

І. В. Потапенко (Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова)

СІТКА ЛЕЙКО НА ПОВЕРХНЯХ В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ E_3

We introduce the notion of Leiko network as a generalization of the geodesic network on the surfaces of nonzero Gaussian curvature in the Euclidian space E_3 and study its characteristics. The conditions of preservation of the Leiko network under infinitesimal deformations of the surfaces are also obtained.

Вводится в рассмотрение понятие сети Лейко, которая является обобщением геодезической сети на поверхностях ненулевой гауссовой кривизны в евклидовом пространстве E_3 , и исследуются ее свойства. Получены также условия сохранения сети Лейко при инфинитезимальных деформациях поверхностей.

У даній статті вводиться поняття сітки на поверхні в тривимірному евклідовому просторі, однопараметричні сім'ї якої — ізопериметричні екстремалі повороту, тобто ІЕП-сітки, яка є узагальненням геодезичної сітки. Вивченням ізопериметричних екстремалей повороту займався С. Г. Лейко [4–8]. Вшановуючи пам'ять про С. Г. Лейко, автор назвав цю сітку його іменем. Дослідження властивостей сітки Лейко проведемо в тензорній формі, використовуючи методику Я. С. Дубнова, викладену в монографії В. Ф. Кагана [3, с. 366–370].

Означення 1. *Ізопериметричні екстремалі повороту (ІЕП) на поверхнях в тривимірному евклідовому просторі — це криві, вздовж яких виконується співвідношення*

$$k_g = cK, \quad (1)$$

де k_g — геодезична кривина без знаку, K — гауссова (повна) кривина поверхні, c — ізопериметрична стала.

З означення 1 випливає, що нетривіальні ІЕП з'являються на поверхнях ненульової гауссової (повної) кривини. Більш детальні властивості ІЕП можна знайти в [5, 7, 8]. Отже, далі ми розглядаємо поверхні ненульової гауссової (повної) кривини.

Нагадаємо, що однопараметрична сім'я ліній на поверхні називається регулярною, якщо через кожну точку поверхні проходить одна і лише одна лінія цієї сім'ї.

Дві різні однопараметричні сім'ї кривих регулярні в спільній області, утворюють на поверхні регулярну сітку, якщо: 1) через кожну точку області сітки проходять дві криві, що належать різним сім'ям і 2) лінії з різних сімей у жодній точці не мають спільної дотичної. В. Ф. Каган [3, с. 340] використовує термін „регулярна область сітки”.

Означення 2. *Регулярна сітка на поверхні ненульової гауссової (повної) кривини K називається ІЕП-сіткою або сіткою Лейко, якщо кожна лінія будь-якої з двох однопараметричних сімей, що утворюють сітку, є ізопериметричною екстремаллю повороту. При цьому для будь-яких двох різних ліній однієї сім'ї ізопериметрична стала є однаковою.*

Означення 3. *Тензор другої валентності, що визначається матрицею*

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{g} \\ -\sqrt{g} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де g — дискримінант метричного тензора поверхні, називається дискримінантним тензором поверхні [2, с. 162], який будемо позначати c_{ij} .

Даний тензор типу (2 0) породжує дискримінантні тензори інших типів (0 2) та (1 1) за формулами

$$c^{ij} = g^{i\alpha} g^{j\beta} c_{\alpha\beta}$$

та

$$c_i^j = g^{\alpha j} c_{i\alpha},$$

де g^{ij} — контраваріантні компоненти метричного тензора поверхні.

Нехай $\omega(x^1, x^2)$ — сітковий кут, що змінюється в межах $(0, \pi)$. Напрямні вектори однопараметричних сімей $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$ та $\bar{m}(\mu^1, \mu^2)$ — орти, що визначаються в дотичній площині, а в круглих дужках вказано їх відповідні координати.

Розглянемо контраваріантний тензор з матрицею компонент

$$\begin{pmatrix} \frac{2\lambda^1\mu^1}{\sin \omega} & \frac{\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1}{\sin \omega} \\ \frac{\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1}{\sin \omega} & \frac{2\lambda^2\mu^2}{\sin \omega} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Дискримінант матриці (3) дорівнює $-\frac{1}{g}$.

Для регулярної сітки зведені мінори матриці (3) утворюють симетричний тензор другої валентності $\overset{0}{\phi}_{ij}$ з компонентами

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\lambda^2\mu^2 g}{\sin \omega} & \frac{(\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1)g}{\sin \omega} \\ \frac{(\lambda^1\mu^2 + \lambda^2\mu^1)g}{\sin \omega} & -\frac{2\lambda^1\mu^1 g}{\sin \omega} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

В індексному позначенні, використовуючи дискримінантний тензор поверхні (2), маємо

$$\overset{0}{\phi}_{ij} = -\frac{c_{i\alpha} c_{j\beta} (\lambda^\alpha \mu^\beta + \lambda^\beta \mu^\alpha)}{\sin \omega}. \quad (5)$$

Тензор (5), уведений Я. С. Дубновим [3, с. 341], називається *нормованим тензором сітки* і відіграє ключову роль в теорії регулярних сіток. Тензор з матрицею компонент (3) — це

зведені мінори матриці (4). Будемо позначати його $\tilde{\phi}^{ij}$.

Означення 4. Вектор $\bar{\tau}(\tau_1, \tau_2)$ з компонентами

$$\tau_i = c^{\alpha\lambda} c^{\beta\mu} \overset{0}{\phi}_{i\alpha} \overset{0}{\phi}_{\lambda\mu\beta}$$

називається чебишовським вектором сітки [3, с. 356], де c^{ij} — дискримінантний тензор поверхні, $\overset{0}{\phi}_{ij}$ — нормований тензор сітки, комою позначено коваріантну похідну на базі метричного тензора поверхні.

Зауважимо, що в круглих дужках тут і далі наведено координати вектора в дотичній площині.

Теорема 1. Якщо регулярна сітка на поверхні ненульової гауссової (повної) кривини K є сіткою Лейко, то мають місце співвідношення

$$\bar{\tau}m = \bar{\Omega}l + \frac{2c_l K}{\sin \omega}, \quad (6)$$

$$\bar{\tau}l = \bar{\Omega}m - \frac{2c_m K}{\sin \omega}, \quad (7)$$

де $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$, $\bar{m}(\mu^1, \mu^2)$ — орти напрямних векторів двох однопараметричних сімей, що утворюють регулярну сітку, $\bar{\tau}(\tau_1, \tau_2)$ — чебишовський вектор сітки, $\omega = (\bar{l}, \bar{m})^\wedge$ — сітковий кут, $\bar{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2)$ — градієнт сітки, зв'язаний з сітковим кутом формулою

$$\Omega = \ln \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}, \quad (8)$$

c_l , c_m — ізопериметричні сталі сімей.

Доведення. Геодезична кривина лінії сітки визначається формулою [3, с. 339]

$$k_g(l) = c_{\alpha\beta} \lambda^{\alpha\gamma} \lambda^{\beta\gamma} \lambda^\gamma. \quad (9)$$

У формулі (9) враховано, що лінія входить до складу однопараметричної сім'ї з напрямним вектором $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$, $c_{\alpha\beta}$ — дискримінантний тензор поверхні.

Використовуючи формулу для скалярного добутку градієнта сіткового кута та напрямного вектора [2, с. 366]

$$\omega_i \lambda^i = c_{\alpha\beta} (\lambda^{\alpha\gamma} \lambda^{\beta\gamma} \lambda^\gamma + \mu^{\alpha\gamma} \mu^{\beta\gamma} \lambda^\gamma),$$

а також вираз для чебишовського вектора $\bar{\tau}(\tau_1, \tau_2)$ [3, с. 362]

$$\frac{1}{2} \tau_\alpha \mu^\alpha \sin \omega = -c_{\alpha\beta} \mu^{\alpha\gamma} \mu^{\beta\gamma} \lambda^\gamma,$$

маємо

$$k_g(l) = \frac{1}{2} \tau_\alpha \mu^\alpha \sin \omega - \omega_i \lambda^i.$$

Аналогічно для ліній другої однопараметричної сім'ї з напрямним вектором $\bar{m}(\mu^1, \mu^2)$

$$k_g(\mu) = -\frac{1}{2} \tau_\alpha \lambda^\alpha \sin \omega + \omega_i \mu^i.$$

Знак мінус з'явився тому, що сітковий кут $\omega = (\bar{l}, \bar{m})$ відкладається від вектора $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2)$ до вектора $\bar{m}(\mu^1, \mu^2)$. Оскільки дана регулярна сітка є сіткою Лейко, то будуть мати місце співвідношення

$$\omega_i \lambda^i = \frac{1}{2} \tau_\alpha \mu^\alpha \sin \omega - c_l K, \quad (10)$$

$$\omega_i \mu^i = \frac{1}{2} \tau_\alpha \lambda^\alpha \sin \omega + c_m K, \quad (11)$$

де c_l, c_m — ізопериметричні сталі сімей, K — гауссова (повна) кривина поверхні.

Якщо ввести до розгляду функцію (8) та врахувати, що

$$\frac{2\omega_i}{\sin \omega} = \Omega_i,$$

то співвідношення (10), (11) наберуть вигляду

$$\tau_\alpha \mu^\alpha = \Omega_\alpha \lambda^\alpha + \frac{2c_l K}{\sin \omega}, \quad (12)$$

$$\tau_\alpha \lambda^\alpha = \Omega_\alpha \mu^\alpha - \frac{2c_m K}{\sin \omega}. \quad (13)$$

Співвідношення (12), (13) і є (6), (7) в іншій формі.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Для того щоб регулярна сітка на поверхні ненульової гауссової (повної) кривини K була сіткою Лейко, необхідно і достатньо виконання умов

$$-\tau_j \cos \omega + \tilde{\phi}_j^\alpha \tau_\alpha \sin \omega = \Omega_j + \frac{2K}{\sin^2 \omega} c_{j\beta} (c_l \mu^\beta + c_m \lambda^\beta), \quad (14)$$

де $\bar{l}(\lambda^1, \lambda^2), \bar{m}(\mu^1, \mu^2)$ — орти напрямних векторів двох однопараметричних сімей, що утворюють регулярну сітку, $\bar{\tau}(\tau_1, \tau_2)$ — чебишовський вектор сітки, $\omega = (\bar{l}, \bar{m})$ — сітковий кут, $\bar{\Omega}(\Omega_1, \Omega_2)$ — градієнт сітки, зв'язаний з сітковим кутом формулою (8), $c_l,$

c_m — ізопериметричні сталі сімей, $c_{\alpha\beta}$ — дискримінантний тензор поверхні, $\tilde{\phi}_j^\alpha = c_{j\beta} c_{\rho\phi}^{\beta\tilde{\phi}^{\alpha\rho}}$, $\tilde{\phi}^{\alpha\rho}$ — зведені мінори нормованого тензора сітки.

Доведення. Из рівнянь (10), (11) маємо

$$\tau_\alpha(\mu^\alpha \mu^i - \lambda^\alpha \lambda^i) = \Omega_\alpha(\lambda^\alpha \mu^i - \lambda^i \mu^\alpha) + \frac{2K}{\sin \omega} (c_l \mu^i + c_m \lambda^i). \quad (15)$$

Из урахуванням співвідношення [3, с. 341]

$$\lambda^\alpha \mu^i - \lambda^i \mu^\alpha = c^{\alpha i} \sin \omega \quad (16)$$

(15) набирає вигляду

$$\tau_\alpha(\mu^\alpha \mu^i - \lambda^\alpha \lambda^i) = c^{\alpha i} \Omega_\alpha \sin \omega + \frac{2K}{\sin \omega} (c_l \mu^i + c_m \lambda^i). \quad (17)$$

Помноживши (17) на c_{ji} та згорнувши по i , матимемо

$$c_{j\beta} \tau_\alpha(\mu^\alpha \mu^\beta - \lambda^\alpha \lambda^\beta) = \Omega_j \sin \omega + \frac{2K}{\sin \omega} c_{j\beta} (c_l \mu^\beta + c_m \lambda^\beta).$$

Враховуючи співвідношення [3, с. 345]

$$\mu^i = \lambda^i \cos \omega + c_{\rho^j}^i \lambda^\rho \sin \omega,$$

$$\lambda^i = \mu^i \cos \omega - c_{\rho^j}^i \mu^\rho \sin \omega,$$

отримуємо

$$\begin{aligned} c_{j\beta} \tau_\alpha((\mu^\alpha \lambda^\beta - \lambda^\alpha \mu^\beta) \cos \omega + c_{\rho^j}^\beta (\mu^\alpha \lambda^\rho + \mu^\rho \lambda^\alpha) \sin \omega) = \\ = \Omega_j \sin \omega + \frac{2K}{\sin \omega} c_{j\beta} (c_l \mu^\beta + c_m \lambda^\beta). \end{aligned} \quad (18)$$

Використовуючи (16) та формулу [3, с. 341]

$$\mu^\alpha \lambda^\rho + \mu^\rho \lambda^\alpha = \tilde{\phi}^{\alpha\rho} \sin \omega,$$

(18) запишемо у вигляді

$$c_{j\beta} \tau_\alpha \left(c^{\alpha\beta} \sin \omega \cos \omega + c_{\rho\phi}^{\beta\tilde{\phi}^{\alpha\rho}} \sin^2 \omega \right) = \Omega_j \sin \omega + \frac{2K}{\sin \omega} c_{j\beta} (c_l \mu^\beta + c_m \lambda^\beta). \quad (19)$$

Розділивши (19) на $\sin \omega$, з урахуванням [3, с. 368] співвідношень

$$c_{j\beta} c^{\alpha\beta} \tau_\alpha = \tau_j,$$

$$c_{j\beta} c_{\rho}^{\beta} \tilde{\phi}^{\alpha\rho} \tau_\alpha = \tilde{\phi}_j^\alpha \tau_\alpha$$

отримаємо (14).

Теорему 2 доведено.

Означення 5. Вектор $\bar{P}(p^1, p^2)$ з компонентами

$$p^\beta = c_l \mu^\beta + c_m \lambda^\beta, \quad (20)$$

який повністю визначається ізопериметричними сталими c_l , c_m , назовемо вектором повороту сітки.

Нагадаємо [3, с. 369], що вектор з компонентами

$$\gamma_j = \dot{\phi}_j^\alpha \tau_\alpha - \dot{H} \tau_j - 2\dot{H}_j \quad (21)$$

називається вектором кривини сітки, де \dot{H} — перший інваріант нормованого тензора сітки $\overset{0}{\phi}_{ij}$, який означається [3, с. 342] формулою

$$2\dot{H} = \overset{0}{\phi}_{ij} g^{ij},$$

g^{ij} — контраваріантні компоненти метричного тензора поверхні.

Теорема 3. В кожній точці регулярної сітки поверхні ненульової гауссової (повної) кривини K прикладено два вектори з компонентами (20) та (21). Сітка Лейко характеризується тим, що ці вектори зв'язані між собою співвідношенням

$$\gamma_j = \frac{2K}{\sin^3 \omega} c_{j\beta} p^\beta, \quad (22)$$

де $\omega = (\bar{l}, \bar{m})$ — сітковий кут, $c_{j\beta}$ — дискримінантний тензор поверхні.

Доведення. Підставимо в (14) вирази [3, с. 369]

$$\tilde{\phi}_j^\alpha = \dot{\phi}_j^\alpha - 2\dot{H} \delta_j^\alpha,$$

$$\Omega_j = 2\dot{H}_j \sin \omega.$$

З урахуванням (20) отримаємо

$$-\tau_j \cos \omega + \dot{\phi}_j^\alpha \tau_\alpha \sin \omega - 2\dot{H} \tau_j \sin \omega = 2\dot{H}_j \sin \omega + \frac{2K}{\sin^2 \omega} c_{j\beta} p^\beta. \quad (23)$$

Оскільки [3, с. 344]

$$\dot{H} = -ctg\omega, \quad (24)$$

то (23) набирає вигляду

$$\dot{\phi}_j^\alpha \tau_\alpha \sin \omega - \dot{H} \tau_j \sin \omega = 2\dot{H}_j \sin \omega + \frac{2K}{\sin^2 \omega} c_{j\beta} p^\beta. \quad (25)$$

Після ділення (25) на $\sin \omega$ та переносу $2\dot{H}_j$ у праву частину з урахуванням (21) отримуємо (22).

Теорему 3 доведено.

Використавши (24), співвідношенню (22) з точністю до знаку можна надати вигляду

$$\gamma_j = 2K(1 + \dot{H}^2)^{\frac{3}{2}} c_{j\beta} p^\beta.$$

Розглянемо у тривимірному евклідовому просторі E_3 регулярну класу C^k , $k \geq 3$, поверхню S , гомеоморфну плоскій двовимірній однозв'язній області з векторно-параметричним рівнянням

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2),$$

та її інфінітезимальну регулярну класу C^k , $k \geq 3$, деформацію S_t :

$$\bar{r}_t = \bar{r}(x^1, x^2) + t \bar{y}(x^1, x^2), \quad (26)$$

де $\bar{y}(x^1, x^2)$ — вектор зміщення, який є регулярною класу C^k , $k \geq 3$, векторною функцією в даній області, t — малий параметр, та з'ясуємо умови збереження сітки Лейко при інфінітезимальних деформаціях поверхонь (26). Нижче ми будемо розглядати інфінітезимальні деформації першого порядку, а отже, членами порядку t^2 і вище будемо нехтувати.

Теорема 4. *Нехай на регулярній поверхні S в деякій її регулярній області існує сітка Лейко. Для того щоб в результаті інфінітезимальної деформації (26) ця сітка залишалась стаціонарною, достатньо виконання умов*

$$\delta \left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}}} \right) \Gamma_{11}^2 + \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} \delta \Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{2} c_l (K g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + c^{lj} c^{ik} \delta g_{il, jk}), \quad (27)$$

$$\delta \left(\sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \right) \Gamma_{22}^1 + \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \delta \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} c_m (K g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + c^{lj} c^{ik} \delta g_{il, jk}),$$

де K — гауссова (повна) кривина поверхні, c_l , c_m — ізопериметричні сталі сімей, c^{lj} — дискримінантний тензор поверхонь, δg_{ij} — варіація метричного тензора поверхні, $\delta \Gamma_{ij}^h$ —

варіація символів Крістоффеля другого роду, комою позначено коваріантну похідну на базі метричного тензора поверхні g_{ij} .

Доведення. Нехай k_{g1}^* , k_{g2}^* — геодезичні кривини однопараметричних сімей ліній, що утворюють сітку на zdeформованій поверхні. Оскільки в результаті інфінітезимальної деформації (26) сітка Лейко повинна залишитись стаціонарною, то повинні виконуватись умови

$$k_{g1}^* = c_l K^*,$$

$$k_{g2}^* = c_m K^*,$$

де K^* — гауссова кривина zdeформованої поверхні. Запишемо (28) у вигляді

$$k_{g1} + t \delta k_{g1} = c_l (K + t \delta K),$$

$$k_{g2} + t \delta k_{g2} = c_m (K + t \delta K).$$

Оскільки на даній поверхні вздовж кожної лінії будь-якої з двох однопараметричних сімей виконується співвідношення (1), то умови (29) рівносильні умовам

$$\delta k_{g1} = c_l \delta K,$$

$$\delta k_{g2} = c_m \delta K.$$

У (30) замість варіації δK підставимо вираз [1, с. 69]

$$\delta K = -\frac{1}{2} K g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} c^{lj} c^{ik} \delta g_{il,jk},$$

а замість δk_{g1} , δk_{g2} — вирази

$$\delta k_{g1} = \delta \left(\sqrt{\frac{g}{g_{11}^2}} \right) \Gamma_{11}^2 + \sqrt{\frac{g}{g_{11}^2}} \delta \Gamma_{11}^2,$$

$$\delta k_{g2} = -\delta \left(\sqrt{\frac{g}{g_{22}^2}} \right) \Gamma_{22}^1 - \sqrt{\frac{g}{g_{22}^2}} \delta \Gamma_{22}^1,$$

які мають місце, якщо до формул [2, с. 406]

$$k_{g1} = \sqrt{\frac{g}{g_{11}^2}} \Gamma_{11}^2,$$

$$k_{g2} = -\sqrt{\frac{g}{g_{22}^2}} \Gamma_{22}^1$$

застосувати лему [9, с. 524]. В результаті отримуємо (27).

Теорему 4 доведено.

Підсумовуючи викладене вище, робимо висновок, що на поверхнях ненульової гауссової (повної) кривини K існує відмінна за своїми властивостями від геодезичної сітки нова регулярна сітка, а саме, сітка Лейко, яка визначається цілком певно ізопериметричними сталими c_l , c_m . Очевидно, що її властивості не вичерпуються тими, що були розглянуті в даній статті.

1. *Безкоровайна Л. Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки. – Одеса: АстроПринт, 1999. – 168 с.
2. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1. – М.; Л.: ОГИЗ, 1947. – 512 с.
3. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 2. – М.; Л.: ОГИЗ, 1948. – 408 с.
4. *Лейко С. Г.* Теорема существования экстремалей поворота на поверхностях в E^3 и поворотные диффеоморфизмы // Всесоюзная школа. Оптимальное управление. Геометрия и анализ. – Кемерово, 1988. – С. 52.
5. *Лейко С. Г.* Вариационные задачи для функционалов поворота и спин-отображения псевдоримановых пространств // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 10. – С. 9 – 17.
6. *Лейко С. Г.* Поворотные диффеоморфизмы на поверхностях евклидова пространства // Мат. заметки. – 1990. – 47, № 3. – С. 52 – 57.
7. *Лейко С. Г.* Экстремали функционалов поворота кривых псевдориманова пространства и траектории спин-частиц в гравитационных полях // Докл. РАН. – 1992. – 325, № 4. – С. 659 – 664.
8. *Лейко С. Г.* Изопериметрические экстремали поворота на поверхностях в евклидовом пространстве E^3 // Изв. вузов. – 1996. – № 6. – С. 25 – 32.
9. *Потапенко І. В.* Про відновлення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією символів Крістоффеля другого роду при інфінітезимальних деформаціях поверхонь в евклідовому просторі E^3 // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, № 4. – С. 523 – 530.

Одержано 27.02.12