УДК 517.9

Ю. Ю. Трохимчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ДВЕ ТЕОРЕМЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

We prove two fundamental theorems from multidimensional complex analysis by the methods of this analysis without using the theory of subharmonic functions. As a single violation, we can mention Green's formula.

Доведено дві фундаментальні теореми багатовимірного комплексного аналізу на основі самого цього аналізу — без застосування теорії субгармонічних функцій. Єдине порушення — формула Гріна.

Теоремы Хартогса и Радо считаются знаковыми утверждениями в многомерном комплексном анализе. Сразу после первых публикаций самих авторов возникло много новых доказательств, дальнейших обобщений. Первые доказательства стали образцом для этих обобщений, получаемых на основе различных тонких результатов действительного анализа.

В настоящей статье предлагается чисто „комплексный" подход к этим теоремам — не без применения элементарной теоретико-множественной топологии.

Теорема Хартогса. Первой теоремой для нас, конечно, будет знаменитая теорема Хартогса в следующей формулировке:

Если функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ голоморфна в любой точке области $D \subset \mathbb{C}^n$ по каждой переменной z_ν, то она голоморфна в D.

Грубо говоря: если функция разлагается в одномерные степенные ряды, то она разлагается и в кратные.

В начале нам потребуются некоторые утверждения о последовательностях множеств в евклидовом пространстве. Именно, пусть $\{A_m\}$ — последовательность множеств в некоторой ограниченной области D евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Множество $A \subset D$ называется пределом этой последовательности: $A = \lim_m A_m$, если: 1) в каждой окрестности произвольной его точки находятся точки всех A_m, начиная с некоторого номера m, и 2) A состоит из всех таких точек. При этом сама последовательность называется сходящейся к множеству A.

В известной теореме [1] утверждается, что из любой последовательности произвольных множеств можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Нам потребуется сначала случай компактных A_m, когда и пределы окажутся компактами. Именно, пусть в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^n$ задана последовательность $\{B_m\}$ открытых множеств. Возьмем их замыкания $\overline{B}_m$ и будем предполагать, что возникающая последовательность компактов сходится (иначе выделили бы сходящуюся подпоследовательность: $\lim_m \overline{B}_m = \widetilde{B}$). Ядром последовательности открытых множеств B_m назовем множество $B = \operatorname{Int} \widetilde{B}$ внутренних точек компакта $\widetilde{B}$; ядро может оказаться и пустым, т. е. когда компакт $\widetilde{B}$ нигде не плотен в $\mathbb{R}^n$. Но если $B \neq \varnothing$, то будем говорить, что последовательность открытых множеств $\{B_m\}$ сходится к B как к ядру: $\lim_m B_m = B$.

Легко видеть, что в этом случае ядро B характеризуется двумя свойствами:

1) каждое компактное подмножество $K \subset B$ принадлежит всем (открытым) множествам B_m, начиная с некоторого номера m;

2) B — максимальное открытое множество с этим свойством.

Иногда ядром называют любое открытое множество со свойством 1, но без условия максимальности. Нам удобнее рассматривать случаи сходящихся (к ядру) последовательностей открытых множеств, хотя во многих случаях это и связано с выбором соответствующих подпоследовательностей.

Далее потребуются определенные утверждения, связанные с понятием ядра последовательности римановых поверхностей, возникающих как образы ограниченных аналитических отображений (в данном случае — плоских односвязных областей).

Рассмотрим произвольную последовательность римановых поверхностей F_n, $n = 1, 2, \ldots,$ расположенных над плоскостью ζ. Скажем, что поверхности F_n имеют общий круг $Q : |\zeta - \zeta_0| < < \rho$, если на каждой поверхности F_n зафиксирован однолистный круг $Q^{(n)}$, расположенный над кругом Q плоскости ζ.

Исключим из каждой F_n все точки ветвления и полученную последовательность, очевидно, с тем же кругом Q запишем как $\{F'_n\}$.

Определим теперь риманову поверхность F', содержащую круг Q, ядром последовательности $\{F'_n\}$, если: 1) каждая компактная подобласть ее принадлежит всем F'_n, начиная с некоторого значения n, и 2) каждое расширение F^* этой поверхности, $F^* \supset F'$, не имеет этого свойства.

А теперь, присоединив к F' все „внутренние" возникающие точки ветвления, получим поверхность F, которую назовем ядром первоначальной последовательности $\{F'_n\}$.

Если поверхности последовательности $\{F_n\}$ имеют общей вместо круга Q единственную точку ζ_0, то эту точку мы и назовем ядром этой последовательности.

Основным здесь для нас результатом является следующее утверждение [2 – 5].

Пусть в связных областях G_n, расположенных на одной и той же ограниченной римановой поверхности R над плоскостью z, заданы аналитические функции $f_n(z)$, ограниченные в совокупности и отображающие соответствующие G_n на некоторую риманову поверхность F_n над плоскостью ζ. Тогда для каждой области G_0 их равномерной сходимости с предельной функцией $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ на всех поверхностях F_n, начиная с некоторого, можно зафиксировать общий однолистный круг Q так, что функция $f(z)$ отображает область G_0 на ядро F последовательности $\{F_n\}$, однозначно определенное кругом Q. При этом для сходимости поверхностей $\{F_n\}$ к ядру F необходимо и достаточно, чтобы для любой подпоследовательности $\{f_{n_k}(z)\}$ последовательности $\{f_n(z)\}$ область их равномерной сходимости совпадала с G_0.

Если же ядро F вырождается в единственную точку ζ_0, то $f_n(z)$ равномерно сходятся именно к константе ζ_0.

Из этой теоремы можно вывести, что в случае $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$ функции $\varphi_n(w)$, обратные к $f_n(z)$, сходятся равномерно в области $F' \subset F$ (т. е. вне точек ветвления F), а изолированность точек ветвления позволяет утверждать, что здесь мы имеем равномерную сходимость функций $\varphi_n(w)$ на всем ядре F: точки ветвления F сами являются предельными для точек ветвления F_n (и того же порядка).

Ниже нам необходимо будет рассматривать последовательность произвольных открытых множеств (но с конечным числом компонент), для которых и соответствующие им ядра окажутся несвязными множествами. Но, очевидно, что и в этом случае сформулированные утверждения будут справедливы (так сказать, покомпонентно).

Напомним, далее, нужную нам в дальнейшем классическую теорему Витали:

Если последовательность ограниченных в совокупности аналитических функций в области G сходится на множестве точек, содержащем предельную точку в этой области, то она равномерно сходится внутри области G и, следовательно, предельная функция $f(z)$ является аналитической в области G.

В дальнейших условиях сходимость указанной здесь последовательности функций будет всюду в области G, которая в общем случае может быть далеко не равномерной.

Приведем один необходимый для нас критерий открытости множества в евклидовом пространстве.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l(x, y)$, $k, l > 0$, — некоторое открытое множество. Рассмотрим его l-сечения $\{G_x,\ x \in \mathbb{R}^k\}$. Конечно, каждое G_x открыто в $\mathbb{R}^l_x$ и все их можно считать принадлежащими одному „экземпляру" — пространству $\mathbb{R}^l$. Если задано фиксированное $x_0 \in \in \mathbb{R}^k$, то будем брать сходящиеся к ядру последовательности $\{G_{x_n}\}$ при $x_n \to x_0$. Скажем, что семейство $\{G_x\}$ полунепрерывно снизу в точке x_0, если каждое такое ядро содержит все l-сечения G_{x_0}.

Если это имеет место в каждой точке $x \in \mathbb{R}^k$, назовем все семейство $\{G_x\}$ полунепрерывным снизу. Это согласуется с общим понятием полунепрерывности [1], мы лишь переформулировали его в нужном для нас конкретном случае.

Теперь легко доказываемый критерий звучит так:

Для того чтобы множество $G \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l(x, y)$ было открытым, необходимо и достаточно, чтобы все l-сечения его были открыты (в $\mathbb{R}^l$), а все их семейство $\{G_x, x \in \mathbb{R}^k\}$ было полунепрерывно снизу.

Наконец, пусть в бикруге радиуса $r > 0$ задана комплексная функция $f(z, w)$, голоморфная по каждой переменной в отдельности. Возьмем замкнутый бикруг $\overline{D}(z) \times \overline{D}(w)$ радиуса $r_0 < r$ и в нем отображения $\zeta = f(z, w) \colon \overline{D} \times \overline{D} \to \mathbb{C}_\zeta$.

На каждом сечении $z = z_0$ мы имеем аналитическое отображение $\zeta = f(z_0, w)$ замкнутого круга D_{z_0}. Если $f(z_0, w) \not\equiv \mathrm{const}$, то образ границы ∂D_{z_0} представляет в плоскости ζ аналитическую кривую с конечным числом самопересечений, которая разбивает плоскость на конечное число жордановых односвязных областей $g_1, g_2, \ldots, g_m$, в каждой из которых степень $\gamma(g)$ отображения $\partial D_{z_0} \to f(\partial D_{z_0})$ постоянна и неотрицательна при обычном выборе положительной ориентации на плоскости $\mathbb{C}_\zeta$ и на окружности ∂D_{z_0}. Это следует из принципа аргумента.

Образ круга D_{z_0} содержит лишь те компоненты g_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, в которых эта степень положительна. В целом же образ замкнутого круга $\overline{D}_{z_0}$ в плоскости ζ представляет собой конечносвязную область, граничные контуры которой — замкнутые жордановые кривые, и каждая из них принадлежит полному образу границы ∂D_{z_0} круга D_{z_0}. При этом образы некоторых граничных дуг из ∂D_{z_0} могут принадлежать и внутренности $f(D_{z_0})$. Конечно, в случае, когда $f(z_0, w) \equiv \zeta_0$, образом всего круга D_{z_0} является одна точка ζ_0.

Наша цель — доказать непрерывность по совокупности переменных функции $\zeta = f(z, w)$ в открытом бикруге $D \times D$.

Выберем произвольный круг $d(\zeta_0, \rho)$, $\zeta_0 \in f(D \times D)$, $\rho > 0$. Докажем, что полный прообраз $G = f^{-1}(d) \subset D \times D$ является открытым множеством.

Прежде всего в каждом (круговом) сечении D_z множества G „вертикальное” отображение $\zeta = f(z, w)$ аналитично, а значит, и непрерывно (если взять плоскую координатную схему: с „горизонтальной” осью z и „вертикальной” w), поэтому G_z, как прообраз круга d на этом сечении, является открытым множеством. Если $f(z, w) \equiv \mathrm{const}$, то множество G_z совпадает с (открытым кругом) D_z.

В случае $f(z, w) \not\equiv \mathrm{const}$ множество $G_z \subset D_z$ состоит из конечного числа открытых жордановых односвязных компонент, часть из которых „приклеены” к границе ∂D_z, а часть компактны. Граничные же их дуги, лежащие внутри D_z, соответствуют определенным дугам на окружности ∂D. Образ каждой компоненты представляет собой некоторую риманову поверхность над соответствующей частью $d \cap g_j$ круга d, которую она накрывает с одинаковой кратностью. При этом образ компактной компоненты совпадает со всем кругом d.

Все изложенное — из того же принципа аргумента.

Итак, каждое сечение G_z множества $G = f^{-1}(d) \subset D \times D$ является открытым множеством в круге D_z. Докажем, что семейство $\{G_z, \ z \in D\}$ полунепрерывно снизу.

Выберем произвольную точку $z_0 \in D$ и последовательность $z_n \to z_0$ со сходящейся к ядру G_0, последовательностью $\{G_{z_n}\}$. Ядро D_0 либо является точкой, либо, как и каждое G_{z_n}, состоит из конечного числа жордановых компонент в круге D. Это следует из приведенного выше основного утверждения о сходимости к ядру, из того, что в данном случае предельной функцией является $f(z_0, w)$ (в силу равномерной сходимости $f(z_n, w)$ (теорема Витали!) внутри ядра G_0) и в силу аналитичности этой функции во всем круге D. Части граничных контуров указанных жордановых компонент, расположенные внутри круга D, и только они, соответствуют при отображении $\zeta = f(z_n, w)$ дугам граничной окружности ∂d.

Снова, как это было и для G_{z_0}, образ ядра G_0 состоит из конечного числа односвязных римановых поверхностей, являющихся однородными (возможно, разветвленными) накрытиями над своими проекциями в плоскости $\mathbb{C}_\zeta$. И, опять-таки, если G_0 содержит компактную компоненту, то образ ее совпадает со всем кругом d.

Образ G_{z_0} мы также можем описать: это, как и ранее, римановы поверхности над компонентами дополнения к $f(\partial D_{z_0})$, принадлежащими кругу d.

А теперь сравним G_0 и G_{z_0}. Отображающая функция у них та же: $\zeta = f(z_0, w)$ и они принадлежат одному кругу. Поэтому будем сравнивать их с помощью их образов в круге d.

Возьмем произвольную точку $w_0 \in G_{z_0}$. Обозначим $\zeta_0 = f(z_0, w_0)$. Это — некоторая точка на одной из рассматриваемых римановых поверхностей. Пусть $\overline{V}(\zeta_0)$ — (возможно, многолистная) замкнутая окрестность точки ζ_0 на этой поверхности.

Поскольку („горизонтальная”) функция $f(z, w_0)$ аналитична в круге $D(w_0)$ и $f(z_n, w_0) \to \to f(z_0, w_0)$, существует последовательность („горизонтальных”) замкнутых окрестностей $\overline{U}(z_n, w_0)$, образы которых совпадают с $\overline{V}(\zeta_0)$. Но внутрь $V(\zeta_0)$ попадут и образы „вертикальных” окрестностей точек $(z_n, w_0) : U(z_n, w)$.

Отсюда пока следует, что, начиная с некоторого n, точка w_0 принадлежит G_{z_n}. Это означает также, что w_0 лежит внутри D. Если бы некоторая окрестность w_0 не принадлежала всем G_{z_n}, начиная с некоторого n, то граничные контуры их внутри D стремились бы к точке w_0. Но это означало бы, что ей соответствует граничная точка из ∂d, а это не так.

Из изложенного следует, что точка w_0 должна принадлежать ядру G_0 последовательности $\{G_{z_n}\}$. Точка z_0 была выбрана произвольной. Тем самым мы доказали полунепрерывность снизу семейства $\{G_z, z \in D\}$ для круга $d(\zeta_0) \subset \mathbb{C}_\zeta$, а значит, и открытость полного прообраза $f^{-1}(d)$ $\{G_z,\ z \in D\}$ для этого круга. Но так как и круг d был взят произвольно, окончательно заключаем, что произвольная функция $f(z, w)$ в бикруге $D \times D$, голоморфная по каждой переменной в отдельности, непрерывна по совокупности переменных, что, как известно, в этих условиях, равносильно и голоморфности по совокупности этих переменных.

Докажем теперь теорему Хартогса для случая функций любого числа переменных; т. е. докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если функция f любого числа переменных голоморфна по каждой из них в отдельности всюду в области $D \subset \mathbb{C}^n$, то она голоморфна в D.*

Эту теорему мы легко сможем доказать индукцией по числу переменных. Предположим, что она верна для функций $(n-1)$-й переменной, и рассмотрим функцию $f(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, w) = f('z, w)$ в полукруге $D('z) \times D(w)$ радиуса $r > 0$.

Теперь мы можем повторить все наши прежние построения с функциями двух переменных $f(z, w)$, только параметризация и сечений G_z, и связанных с ними римановых поверхностей достигается не одним комплексным z, а несколькими: $'z$. Преимущество нашего подхода заключается в том, что в обоих случаях достаточно ограничиться введением лишь одномерных аналитических многообразий, т. е. римановых поверхностей.

Теорема Радо. Приведем классическую формулировку теоремы:

Непрерывная функция $f(z)$ в области $D \subset \mathbb{C}^n$, голоморфная вне множества $\{f(z) = 0\}$, голоморфна всюду в этой области.

Простота этой формулировки привлекла очень многих математиков, которые приводили все более простые доказательства этой теоремы, связанные с самыми неожиданными подходами к ней [8].

В настоящей статье предлагается определенное обобщение теоремы Радо. Доказательство основано на одной топологической теореме о продолжении внутренних отображений только плоских областей, а также доказанной выше теореме Хартогса [6].

Функция f, заданная на некотором плоском множестве E, называется моногенной в точке $z_0 \in E$ по множеству E, или относительно E, если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'_E(z_0), \quad z_0 + \Delta z \in E,$$

который называется производной функции f по множеству E.

Скажем, что f имеет в области D неполную моногенность, если

$$D = \bigcup_k E_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

причем $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и f моногенна на каждом E_k (относительно E_k).

Помпейю сформулировал без доказательства следующую теорему.

Теорема 2. *Если непрерывная функция f имеет неполную моногенность в области D, то она является аналитической всюду в D.*

Для доказательства этой теоремы необходимы некоторые леммы.

Лемма 1. *Пусть непрерывная в области D функция f имеет полный дифференциал в некоторой точке $z \in D$ относительно множества E, контингенция которого в этой точке содержит по крайней мере два луча, расположенные на различных прямых. Если функция f имеет обычный полный дифференциал в этой же точке, то он совпадает с относительным дифференциалом.*

Доказательство. По условию леммы имеем одновременно

$$\Delta f = \tilde{f}_z \Delta z + \tilde{f}_{\bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z),$$

где $\tilde{f}_z$, $\tilde{f}_{\bar{z}}$ — коэффициенты относительного дифференциала $(z + \Delta z \in E)$ и

$$\Delta f = f_z \Delta z + f_{\bar{z}} \Delta \bar{z} + o(\Delta z)$$

для любых $z + \Delta z \in D$.

Выберем две последовательности значений $\Delta z = |\Delta z| e^{i\alpha}$ так, чтобы точки $z + \Delta z \in E$ сходились к z по двум путям с двумя полукасательными $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ в точке z. Из приведенных равенств получим одновременно

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to \tilde{f}_z + \tilde{f}_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}, \quad \alpha = \alpha_1, \alpha_2,$$

и

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} \to f_z + f_{\bar{z}} e^{-2i\alpha}, \quad \alpha = \alpha_1, \alpha_2.$$

Поскольку $\alpha_1 \neq \alpha_2 \pmod \pi$, отсюда легко следует, что $\tilde{f}_z = f_z$ и $\tilde{f}_{\bar{z}} = f_{\bar{z}}$.

Лемма 1 доказана.

В силу теоремы о точках плотности произвольное плоское множество E в каждой своей точке, за исключением множества плоской меры нуль, имеет контингенцию — полную плоскость, поэтому из леммы 1 следует такая лемма.

Лемма 2. *Если функция f дифференцируема относительно множества $E \subset D$ в каждой его точке и имеет почти всюду на E обычный полный дифференциал, то он совпадает с относительным полным дифференциалом почти всюду на E.*

Заметим еще, что множество E может оказаться неизмеримым, но термин „почти всюду”, очевидно, имеет смысл для произвольных множеств.

Лемма 3. *Пусть непрерывная в области D функция f является аналитической вне некоторого совершенного и нигде не плотного множества $P \subset D$, причем*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq n|z_2 - z_1|$$

для любых $z_1, z_2 \in P$ (n — постоянная). Если функция f имеет неполную моногенность в D, то f является аналитической функцией всюду внутри области D.

Прежде всего, для вспомогательной функции $f_1(z) = f(z) + 2nz$ отображение $f_1 \colon D \to \mathbb{C}$ является гомеоморфизмом на P, поэтому, в силу теоремы о продолжении внутренних отображений [6], оно является внутренним. В данном условиях это означает локальную суммируемость производных $f'(z)$ и $f_1'(z)$ с квадратом, а это, в свою очередь, в силу N-свойства по всем координатным линиям дает абсолютную непрерывность для почти всех таких линий и, наконец, законность применения формулы Грина

$$\int\limits_{\partial d} f(z)dz = 2i \int\limits_{d}\int f_{\overline{z}} dz \wedge d\overline{z}.$$

Из теоремы Меньшова [6] следует, что почти всюду на P (и, конечно, в D) имеем (обычный) полный дифференциал

$$\Delta f = f_z \Delta z + f_{\overline{z}} \Delta \overline{z} + 0(\Delta z).$$

Из моногенности f в точке $z \in E_k$ (относительно E_k) следует, что

$$\Delta f = f'_{E_k}(z)\Delta z + o(\Delta z).$$

Поскольку совокупность всех E_k не более чем счетна и $\bigcup_k E_k = D$, в силу леммы 2 относительный полный дифференциал функции f совпадает с обычным дифференциалом почти всюду в D. В частности, почти для всех $z \in P$ имеем

$$\Delta f = f'(z)\Delta z + o(\Delta z),$$

где $f'(z) = f'_{E_k}(z)$ для $z \in E_k \cap P$, $k = 1, 2, \ldots$. Это означает, что f моногенна почти всюду в D, что и завершает доказательство леммы 3.

Теперь перейдем к ***доказательству теоремы* 2.** 1. Покажем сначала, что в условиях теоремы существует всюду плотное открытое множество O точек аналитичности функции f.

Положим

$$E_k^{(n)} = E_k \left\{ \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| \leq n, \quad |z' - z| < \frac{1}{n}; \quad z' \in E_k \right\}.$$

Поскольку, очевидно, $E_k = \bigcup_k E_k^{(n)}$, то

$$D = \bigcup_{k,n} E_k^{(n)}, \quad k, n = 1, 2, \ldots.$$

Возьмем произвольную область $\bar{d} \subset D$. Вводя обозначения $d_k^{(n)} = d \cap E_k^{(n)}$, получаем

$$d = \bigcup_{k,n} d_k^{(n)}.$$

Поскольку d — второй категории (в себе и на плоскости), найдется круг d', $\overline{d'} \subset d$, на котором одно из множеств $d_k^{(n)}$ окажется всюду плотным. Будем считать, что диаметр d' меньше $\dfrac{1}{n}$.

Из непрерывности f в $\overline{d'}$ легко следует, что для произвольных точек $z, z' \in \overline{d'}$ выполняется условие

$$\left|\frac{f(z') - f(z)}{z' - z}\right| \leq n.$$

В силу леммы 3 функция f аналитична внутри $d' \subset d$. Из произвольности области $d \subset D$ и следует доказываемое.

2. Предположим теперь, что теорема неверна. Тогда совершенное множество P всех точек D, где f не является аналитической, не пусто и, согласно доказанному, нигде не плотно в D. Вводя обозначение $P_k^{(n)} = P \cap E_k^{(n)}$, имеем

$$P = \bigcup_{k,n} P_k^{(n)}.$$

Обычным путем находим порцию $P' = P \cap D'$ ($\overline{D}' \subset Q$ — круг), на которой одно из множеств $P_k^{(n)}$ всюду плотно. Взяв диаметр D' меньшим $\dfrac{1}{n}$, как и выше, получим

$$|f(z') - f(z)| \leq n|z' - z|$$

для любых $z, z' \in P$.

В силу леммы 3 функция f аналитична всюду в $D' \supset P'$, что противоречит определению множества P.

Теорема 2 доказана.

Введем следующее определение.

Определение. *Функция f в области $D \subset \mathbb{C}^n$ называется кусочно-голоморфной, если*:

1) $D = \bigcup_k E_k$, $k = 1, 2, \ldots$;

2) $f|_{E_k} = f_k|_{E_k}$, где f_k — голоморфная функция в окрестности множества E_k.

Очевидным следствием теоремы 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. *Непрерывная функция f, кусочно-голоморфная в области $D \subset \mathbb{C}^n$, является голоморфной в этой области.*

Это, конечно, обобщает теорему Радо.

1. *Куратовский К. К.* Топология. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 606 с.
2. *Carathedory C.* Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veranderlichen Gebieten // Math. Ann. – 1912. – **72**. – S. 107 – 144.
3. *Bieberbach L.* Über einen Satz des Herru Caratheodory // Nachr. Ges. Wis. Göttingen. Math.-phys. Kl. – 1913.
4. *Волковыский Л. И.* Сходящиеся последовательности римановых поверхностей // Мат. сб. – 1948. – **23(65)**. – С. 361 – 382.
5. *Трохимчук Ю. Ю.* О последовательностях аналитических функций и римановых поверхностей // Укр. мат. журн. – 1952. – **4**, № 4. – С. 431 – 446.
6. *Трохимчук Ю. Ю.* Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2007. – 539 с.
7. *Сакс С.* Теория интеграла. – М., 1949. – 412 с.
8. *Heinz E.* Ein elementares Beweis des Satzes von Rado – Behnke – Stein – Cartan über analitische Funktionen // Math. Ann. – 1956. – **131**. – S. 258 – 259.

Получено 23.05.14