

У той же час в нерухомій системі координат $OXYZ$ рух елементів не є періодичним. Рис. 2, б ілюструє характер абсолютного руху в тому ж перерізі $z = 5691$ м на відріжку часу $0 \leq t \leq 100$ с. Можна бачити, що траєкторія руху заповнює кільцеву область з найбільшим та найменшим радіусами, що дорівнюють найбільшим та найменшим півосям еліпса.

1. Гуляев В. И., Луговой П. З., Белова М. А., Соловьев И. Л. Устойчивость прямолинейной формы равновесия вращающихся бурильных колонн // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 6.
2. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Соловьев И. Л., Горбунович И. В. Компьютерное моделирование критических состояний колонн глубокого бурения // Тр. междунар. научно-техн. конф. “Вычислительная механика деформируемого твердого тела”. – Москва, 2006. – Т. 1. – С. 122–129.
3. Феодосьев В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов. – Москва: Наука, 1967. – 237 с.
4. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. – Москва: Мир, 1971. – 192 с.

Національний транспортний університет, Київ
Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 10.07.2006

УДК 532.528

© 2007

Член-корреспондент НАН України Ю. Н. Савченко, Ю. А. Семенов

Гидродинамическое сопротивление поверхности со смешанными граничными условиями

The boundary layer near a solid wall, at which a sliding condition periodically appears, is considered. The problem is solved numerically using an explicit finite-difference method. The calculations are presented in terms of the velocity profile and the drag coefficient as functions of the Reynolds number and the scale factor of the sliding region. The obtained results show that a drag benefit increases with the scale factor of the sliding region. In order to reduce the drag force by two times, the total area of the sliding region should be no less than 70% of the total area of the wall.

Снижение сопротивления трения, обусловленного прилипанием жидкости к обтекаемой поверхности и касательным напряжением в пограничном слое, остается до настоящего времени фундаментальной проблемой гидродинамики. Существующие методы снижения сопротивления трения можно разделить на две группы: по воздействию на течение в пограничном слое и по воздействию на контакт жидкости с поверхностью. К первой группе относятся методы, способствующие ламинаризации пограничного слоя и снижению уровня турбулентности, в частности, путем отсоса пограничного слоя, вдува микропузырьков газа, использование полимерных добавок, поверхностно активных веществ, упруго-деформируемых покрытий [1–3].

Ко второй группе относятся методы, обеспечивающие снижение сопротивления трения за счет изменения свойств контакта жидкость — твердая поверхность. Это достигается путем применениядвигающихся вдоль потока поверхностей, гидрофобных покрытий, а также с помощью воздушного либо парового зазора между потоком жидкости и обтекаемой

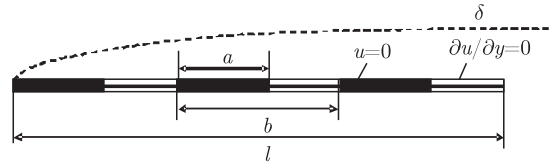


Рис. 1. Задание граничных условий на пластинке с периодическими областями проскальзывания и прилипания

поверхностью [2, 4]. В последнем случае жидкость не взаимодействует с обтекаемой поверхностью на участке расположения зазора, в результате чего сила трения отсутствует. При этом на свободной границе реализуется условие скольжения.

Для определенного числа модулей, обеспечивающих проскальзывание, каждый из которых имеет конечную длину, можно поставить задачу их оптимальной группировки, расположения или распределения с целью обеспечения максимального снижения сопротивления поверхности. Для количественной оценки снижения сопротивления поверхности, на которой образованы области скольжения, требуется рассчитать течение в пограничном слое со смешанным типом граничных условий: на твердой поверхности имеет место равенство нулю скорости, а на участке скольжения — равенство нулю производной скорости в направлении, перпендикулярном потоку, что эквивалентно равенству нулю касательного напряжения.

В данной работе расчет течения в пограничном слое выполнен на основе маршевого метода, предложенного в работе [5] для расчета ламинарных пограничных слоев в каналах с внезапным расширением. Метод основан на численном решении уравнений Прандтля в переменных $u - \psi$, где u — продольная скорость; ψ — функция тока. Основная трудность заключалась в численной реализации изменения типа граничного условия на поверхности, т. е. перехода от граничного условия прилипания к граничному условию скольжения и наоборот. В этой связи особое внимание уделено исследованию вычислительных параметров задачи — влиянию размера шага в продольном и поперечном на результаты расчетов.

Достоверность представленных результатов основывается на согласовании полученных значений коэффициента сопротивления для полностью смоченной поверхности с аналитической зависимостью Блазиуса для ламинарного пограничного слоя.

Метод решения. Для установившегося ламинарного двумерного течения несжимаемой жидкости уравнения пограничного слоя записываются в декартовой системе координат в переменных $u - \psi$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (1)$$

где u — составляющая скорости в проекции на ось OX ; $\psi(x, y)$ — функция тока, удовлетворяющая уравнению неразрывности в силу своего определения

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad (2)$$

v — составляющая скорости вдоль оси y ; μ — коэффициент динамической вязкости; dp/dx — продольный градиент давления, который считается заданным.

На рис. 1 показана схема пограничного слоя вблизи пластинки, на которой периодически заданы условия прилипания и скольжения. На длине a каждого периода $b = l/M$,

где M — число областей прилипания и проскальзывания жидкости, выполняется условие прилипания

$$u = 0, \quad \psi = 0, \quad (3)$$

а на длине $b - a$ — условие проскальзывания, при котором касательное напряжение $\tau = \nu \partial u / \partial y$ равно нулю, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Отношение длины суммарной области скольжения к длине пластинки определяется параметром скважности $S = (b - a)/b$, а отношение $l/b = M$ характеризует масштаб однородности граничных условий.

При заданном градиенте давления dp/dx граничные условия (3) и (4) являются достаточными для получения решения уравнений пограничного слоя (1) и (2). Распределение скорости в начальном сечении задавалось равномерным. На передней кромке пластики уравнения пограничного слоя имеют особенность. Для вычисления производных вдоль оси Ox в уравнении (1) на входной кромке и при переходе от участка скольжения к смачиваемому участку на интервале $\varepsilon \ll a$ вместо граничного условия (3) задается условие перехода

$$u(x, 0) = u(kb, 0) \frac{kb + \varepsilon - x}{\varepsilon}, \quad kb < x < kb + \varepsilon, \quad k = 0, M - 1. \quad (5)$$

Переход от условия прилипания к условию скольжения не приводит к вычислительным трудностям, так как жидкость вблизи пластинки имеет конечное ускорение, обусловленное касательным напряжением в сдвиговом слое. Как будет показано далее, интервал ε можно выбрать настолько малым, что его влияние на результаты расчета не проявляется. Численное решение основано на методе, представленном в работе [5].

Уравнения (1), (2) в конечно-разностной форме с переменным шагом по y в безразмерном виде можно записать

$$\frac{U_j^{i+1} - U_{j-1}^{i+1}}{2} = \frac{\Psi_j^{i+1} - \Psi_{j-1}^{i+1}}{\Delta y_-}, \quad (6)$$

$$U_j^{i+1} \frac{(U_j^{i+1} - U_j^i)}{\Delta X_+} - \frac{(\Psi_j^{i+1} - \Psi_j^i)}{\Delta X_+} \frac{(U_{j+1}^{i+1} - U_{j-1}^{i+1})}{(\Delta Y_+ + \Delta Y_-)} = \chi + \frac{2}{(\Delta Y_+ + \Delta Y_-)} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} K_{j+1/2}^i \left(\frac{U_{j+1}^{i+1} - U_j^{i+1}}{\Delta Y_+} \right) \\ -K_{j-1/2}^i \left(\frac{U_j^{i+1} - U_{j-1}^{i+1}}{\Delta Y_-} \right) \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $j = 1, \dots, N$; $U = \frac{u}{u_\infty}$; $X = \frac{x}{l}$; $Y = \frac{y}{l}$; $\Psi = \frac{\psi}{u_\infty l}$; $\chi = \frac{l}{\rho u_\infty^2} \frac{dp}{dx}$.

Безразмерные коэффициенты диффузии $K_{j-1/2}^i$, заданные для узловых точек с индексами $j + 1/2$ и $j - 1/2$, вычисляются как средние арифметические значений этих величин в соседних узловых точках с целыми индексами. Для рассматриваемого в настоящей работе

частного случая ламинарного течения с постоянными физическими свойствами коэффициенты диффузии постоянны во всем потоке, т. е. $K_{j-1/2}^i = 1/\text{Re}$, где $\text{Re} = \rho u_\infty l / \mu$ — число Рейнольдса, определенное по длине пластики; μ — коэффициент динамической вязкости.

Уравнение количества движения (7) представляет собой нелинейное алгебраическое уравнение относительно неизвестных U_j^{i+1} и Ψ_j^{i+1} . Применяя линеаризацию по методу Ньютона, можно получить его линейное представление. Для этого переменные на k -й итерации представляются в виде $U_j^{i+1} = \tilde{U}_j^{i+1} + \delta U$, $\Psi_j^{i+1} = \tilde{\Psi}_j^{i+1} + \delta \Psi$, где δU и $\delta \Psi$ — малые первого порядка. Переменные с тильдой представляют собой значения на предыдущей итерации. Подставляя эти выражения в уравнение (7) и отбрасывая члены с произведением величин δ , можно получить следующую систему уравнений относительно неизвестных U_j^{i+1} и Ψ_j^{i+1} :

$$\begin{bmatrix} B_j & 0 \\ b_j & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{j-1}^{i+1} \\ \Psi_{j-1}^{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_j & E_j \\ d_j & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_j^{i+1} \\ \Psi_j^{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_j & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{j+1}^{i+1} \\ \Psi_{j+1}^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_j \chi + C_j \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (8)$$

При известном градиенте давления χ уравнение (8) можно решить стандартным методом для решения блочной тридиагональной матрицы 2×2 . Выражение для коэффициентов A_j , B_j , C_j , D_j , E_j , H_j , b_j и d_j приведено в работе [5]. Расчет течения вдоль оси OX осуществляется переходом от шага i к шагу $i + 1$.

Результаты расчетов. Расчетная область вдоль оси OX ограничена длиной пластинки l , а в направлении оси OY — значением $h = (5/\sqrt{\text{Re}})l$ [1]. Учитывая, что на пластинке вблизи входной кромки, а также при переходе от условия скольжения к условию прилипания скорость скачком уменьшается до нуля, градиент скорости в дискретном представлении становится очень большим. Поэтому дискретизация в направлении OY задавалась квадратичной, а число точек Y_j выбиралось в диапазоне $N = 200$ – 800 . На интервале $\varepsilon = 10^{-4}$, соответствующем переходу от условия скольжения к условию прилипания каждого периода b , задавался шаг интегрирования вдоль оси OX $\Delta x/l = 10^{-6}$. Далее на интервале $b - \varepsilon$ шаг интегрирования увеличивался до значения $\Delta x/l = 10^{-3}$ по закону геометрической прогрессии. На каждом шаге требовалось три — пять итераций для достижения сходимости итерационной процедуры решения уравнения (8).

Расчеты плоскопараллельного ламинарного течения выполнены в диапазоне чисел Рейнольдса 10^3 – $5 \cdot 10^5$. Коэффициент трения

$$c_f = \frac{F}{\rho u_\infty^2 l}, \quad (9)$$

где сила трения $F = \sum_{i=0}^{M-1} \int_{ib}^{ib+a} \tau_0 dx$, а напряжение трения на смоченной поверхности $\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\mu u_\infty}{l} \frac{U_2 - U_1}{Y_2 - Y_1}$; на участке скольжения напряжение трения равно нулю.

Ввиду нелинейности развития пограничного слоя, кроме параметра скважности, на сопротивление трения оказывает влияние масштаб однородности граничных условий $l/b = M$. На рис. 2 представлены профили скорости на последнем периоде в конце смачиваемого участка (кривая 1) и в конце участка скольжения (конец пластинки) (кривая 2) для различных значений масштаба $l/b = M$. Можно видеть, что с увеличением M отличие профиля скорости в конце смачиваемого участка от профиля скорости в конце участка скольжения уменьшается. Это объясняется тем, что вследствие прилипания жидкости на смачиваемом

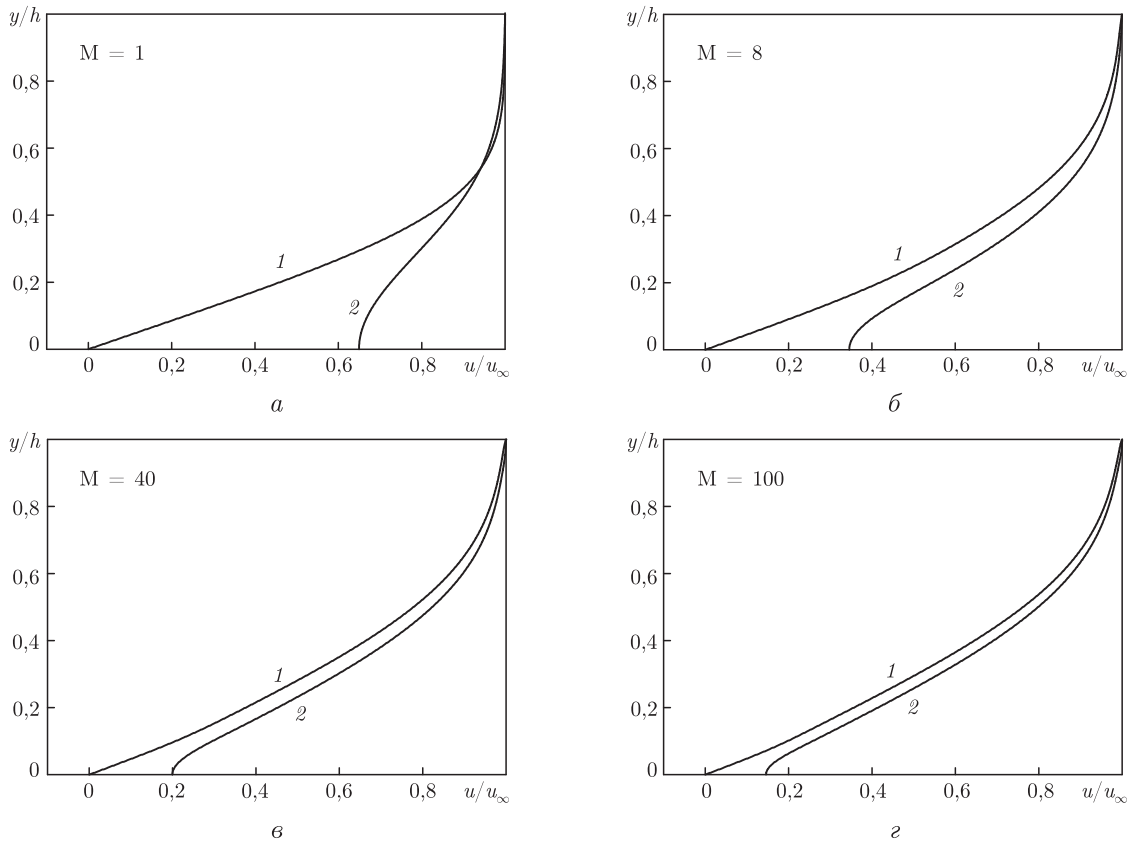


Рис. 2. Профили скорости на пластинке в конце последнего участка a (кривая 1) и в конце пластинки (кривая 2) при скважности $S = 0,5$ для различных значений масштаба однородности граничных условий

участке a периода b скорость на поверхности становится равной нулю независимо от длины смачиваемого участка. В отличие от этого, на участке скольжения, вследствие касательного напряжения в сдвиговом слое, скорость возрастает монотонно от нуля в начале до некоторого значения в конце. Чем больше длина участка скольжения, тем больше значение скорости в конце этого участка. Длина участка скольжения, как можно видеть из определения параметра скважности $b - a = bS$, увеличивается как с увеличением параметра S , так и с увеличением длины периода b . Поэтому скорость в конце участка скольжения увеличивается как с увеличением параметра скважности S , что можно видеть из рис. 3, так и с увеличением отношения $b/l = 1/M$, как видно из рис. 2.

На рис. 4 представлены зависимости коэффициента гидравлического сопротивления пластинки от числа Рейнольдса для различных значений скважности S и длины периода b . Там же штриховой линией показана теоретическая зависимость $c_f = 1,35/\sqrt{\text{Re}}$ [1], соответствующая полностью смоченной пластинке. Как видно из рисунка, при нулевой скважности результаты численного решения уравнений пограничного слоя достаточно хорошо согласуются с точным решением Блазиуса. С увеличением скважности коэффициент сопротивления уменьшается. Кроме того, как видно, коэффициент сопротивления меньше при меньшем масштабе однородности граничных условий $l/b = M$.

Максимальное значение $b/l = 1$ соответствует $M = 1$, т.е. наибольший выигрыш в снижении гидравлического сопротивления можно получить при максимальной длине участка

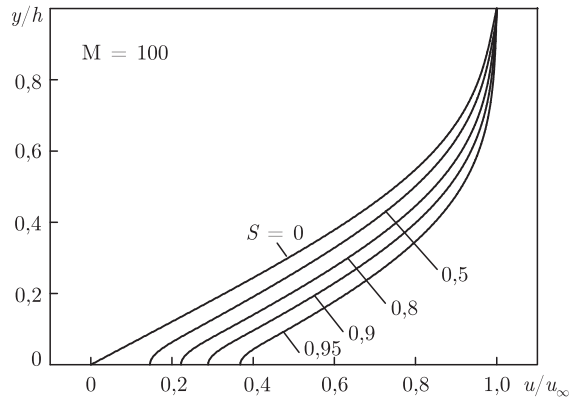


Рис. 3. Профиль скорости в конце пластинки для различных значений скважности S

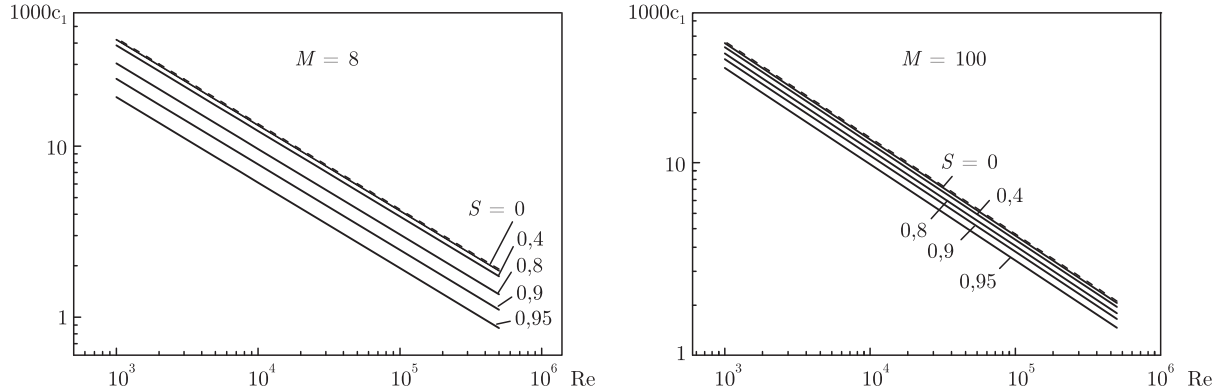


Рис. 4. Зависимости коэффициента сопротивления от числа Рейнольдса для различных значений скважности и длины периода b : $a - b/l = 1/8$; $b - b/l = 0,01$

скольжения на пластинке. Для этого случая коэффициент сопротивления определяется аналитически

$$c_f = \frac{1,35}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1,35}{\sqrt{\text{Re}}} \sqrt{1 - S}. \quad (10)$$

На основе численного решения уравнений пограничного слоя для поверхности, на которой образованы области проскальзывания потока, можно сделать следующие выводы.

1. Получена количественная оценка снижения гидравлического сопротивления поверхности, на которой образованы области проскальзывания потока.

2. На коэффициент сопротивления оказывают влияние скважность поверхности и масштаб однородности граничных условий. Максимальный выигрыш в снижении сопротивления при заданной скважности реализуется при максимальном масштабе однородности граничных условий.

3. С уменьшением масштаба однородности граничных условий сопротивление трения повышается, а его зависимость от скважности становится существенно нелинейной. В случае большого количества ($M > 20$) модулей, периодически реализующих проскальзывание жидкости на обтекаемой поверхности, для снижения сопротивления на 10% требуется, чтобы скважность поверхности составляла не менее 90%, в то время как для одного модуля достаточно 30% скважности.

4. Сопротивление обтекаемой поверхности не зависит от последовательности расположения областей скольжения и прилипания, если не учитывать энергетические затраты на образование областей проскальзывания. Энергетические затраты будут зависеть от последовательности расположения областей проскальзывания, если они зависят от профиля скорости потока.

Решение относительно выбора оптимальных значений параметра скважности и количества модулей, обеспечивающих условие скольжения потока, должно приниматься с учетом выбранного метода реализации условия проскальзывания потока. В частности, область скольжения может быть организована путем установки кавитаторов на обтекаемой поверхности [6]. Однако в этом случае следует учитывать гидродинамическое сопротивление кавитатора, зависящее от его размеров и профиля скорости в пограничном слое.

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – Москва: Наука, 1974. – 712 с.
2. Савченко Ю. Н. Перспективы методов снижения гидродинамического сопротивления // Прикл. гідромеханіка. – 1999. – **1 (73)**, № 4. – С. 42–50.
3. Watanabe K. Drag reduction research in Japan // Proceedings of the Intern. Symp. on Seawater Drag Reduction. – Newport, 22–23 July, 1998. – P. 19–23.
4. Савченко Ю. Н., Савченко Г. Ю. Оценка эффективности использования суперкавитации на осесимметричных корпусах // Прикл. гідромеханіка. – 2004. – **6(78)**, № 4. – С. 50–56.
5. Kwon O. K., Pletcher R. B., Lewis J. P. Расчет течений с внезапным расширением при помощи уравнений пограничного слоя // Тр. амер. об-ва инж.-мех. Сер. D. Теорет. основы инж. расчетов. – 1984. – **106**, No 3. – С. 116–123.
6. Савченко Ю. Н., Семенов Ю. А. Метод расчета кавитационного течения в вихревом набегающем потоке // Прикл. гідромеханіка. – 2005. – **7(79)**, № 2. – С. 54–62.

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 04.07.2006