigma}_2(s)\right]^{1-r}, \tag{54}$$

и для завершения доказательства леммы остается показать, что величина $F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m^*)$ равна правой части (54) и $m^* \in \mathcal{M}$.

Согласно (36) и (43)

$$F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m^*) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(\alpha, m^*) - \sup_i A_i(\alpha, m^*)$$

и в силу (41)

$$A_i(\alpha, m^*) = a_i \mu_i^{*r} = \begin{cases} t_s, & i = 1, 2, \ldots, s, \\ \left(\dfrac{1 - t_s^{1/r}\,\overline{\sigma}_1(s)}{\overline{\sigma}_2(s)}\right)^r a_i^{\frac{1}{1-r}}, & i > s. \end{cases} \tag{55}$$

Последовательность μ^* является экстремальной в лемме 3 (при $n = 1$ и $\alpha = a$) и, как показано при доказательстве этой леммы в [5] (§ 11.7), имеет то свойство, что числа $a_i \mu_i^{*r}$ не возрастают. Поэтому из (54) и (55) заключаем, что

$$F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m^*) = \sum_{i=2}^{\infty} A_i(\alpha, m^*) = \sum_{i=2}^{s} A_i(\alpha, m^*) + \sum_{i=s+1}^{\infty} A_i(\alpha, m^*) =$$

$$= (s-1)t_s + \left(1 - t_s^{1/r}\,\overline{\sigma}_1(s)\right)^r \left(\overline{\sigma}_2(s)\right)^{1-r}.$$

Подставляя сюда значение t_s, убеждаемся в справедливости требуемого равенства. Тот факт, что $m^* \in \mathcal{M}$, проверяется непосредственно: $m^* \geq 0$ и согласно (41)

$$\left| m^* \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=(i-1)n+1}^{in} m_k^* = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^* = 1.$$

Лемма 2 доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Полагая $\alpha_k = \left|\psi_k'\right|^p$, $k \in N$, замечаем, что для нахождения значений правой части (22) в рассматриваемом случае применима лемма 2, в силу которой

$$e_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(1)}\right)_{p,\mu} \leq \tilde{\sigma}_1^{-\frac{1}{q}}(s)\left[(s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \tilde{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}(s)\,\tilde{\sigma}_2(s)\right]^{\frac{q-p}{qp}}, \tag{56}$$

где величины $\tilde{\sigma}_1(\cdot)$, $\tilde{\sigma}_2(\cdot)$ и число s определяются соотношениями (32) – (35). Теперь для завершения доказательства теоремы следует показать, что в соотношении (56) строгого неравенства быть не может. Понятно, что для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ во множестве $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$ есть элемент f_ε, для которого значение $e_n\left(f_\varepsilon; \Gamma_n^{(1)}\right)_{p,\mu}$ отличается от правой части (56) не больше, чем на ε.

Выберем число s из условия (35). Поскольку $\tilde{\sigma}(s) = \overline{\sigma}_1\left(\left|\psi'\right|^p; s\right)$, где $\overline{\sigma}_1\left(\left|\psi'\right|^p; s\right)$ — величина из (39) при $\alpha_k = \left|\psi_k'\right|^p$, согласно лемме 2 такое число всегда существует и единственно.

При выбранном s найдем значение $\tilde{t}_s$ согласно формуле

$$\tilde{t}_s = \left(\tilde{\sigma}_1(s) + \left(\frac{\tilde{\sigma}_1(s)}{s-1}\right)^{\frac{q}{q-p}} \tilde{\sigma}_2(s)\right)^{-\frac{p}{q}}, \tag{57}$$

где $\tilde{\sigma}_2(s) = \overline{\sigma}_2\left(\left|\psi'\right|^p; s\right)$, и положим

$$\tilde{\mu}_i = \begin{cases} \left(\dfrac{\tilde{t}_s}{\tilde{a}_k}\right)^{q/p}, & i = 1, 2, \ldots, s, \\ \dfrac{1 - \tilde{t}_s^{q/p}\,\tilde{\sigma}_1(s)}{\tilde{\sigma}_2(s)}\,\tilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}}, & i > s, \end{cases} \tag{58}$$

где

$$\tilde{a}_i = \left(\sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \left|\psi'_k\right|^{\frac{pq}{q-p}}\right)^{\frac{q-p}{q}};$$

$$\tilde{m}_k = \tilde{\mu}_i \left|\psi'_k\right|^{\frac{qp}{q-p}} \tilde{a}_i^{-\frac{q}{q-p}}, \qquad (i-1)n+1 \le k \le in, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{59}$$

При каждых $k_0 \in N$ и $n \in N$ рассмотрим элемент

$$h_{k_0} = \sum_{k=1}^{k_0 n} c_k \varphi_k, \tag{60}$$

у которого

$$c_k = \frac{\tilde{m}_k^{\frac{1}{q}}}{\lambda}. \tag{61}$$

Элемент h_{k_0}, являясь линейной комбинацией конечного числа элементов φ_k, принадлежит всем пространствам $S_\varphi^{p,\mu}$ и $S_\varphi^{q,\lambda}$ при любых значениях $p > 0$ и $q > 0$, и так как

$$\left\| h_{k_0} \right\|_{q,\lambda}^q = \sum_{k=1}^{k_0} c_k^q \lambda_k^q = \sum_{k=1}^{k_0} \tilde{m}_k \le 1,$$

то $h_{k_0} \in U_\varphi^{q,\lambda}$. Следовательно, полагая $f_{k_0} = \mathcal{J}^\psi h_{k_0}$, видим, что $f_{k_0} \in \psi U_\varphi^{q,\lambda}$ и $\left\| f_{k_0}^\psi \right\| \le 1$.

Считая число k_0 достаточно большим и используя формулу (21), найдем значение $e_n^p\left(f_{k_0}; \Gamma_n^{(1)}\right)_{p,\mu}$. С учетом соотношений (57) – (61) имеем

$$e_n^p\left(f_{k_0}; \Gamma_n^{(1)}\right)_{p,\mu} = \left\| f_{k_0} \right\|_{p,\mu}^p - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(1)}} \sum_{k \in \gamma_n} \left|\hat{f}_{k_0}(k)\right|^p \mu_k^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |\psi_k|^p \left|\hat{f}_{k_0}^\psi(k)\right|^p |\mu_k|^p - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(1)}} \sum_{k \in \gamma_n} |\psi_k|^p \left|\hat{f}_{k_0}^\psi(k)\right|^p \mu_k^p =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0 n} \left|\psi'_k\right|^p \tilde{m}_k^{\frac{p}{q}} - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(1)}} \sum_{k \in \gamma_n} \left|\psi'_k\right|^p \tilde{m}_k^{\frac{p}{q}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{k_0} \sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \left|\psi'_k\right|^p \tilde{m}_k^{\frac{p}{q}} - \sup_{i \le k_0} \sum_{j=(i-1)n+1}^{in} \left|\psi'_k\right|^p \tilde{m}_k^{\frac{p}{q}}. \tag{62}$$

Полагая

$$\tilde{A}_i = \sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \left|\psi'_k\right|^p \tilde{m}_k^{\frac{p}{q}}, \tag{63}$$

с учетом формул (57) – (59) находим

$$\tilde{A}_i = \tilde{\mu}_i^{\frac{p}{q}} \tilde{a}_i^{-\frac{p}{q-p}} \sum_{k=(i-1)n+1}^{in} |\psi_k'|^{\frac{pq}{q-p}} = \tilde{\mu}_i^{\frac{p}{q}} \tilde{a}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k_0.$$

Поэтому

$$\tilde{A}_i = \begin{cases} \tilde{t}_s, & i = 1, 2, \ldots, s, \\ \left(\dfrac{1 - \tilde{t}_s^{q/p} \tilde{\sigma}_1(s)}{\tilde{\sigma}_2(s)}\right)^{\frac{p}{q}} \tilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}}, & i = s+1, \ldots, k_0. \end{cases} \tag{64}$$

Объединяя соотношения (61) – (64), имеем

$$e_n^p\left(f_{k_0}; \Gamma_n^{(1)}\right)_{p,\mu} = \sum_{i=1}^{k_0} \tilde{a}_i \tilde{\mu}_i^{\frac{p}{q}} - \sup_{i \le k_0} \tilde{a}_i \tilde{\mu}_i^{\frac{p}{q}}.$$

Если в формулах (57) – (59) положить $|\psi_k'|^p = \alpha_k$ и $\dfrac{p}{q} = r$, то получим $\tilde{a}_i = a_i$, $\tilde{t}_s = t_s$ и, следовательно, $\tilde{\mu} = \mu_i^*$, где величины a_i, t_s и μ_i^* определяются равенствами (40) и (53).

Числа $a_i \mu^{*r}$, как уже отмечалось, не возрастают. Следовательно,

$$e_n^p\left(f_{k_0}; \Gamma_n^{(1)}\right) = \sum_{i=2}^{k_0} \tilde{a}_i \tilde{\mu}_i^{\frac{p}{q}} = (s-1)\tilde{t}_s + \left(\frac{1 - \tilde{t}_s^{\frac{q}{p}} \tilde{\sigma}_1(s)}{\tilde{\sigma}_2(s)}\right)^{\frac{p}{q}} \sum_{i=s+1}^{\infty} \tilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}} - R_{k_0},$$

где

$$R_{k_0} = \left(\frac{1 - \tilde{t}_s^{\frac{q}{p}} \tilde{\sigma}_1(s)}{\tilde{\sigma}_2(s)}\right)^{\frac{p}{q}} \sum_{i=k_0+1}^{\infty} \tilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}}.$$

Но

$$\sum_{i=s+1}^{\infty} \tilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}} = \sum_{i=i+1}^{\infty} \sum_{k=(i-1)n+1}^{in} |\psi_k'|^{\frac{pq}{q-p}} = \sum_{k=sn}^{\infty} |\psi_k'|^{\frac{pq}{q-p}} = \tilde{\sigma}_2(s)$$

и, значит,

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \tilde{a}_i^{\frac{q}{q-p}} = \tilde{\sigma}_2(k_0).$$

Таким образом,

$$e_n^p\left(f_{k_0}; \Gamma_n^{(1)}\right)_{p,\mu} = (s-1)\tilde{t}_s + \left(1 - \tilde{t}_s^{\frac{q}{p}} \tilde{\sigma}_2(s)\right) \tilde{\sigma}_2^{\frac{p}{q}-1} - R_{k_0}, \tag{65}$$

при этом R_{k_0} имеет вид

$$R_{k_0} = \left(\frac{1 - \tilde{t}_s^{\frac{q}{p}} \tilde{\sigma}_1(s)}{\tilde{\sigma}_2(s)}\right)^{\frac{p}{q}} \tilde{\sigma}_2(k_0).$$

Подставляя в (65) значения $\tilde{t}_s$ из (57) и замечая, что в силу (31) и (34) величина $\tilde{\sigma}_2(k_0)$ является остатком сходящегося ряда, приходим к выводу, что для любого $\varepsilon > 0$ во множестве $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$ действительно имеется элемент f_ε, для которого выполняется равенство

$$e_n^p\Big(f_\varepsilon; \Gamma_n^{(1)}\Big)_{p,\mu} = \tilde{\sigma}_1^{-\frac{p}{q}}(s)\left[(s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \tilde{\sigma}_1^{\frac{p}{q-p}}(s)\tilde{\sigma}_2(s)\right]^{\frac{q-p}{q}} - \varepsilon.$$

Рассмотрим вопрос об аналоге теоремы 2 для величины $e_n\Big(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(2)}\Big)_{p,\mu}$. Прежде всего заметим, что в силу соотношений (16) и (32) при выполнении условий теоремы 2 имеет место неравенство

$$e_n\Big(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(2)}\Big)_{p,\mu} \le \tilde{\sigma}_1^{-\frac{1}{q}}(s)\left[(s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \tilde{\sigma}_1^{\frac{q}{q-p}}(s)\tilde{\sigma}_2(s)\right]^{\frac{q-p}{qp}}. \tag{66}$$

Если теперь показать, что для любого $\varepsilon > 0$ во множестве $\psi U_\varphi^{q,\lambda}$ найдется элемент f_ε, для которого значение $e_n\Big(f_\varepsilon; \Gamma_n^{(2)}\Big)_{p,\mu}$ отличается от правой части (66) не больше, чем на ε, то это будет означать, что соотношение (66) является равенством.

Ясно, что такой элемент f_ε удастся сконструировать подобно тому, как это делалось при завершении доказательства теоремы 2, по крайней мере всякий раз, когда экстремальная последовательность m^*, определяемая соотношением (41), будет реализовывать верхнюю грань не только в соотношении (37), но и в соотношении

$$\sigma_{n,r}(\alpha) = \sup_{m \in \mathcal{M}} F_{n,r}^{(2)}(\alpha, m),$$

где

$$F_{n,r}^{(2)}(\alpha, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k m_k^r - \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(2)}} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^r, \qquad \alpha \in A_r, \quad m \in \mathcal{M}, \quad r \in (0,1),$$

причем в том случае, когда

$$\sup_{m \in \mathcal{M}} F_{n,r}^{(2)}(\alpha, m) = F_{n,r}^{(2)}(\alpha, m^*) = F_{n,r}^{(1)}(\alpha, m^*).$$

Последнее же равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$e_n = \sup_{k' \ge 1} \sum_{k=k'}^{k'+n-1} \alpha_k m_k^{*r} = \sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(1)}} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^{*r} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k m_k^{*r}. \tag{67}$$

Для установления условий справедливости равенства (67) докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *При выполнении предположений теоремы* 2 *достаточным условием справедливости равенств* (67) *является выполнение неравенств*

$$\sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \alpha_k m_k^{*r} \ge \sum_{k=k_i}^{k_i+n-1} \alpha_k m_k^{*r}, \quad (i-1)n \le k_i \le in+1, \tag{68}$$

при всех натуральных значениях i.

Выполнение неравенств (68) *при всех* $i \le s$ *является также и необходимым условием для справедливости равенств* (67).

Доказательство. Ясно, что всегда

$$\sup_{\gamma_n \in \Gamma_n^{(2)}} \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k m_k^{*r} \ \geq \ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k m_k^{*r},$$

а из условий (68), если они выполняются при всех $i \in N$, следует, что в этом соотношении строгого неравенства быть не может. Этим достаточная часть утверждения установлена.

В то же время согласно (41)

$$\sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \alpha_k m_k^{*r} \ = \ \mu_i^{*r} a_i^{-\frac{r}{1-r}} \cdot a_i^{\frac{1}{1-r}} \ = \ a_i \mu_i^{*r} \ = \ t_s, \quad i = 1, 2, \ldots, s. \tag{69}$$

Поэтому если бы при некотором $i, i \leq s$, условие (68) не выполнялось, то имело бы место неравенство $e_n > t_s$, что вследствие (69) противоречило бы равенству (67).

Теперь найдем достаточные условия на последовательности $\alpha \in A_r$, при которых выполняется (68) для всех $i \in N$. Имеем

$$R_i(\alpha) \ = \ \sum_{k=(i-1)n+1}^{in} \alpha_k m_k^{*r} \ - \sum_{k=k_i}^{k_i+n-1} \alpha_k m_k^{*r} \ = \ \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} \alpha_k m_k^{*r} \ - \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} \alpha_k m_k^{*r}. \tag{70}$$

Пусть сначала $i < s$. В таком случае согласно (41)

$$\alpha_k m_k^{*r} \ = \ \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} t_s a_i^{-\frac{1}{1-r}}, \quad k \in [(i-1)n+1, k_i],$$

и

$$\alpha_k m_k^{*r} \ = \ \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} t_s a_{i+1}^{-\frac{1}{1-r}}, \quad k \in [in+1, k_i+n-1].$$

Следовательно, с учетом (40)

$$R_i(\alpha) \ = \ t_s \left(a_i^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} - a_{i+1}^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right) =$$

$$= \ t_s \, a_i^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \left(\left(\sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right)^{-1} \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} - \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} \right)^{\frac{1}{1-r}} \right).$$

Для сокращения записи положим $\alpha_k^{\frac{1}{1-r}} = x_k$ и

$$\left(\sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} x_k \right)^{-1} \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} x_k \ = \ f_{i,n}(k_i).$$

Тогда согласно (40)

$$\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} \right)^{\frac{1}{1-r}} \ = \ f_{i,n}(in+1)$$

и, значит,

$$R_i(\alpha) \ = \ t_s \, a_i^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} x_k \big(f_{i,n}(k_i) - f_{i,n}(in+1) \big).$$

Отсюда видим, что неравенство $R_i(\alpha) \geq 0$ при $i < s$ эквивалентно неравенству

$$f_{i,n}(in+1) \leq f_{i,n}(k_i), \quad k_i \in [(i-1)n+1, in]. \tag{71}$$

Пусть теперь $i > s$. Полагая

$$\nu_s = \frac{1 - t_s^{\frac{1}{r}} \tilde{\sigma}_1(s)}{\tilde{\sigma}_2(s)},$$

согласно (41) имеем

$$\alpha_k m_k^{*r} = \nu_s^r \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}, \quad k > s. \tag{72}$$

Поэтому согласно (70)

$$R_i(\alpha) = \nu_s^r \left(\sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i - 1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} - \sum_{k=in+1}^{k_i+n-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} \right).$$

Поскольку $\alpha \in A_r$, числа α_k не возрастают. Значит,

$$R_i(\alpha) \geq 0, \quad i > s.$$

Пусть, наконец, $i = s$. Тогда в силу (41)

$$\alpha_k m_k^{*r} = \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} t_s a_s^{-\frac{1}{1-r}}, \quad k \in [(s-1)n+1, k_s],$$

и согласно (72)

$$\alpha_k m_k^{*r} = \nu_s^r \alpha_k^{\frac{1}{1-r}}, \quad k \in [sn+1, k_s + n].$$

Поэтому

$$R_i(\alpha) = t_s a_s^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=(s-1)n+1}^{k_s - 1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} - \nu_s^r \sum_{k=sn+1}^{k_s+n-1} \alpha_k^{\frac{1}{1-r}} =$$

$$= t_s a_s^{-\frac{1}{1-r}} \sum_{k=sn+1}^{k_s+n-1} x_k \left(\left(\sum_{k=sn+1}^{k_s+n-1} x_k \right)^{-1} \sum_{k=(s-1)n+1}^{k_s-1} x_k - \frac{\nu_s^r}{t_s} a_s^{\frac{1}{1-r}} \right).$$

Видим, что неравенство $R_s(\alpha) \geq 0$ эквивалентно соотношению

$$f_{s,n}(k_s) \geq \frac{\nu_s^r}{t_s} a_s^{\frac{1}{1-r}} = \left(\frac{\tilde{\sigma}_1(s)}{s-1} \right)^{\frac{1}{1-r}} a_s^{\frac{1}{1-r}}. \tag{73}$$

Резюмируем доказанное в виде следующего утверждения.

Теорема 3. *При выполнении предположений теоремы* 2 *необходимым и достаточным условием справедливости неравенств* (68) *при всех* $i \in N$ *является выполнение неравенств* (71) *при всех* $i = 1, 2, \ldots, s-1$ *и неравенства* (73) *при* $i = s$.

Если неравенства (71) *и* (73) *выполняются, то справедливо равенство*

$$e_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(2)}\right)_{p,\mu} = \tilde{\sigma}_1^{-\frac{1}{q}}(s) \left[(s-1)^{\frac{q}{q-p}} + \tilde{\sigma}_1^{\frac{q}{q-p}}(s) \tilde{\sigma}_2(s) \right]^{\frac{q-p}{qp}}. \tag{74}$$

Отметим несколько простейших случаев, когда выполняются условия (71) при $i < s$ и неравенство (73). С этой целью заметим, что в силу (40)

$$\left(\frac{\tilde{\sigma}_1(s)}{s-1}\right)^{\frac{r}{1-r}} < a_{s+1}^{-\frac{1}{1-r}}.$$

Поэтому соотношение (73) следует из неравенства

$$f_{s,n}(k_s) \ge \left(\frac{a_s}{a_{s+1}}\right)^{\frac{1}{1-r}} = f_{s,n}(sn+1).$$

Таким образом, достаточным условием для справедливости (74) является выполнение неравенств (71) при всех $i \le s$, которые заведомо будут иметь место в том случае, когда числа $f_{i,n}(k_i)$ на промежутках $[(i-1)n+1, in]$, $i = 1, 2, \ldots, s$, не возрастают.

Полагая

$$\sigma_1 = \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} x_k, \qquad \sigma_2 = \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} x_{k+n},$$

имеем

$$f_{i,n}(k_i) - f_{i,n}(k_i+1) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} - \frac{\sigma_1 + x_{k_i}}{\sigma_2 + x_{k_i+n}} = \frac{\sigma_1 x_{k_i+n} - \sigma_2 x_{k_i}}{\sigma_2\left(\sigma_2 + x_{k_i+n}\right)}.$$

Знак этой разности совпадает со знаком величины

$$r_i = \sigma_1 x_{k_i+n} - \sigma_2 x_{k_i} = \sum_{k=(i-1)n+1}^{k_i-1} \left(x_k x_{k_i+n} - x_{k+n} x_{k_i}\right),$$

поэтому отсюда заключаем, что числа $f_{i,n}(k_i)$ на указанных промежутках действительно не возрастают, если будут выполняться неравенства

$$x_k x_{k_i+n} - x_{k+n} x_{k_i} \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots, k_i - 1, \quad k_i \in [(i-1)n+1, in], \quad i = \overline{1, s}. \tag{75}$$

Теперь докажем следующее утверждение.

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{R}'$ *— множество выпуклых вниз при всех* $t \ge 1$ *функций* $\varphi(\cdot)$, *для которых*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0, \tag{76}$$

и, кроме того, таких, что функция

$$\xi(t) = -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}, \qquad \varphi(t) \overset{\text{df}}{=\!=} \varphi'(t+0), \tag{77}$$

на множестве $t \ge 1$ *не возрастает. Тогда при любых натуральных* $n > 1$ *и* $i \ge 1$ *выполняются соотношения*

$$\Delta_{k,i} = \varphi(k)\varphi(k_i+n) - \varphi(k+n)\varphi(k_i) \ge 0, \tag{78}$$

$$k = 1, 2, \ldots, k_i - 1, \quad k_i \in [(i-1)n+1, in].$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{dt} \ln \varphi(t) = -\xi(t).$$

Отсюда

$$\varphi(t) = \exp\left(-\int_1^t \xi(t)\,d\tau + C\right), \quad C = \ln\varphi(1).$$

Следовательно,

$$\Delta_{k,i} = \exp\left[-\left(\int_1^k + \int_1^{k_i+n}\right)\xi(t)\,dt + C\right] - \exp\left[-\left(\int_1^{k+n} + \int_1^{k_i}\right)\xi(t)\,dt + C\right],$$

и тогда неравенство $\Delta_{k,i} \geq 0$ будет эквивалентно соотношению

$$\left(\int_1^k + \int_1^{k_i+n}\right)\xi(t)\,dt \leq \left(\int_1^{k+n} + \int_1^{k_i}\right)\xi(t)\,dt,$$

или соотношению

$$-\int_k^{k_i}\xi(t)\,dt + \int_{k+n}^{k_i+n}\xi(t)\,dt \leq 0, \tag{79}$$

которое выполняется для любой невозрастающей функции $\xi(t)$, откуда и следует утверждение леммы.

Будем говорить, что последовательность $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит множеству $\mathfrak{R}'$, если существует в $\mathfrak{R}'$ функция $\varphi = \varphi(t)$ такая, что $\varphi(k) = \varphi_k$ при всех $k \in N$. В таком случае из леммы 5 заключаем, что если последовательность $\varphi = \left\{\alpha_k^{\frac{1}{1-r}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит $\mathfrak{R}'$, то соотношения (75) выполняются.

Теперь заметим, что последовательности $\alpha = \{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\alpha^s = \{\alpha_k^s\}_{k=1}^{\infty}$ при любом $s > 0$ принадлежат $\mathfrak{R}'$ одновременно. Действительно, пусть функция $\alpha = \alpha(t)$ такая, что $\alpha(k) = \alpha_k$, $k \in N$, и $\varphi(t) = \alpha^s(t)$. Тогда

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = s\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$$

и, следовательно, функции $\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$ и $\dfrac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}$ не возрастают одновременно. Отсюда заключаем, что соотношения (75) будут выполненными для любой $\alpha \in \mathfrak{R}'$. Таким образом, на основании теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Теорема 3′. *Пусть p и q — действительные числа такие, что $q > p > 0$; ψ, μ и λ — последовательности, для которых величины*

$$\nu_k = |\psi_k'| = \left|\frac{\psi_k\mu_k}{\lambda_k}\right|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

не возрастая, стремятся к нулю,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k^{\frac{pq}{q-p}} < \infty,$$

и последовательность $\nu = \{\nu_k\}_1^{\infty}$ принадлежит $\mathfrak{R}'$. Тогда при любом натуральном n выполняется равенство (74).

По сравнению с теоремой 2 эта теорема имеет дополнительное условие: $\nu \in \mathfrak{R}'$. Отправляясь от определения, заключаем, что множеству $\mathfrak{R}'$ принадлежат функции $\varphi(t) = t^{-s}$, $t \geq 1$, при любом $s > 0$, $\varphi(t) = t^{-s}\ln^r(t+e)$, $t \geq 1$, при любых действительных r и любых $s > 0$. Функция $\varphi_r(t) = \exp\left(-\alpha t^r\right)$, $t \geq \geq 1$, принадлежит $\mathfrak{R}'$ при любых $\alpha > 0$ и $r \in (0, 1]$ и не принадлежат $\mathfrak{R}'$, если $r > 1$, поскольку $\dfrac{\varphi_r'(t)}{\varphi_r(t)} = -\alpha r t^{r-1}$.

Таким образом, если, к примеру,

$$\nu_k = k^{-s} \ln^r(t+e), \quad k \in N, \quad s > 0, \quad r \in R^1,$$

или же

$$\nu_k = \exp\left(-\alpha k^r\right), \quad k \in N, \quad \alpha > 0, \quad r \in (0, 1],$$

то равенство (74) согласно теореме 3′ выполняется.

Условие принадлежности последовательности ν_k множеству $\mathfrak{R}'$, являясь достаточным для выполнения неравенств (71), а следовательно, и для гарантии равенства (74), является также в следующем смысле и необходимым.

Пусть $\mathfrak{R}''$ — множество выпуклых вниз при всех $t \geq 1$ функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условию (76), для которых функция $\xi(t)$, определяемая формулой (77), строго возрастает. Если $\varphi \in \mathfrak{R}''$, то для нее знак в соотношении (79), а следовательно, и в (78) поменяется на противоположный. Поэтому если $\alpha \in \mathfrak{R}''$, то вместо соотношения (71) будет неравенство

$$f_{i,n}(in+1) > f_{i,n}(k_i), \quad k_i \in [(i-1)n+1, in], \quad i = 1, 2, \ldots, s-1,$$

что, в свою очередь, приведет к невыполнению неравенства (68) по крайней мере для случая, когда $i = 1$ и $k_1 = 2$, а значит, и к нарушению равенства (67). Заметим, что функция $\varphi_r(t)$ при $r > 1$ как раз и принадлежит $\varphi \in \mathfrak{R}''$. Впрочем, это еще не означает, что если $\nu \in \varphi \in \mathfrak{R}''$, то равенство (74) не выполняется. Вопрос о выяснении условий, обеспечивающих равенство (74), и тем более о нахождении значений величины $e_n\left(\psi U_\varphi^{q,\lambda}; \Gamma_n^{(2)}\right)_{p,\mu}$ в общем случае остается открытым.

1. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p. – Киев, 2001. – 85 с. – Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2).
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
3. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S_φ^p в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1146.
4. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближений функций в пространстве S^p // Там же. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
5. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. // Тр. Ин-та математики НАН Украины. – 2002. – **40**. – Ч. II. – 468 с.
6. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p // Теорія наближень та гармонійний аналіз: Пр. Укр. мат. конгресу-2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – С. 208 – 226.
7. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Пространства S^p с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 264 – 277.
8. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Наилучшие „сплошные" n-членные приближения в пространствах S_φ^p // Там же. – № 5. – С. 663 – 670.
9. *Степанец А. И.* Экстремальные задачи теории приближений в линейных пространствах // Там же. – № 10. – С. 1392 – 1423.
10. *Степанец А. И.* Наилучшие приближения q-эллипсоидов в пространствах $S_\varphi^{p,\mu}$ // Там же. – 2004. – **56**, № 10. – С. 1378 – 1383.

Получено 21.01.2005