УДК 514

Л. А. Масальцев (Харьков. нац. ун-т)

ОБ ИЗОМЕТРИЧЕСКОМ ПОГРУЖЕНИИ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЙ $\widetilde{SL}_2$, *Nil*, *Sol* В ЧЕТЫРЕХМЕРНОЕ ПРОСТРАНСТВО ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

We prove the nonexistence of isometric immersion of geometries Nil^3, $\widetilde{SL}_2$ into the four-dimensional space M_c^4 of the constant curvature c. We establish that the geometry Sol^3 cannot be immersed into M_c^4 if $c \neq -1$ and find the analytic immersion of this geometry into the hyperbolic space $H^4(-1)$.

Доведено неіснування ізометричного занурення геометрій Nil^3, $\widetilde{SL}_2$ у чотиривимірний простір M_c^4 сталої кривини c. Встановлено, що геометрія Sol^3 не може бути занурена у M_c^4 при $c \neq -1$, і знайдено її аналітичне занурення в гіперболічний простір $H^4(-1)$.

В настоящей статье исследуется вопрос об изометрическом погружении трехмерных геометрий Терстона $\widetilde{SL}_2$, Nil, Sol [1, c. 112] в четырехмерное пространство M_c^4 постоянной секционной кривизны c. Аналитически задача сводится к исследованию разрешимости системы уравнений Гаусса и Кодацци в каждом из трех случаев, где метрический тензор g_{ij} и тензор Римана являются известными величинами, а шесть неизвестных компонент b_{ij} второго фундаментального тензора должны удовлетворять системе из шести уравнений Гаусса и восьми уравнений Кодацци. Поскольку система уравнений является переопределенной, естественно ожидать отрицательного ответа на вопрос о существовании локального изометрического погружения изучаемых римановых многообразий. Так в действительности и происходит для $\widetilde{SL}_2$ и Nil, но в случае с Sol неожиданно оказывается, что имеется погружение этого пространства в четырехмерное гиперболическое пространство H^4 постоянной отрицательной кривизны -1. Непогружаемость Nil в четырехмерное евклидово пространство была доказана в [2] другим способом. Отметим, что при вычислении компонент тензора Римана R_{ijkl} и символов Кристоффеля Γ^i_{jk} мы пользовались системой Maple.

1. Непогружаемость Nil^3 в M_c^4. Трехмерная геометрия Nil^3 представляет собой действительную группу Ли с законом умножения $(x, y, z)(x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + xy')$ с левоинвариантной римановой метрикой $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2$ [1, c. 123].

Теорема 1. *Не существует изометрического класса C^3 погружения произвольной области геометрии Nil в пространство постоянной кривизны M_c^4.*

Доказательство. Система уравнений Гаусса погружения Nil в M_c^4 имеет вид [3, c. 182]

$$R_{ijkl} = b_{ik}b_{jl} - b_{il}b_{jk} + c(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \tag{1}$$

Подставляя в (1) конкретные выражения компонент тензора Римана, вычисленные в Maple, получаем следующие шесть уравнений:

$$
\begin{aligned}
R_{1212} &= \frac{x^2-3}{4} = b_{11}b_{22}-b_{12}^2+c(1+x^2),\\
R_{1313} &= \frac{1}{4} = b_{11}b_{33}-b_{13}^2+c,\\
R_{2323} &= \frac{1}{4} = b_{22}b_{33}-b_{23}^2+c,\\
R_{1213} &= -\frac{x}{4} = b_{11}b_{23}-b_{13}b_{12}-cx,\\
R_{1223} &= 0 = b_{12}b_{23}-b_{13}b_{22},\\
R_{1323} &= 0 = b_{12}b_{33}-b_{13}b_{23}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Если умножить пятое уравнение системы (2) на b_{33}, а шестое уравнение на b_{23} и вычесть, то получим $b_{13}\left(b_{22}b_{33}-b_{23}^2\right) = 0$. Отсюда с учетом третьего уравнения, если $c \neq \frac{1}{4}$, имеем $b_{13} = 0$. Аналогично, умножая пятое уравнение на b_{23}, а шестое уравнение на b_{22} и вычитая, получаем $b_{12} = 0$. Теперь можно выразить из первого, второго и четвертого уравнений b_{22}, b_{33}, b_{23} через b_{11} и подставить в третье уравнение. В результате получим

$$
b_{11}^2 = \frac{c}{c-0,25}x^2 - c - 0,75, \qquad b_{22} = \left((0,25-c)x^2-c-0,75\right)b_{11}^{-1},
$$

$$
b_{33} = (0,25-c)b_{11}^{-1}, \qquad b_{23} = -(0,25-c)xb_{11}^{-1}.
$$

Далее используем уравнение Кодацци $b_{12,3} = b_{13,2}$, которое, поскольку ненулевые символы Кристоффеля есть

$$
\Gamma_{22}^1 = -x, \qquad \Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{13}^2 = \frac{1}{2}, \qquad \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{13}^3 = \frac{x}{2}, \qquad \Gamma_{12}^3 = \frac{x^2-1}{2},
$$

приводится к виду $b_{22}+2xb_{23}+(x^2-1)b_{33} = 0$. После подстановки в последнее уравнение b_{ik} получаем абсурдное тождество. Остается исследовать отдельно случай $c = \frac{1}{4}$. Тогда система (2) принимает вид

$$
\begin{aligned}
-1 &= b_{11}b_{22}-b_{12}^2, \qquad 0 = b_{11}b_{33}-b_{13}^2, \qquad 0 = b_{22}b_{33}-b_{23}^2,\\
0 &= b_{11}b_{23}-b_{13}b_{12}, \qquad 0 = b_{12}b_{23}-b_{13}b_{22}, \qquad 0 = b_{12}b_{33}-b_{13}b_{23}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Если умножить четвертое уравнение системы (3) на b_{12}, а пятое уравнение на b_{11} и вычесть, то получим $b_{13}\left(b_{12}^2-b_{11}b_{22}\right) = 0$, откуда с учетом первого уравнения находим $b_{13} = 0$. Умножая четвертое уравнение на b_{22}, пятое уравнение на b_{12} и вычитая, получаем $b_{23} = 0$. Далее легко находим $b_{33} = 0$. Используя уравнение Кодацци C_1) $b_{32,1} = b_{31,2}$, имеем $b_{22} = -b_{11}$. Рассмотрим теперь следующие уравнения Кодацци:

C_2) $b_{11,2} = b_{12,1}$, или $\dfrac{\partial b_{11}}{\partial y} = \dfrac{\partial b_{12}}{\partial x} + \dfrac{x}{2}b_{12}$,

C_3) $b_{22,1} = b_{21,2}$, или $-\dfrac{\partial b_{12}}{\partial y} = \dfrac{\partial b_{11}}{\partial x} + \dfrac{x}{2}b_{11}$.

Запишем их в следующем виде:

C$_2$) $\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2/4}b_{11}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2/4}b_{12}\right)$,

C$_3$) $\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2/4}b_{11}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2/4}b_{12}\right)$.

Следовательно, функции $U = e^{x^2/4}b_{12}$ и $V = e^{x^2/4}b_{11}$ являются действительной и мнимой частями некоторой аналитической функции $U + iV$ переменного $x + iy$. Но тогда уравнение Гаусса $1 = b_{11}^2 + b_{12}^2$ противоречит тому, что функция $\ln\left(U^2 + V^2\right)$ должна быть гармонической, что и завершает доказательство.

2. Непогружаемость $\widetilde{SL}_2$ в M_c^4. Трехмерная геометрия $\widetilde{SL}_2$ представляет собой универсальную накрывающую группы SL_2 с левоинвариантной метрикой. В [1, с. 114] указано, что $\widetilde{SL}_2$ можно представить как расслоение единичных векторов UH^2 в касательном расслоении над гиперболической плоскостью H^2. Пусть $H^2: (x, y),\ y > 0$ с метрикой $ds^2_{H^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Тогда UH^2 с координатами $x,\ y,\ t$ является подмногообразием в касательном расслоении над H^2 с метрикой $ds^2_{UH^2} = ds^2_{H^2} + \langle Dv, Dv\rangle_{H^2}$, где $v = (y\cos t, y\sin t)$ и $Dv^i = = dv^i + \Gamma^i_{jk}v^j dx^k$, $i = 1, 2$ (компоненты абсолютного дифференциала вектора v в метрике H^2). С учетом того, что $\Gamma^1_{12} = \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}$, $\Gamma^2_{11} = \frac{1}{y}$, получаем

$$ds^2_{UH^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + (dx + ydt)^2}{y^2}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Не существует изометрического класса C^3 погружения произвольной области геометрии $\widetilde{SL}_2$ в пространство постоянной кривизны M_c^4.*

Доказательство. Запишем систему уравнений Гаусса погружения метрики (4) в M_c^4:

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= -\frac{3}{2y^4} = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 + \frac{2c}{y^4},\\
R_{1313} &= \frac{1}{4y^2} = b_{11}b_{33} - b_{13}^2 + \frac{c}{y^2},\\
R_{2323} &= \frac{1}{4y^2} = b_{22}b_{33} - b_{23}^2 + \frac{c}{y^2},\\
R_{1223} &= -\frac{1}{4y^3} = b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22} - \frac{c}{y^3},\\
R_{1332} &= 0 = b_{13}b_{32} - b_{12}b_{33},\\
R_{2113} &= 0 = b_{21}b_{13} - b_{23}b_{11}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим сначала случай $c \neq \frac{1}{4}$. Как и в случае системы (2), получим $b_{12} = b_{32} = 0$. Затем можно найти остальные неизвестные:

$$b_{11} = \frac{-1{,}5 - 2c}{y^4 b_{22}}, \qquad b_{33} = \frac{0{,}25 - c}{y^2 b_{22}}, \qquad b_{13} = \frac{0{,}25 - c}{y^3 b_{22}}, \qquad b_{22} = \frac{\sqrt{-1{,}75 - c}}{y^2}.$$

Теперь, используя уравнение Кодацци $b_{12,3} = b_{13,2}$ и учитывая следующие значения символов Кристоффеля метрики (4):

$$\Gamma^1_{12} = -\frac{3}{2y}, \qquad \Gamma^1_{23} = -\Gamma^2_{13} = -\frac{1}{2}, \qquad \Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y},$$

$$\Gamma^2_{11} = \frac{2}{y}, \qquad \Gamma^3_{12} = \frac{1}{y^2}, \qquad \Gamma^3_{23} = \frac{1}{2y},$$

получаем абсурдное тождество.

Исследуем случай $c = \frac{1}{4}$. Система уравнений Гаусса (5) принимает вид

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -\frac{2}{y^4}, \qquad b_{11}b_{33} - b_{13}^2 = 0,$$

$$b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0, \qquad b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22} = 0,$$

$$b_{13}b_{32} - b_{12}b_{33} = 0, \qquad b_{21}b_{13} - b_{23}b_{11} = 0.$$

Умножая четвертое уравнение последней системы на b_{11}, а шестое уравнение на b_{12} и складывая, с учетом первого уравнения получаем $b_{13} = 0$. Умножая четвертое уравнение на b_{12}, шестое уравнение на b_{22} и складывая, имеем $b_{23} = 0$. Затем из первого, второго, третьего и пятого уравнений следует $b_{33} = 0$, и остается одно уравнение Гаусса $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = -\frac{2}{y^4}$ и три неизвестные функции b_{11}, b_{12}, b_{22} переменных x, y, z, которые должны еще удовлетворять шести уравнениям Кодацци следующего вида:

C_1) $b_{12,3} = b_{13,2}$, или $\dfrac{\partial b_{12}}{\partial z} - \dfrac{1}{2}b_{22} = 0$,

C_2) $b_{21,3} = b_{23,1}$, или $\dfrac{\partial b_{12}}{\partial z} + \dfrac{1}{2}b_{11} = 0$,

C_3) $b_{11,2} = b_{12,1}$, или $\dfrac{\partial b_{11}}{\partial y} + \dfrac{3b_{11}}{2y} = \dfrac{\partial b_{12}}{\partial x} - \dfrac{2b_{22}}{y}$,

C_4) $b_{11,3} = b_{13,1}$, или $\dfrac{\partial b_{11}}{\partial z} - \dfrac{1}{2}b_{21} = 0$,

C_5) $b_{22,1} = b_{21,2}$, или $\dfrac{\partial b_{22}}{\partial x} + \dfrac{1}{2y}b_{12} = \dfrac{\partial b_{12}}{\partial y}$,

C_6) $b_{22,3} = b_{23,2}$, или $\dfrac{\partial b_{22}}{\partial z} + \dfrac{1}{2}b_{21} = 0$.

Уравнения C_7) $b_{33,1} = b_{13,3}$ и C_8) $b_{33,2} = b_{32,3}$ удовлетворены тождественно. Сравнивая уравнения C_1) и C_2), находим $b_{22} = -b_{11}$, и тогда уравнения C_4) и C_6) равносильны. Затем уравнения C_3) и C_5) можно переписать в следующем виде:

$$C_3)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_{11}}{\sqrt{y}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_{12}}{\sqrt{y}}\right), \qquad C_5)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_{12}}{\sqrt{y}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_{11}}{\sqrt{y}}\right).$$

Отсюда видно, что функции $U = \frac{b_{12}}{\sqrt{y}}$ и $V = \frac{b_{11}}{\sqrt{y}}$ должны представлять собой действительную и мнимую части некоторой аналитической функции переменного $x + iy$, причем из уравнения Гаусса следует $U^2 + V^2 = \frac{2}{y^5}$. Однако тогда функция $\ln\left(U^2 + V^2\right)$ не будет гармонической, что и завершает доказательство теоремы 2.

3. Изометрическое погружение Sol^3 в M_c^4. Трехмерная геометрия Sol представляет собой группу Ли с законом умножения

$$(x, y, z)(x', y', z') = (x + e^{-z}x', y + e^{z}y', z + z')$$

и с левоинвариантной метрикой $ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2$ [1, с. 127].

Теорема 3. 1. *Не существует изометрического класса C^3 погружения произвольной области геометрии Sol^3 в пространство постоянной кривизны M_c^4 при $c \neq -1$.*

2. *Существует изометрическое аналитическое погружение геометрии Sol^3 в гиперболическое пространство $H^4(-1)$, например*

$$\begin{pmatrix} x_0 = \sqrt{2}\cosh(z + z_0) \\ x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(z+z_0)} \cos\sqrt{2}\,x \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(z+z_0)} \sin\sqrt{2}\,x \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(-z-z_0)} \cos\sqrt{2}\,y \\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{(-z-z_0)} \sin\sqrt{2}\,y \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$H^4(-1) = \left((x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)\,\middle|\, -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = -1,\ x_0 > 0\right)$$

— верхняя пола гиперболоида в псевдоевклидовом пространстве $R^{4,1}$ с метрикой $ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$, $z_0 \in R$ — произвольная постоянная.

Доказательство. Система уравнений Гаусса погружения Sol^3 в M_c^4 имеет вид

$$\begin{aligned} R_{1212} &= 1 = b_{11}b_{22} - b_{12}^2 + c, \\ R_{1313} &= -e^{2z} = b_{11}b_{33} - b_{13}^2 + ce^{2z}, \\ R_{2323} &= -e^{-2z} = b_{22}b_{33} - b_{23}^2 - ce^{-2z}, \\ R_{1223} &= 0 = b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$R_{1332} = 0 = b_{13}b_{32} - b_{12}b_{33},$$

$$R_{2113} = 0 = b_{21}b_{13} - b_{23}b_{11}.$$

Так же, как и при решении системы (2), легко получить, что при $c \neq -1$ $b_{12} = b_{13} = b_{23} = 0$. Затем находим остальные коэффициенты второй фундаментальной формы:

$$b_{11} = \sqrt{1-c}\, e^{2z}, \qquad b_{22} = \sqrt{1-c}\, e^{-2z}, \qquad b_{33} = \frac{|1+c|}{\sqrt{1-c}}.$$

С помощью уравнения Кодацци $b_{11,3} = b_{13,1}$ легко прийти к противоречию и, следовательно, при $c \neq -1$ не существует изометрического погружения Sol^3 в M_c^4. В случае, когда $c = -1$, система (7) принимает вид

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 2, \qquad b_{11}b_{33} - b_{13}^2 = 0,$$

$$b_{22}b_{33} - b_{23}^2 = 0, \qquad b_{12}b_{23} - b_{13}b_{22} = 0,$$

$$b_{13}b_{32} - b_{12}b_{33} = 0, \qquad b_{21}b_{13} - b_{23}b_{11} = 0.$$

Из четвертого и шестого уравнений последней системы с учетом первого уравнения следует $b_{13} = b_{23} = 0$. Затем из первого, второго, третьего и пятого уравнений находим $b_{33} = 0$. Рассматривая систему уравнений Кодацци, убеждаемся, что $b_{12} = 0$, $b_{11} = c_1 e^z$, $b_{22} = \dfrac{2}{c_1} e^{-z}$ (где c_1 — произвольная постоянная) удовлетворяют всем им. Тогда, согласно известной теореме Бонне, существует изометрическое погружение Sol^3 в $H^4(-1)$. После этого нетрудно найти изометрическое погружение (6), приведенное в формулировке теоремы.

В заключение отметим, что в обзоре А. А. Борисенко [4] достаточно полно освещены вопросы изометрического погружения пространственных форм в пространства постоянной кривизны, но пока мало исследованы задачи погружения трех- и четырехмерных геометрических структур в смысле Терстона в пространства постоянной кривизны.

1. *Скотт П.* Геометрии на трехмерных многообразиях. – М.: Мир, 1986. – 163 с.
2. *Rivertz H. J.* An obstruction to isometric immersion of the threedimensional Heisenberg group into R^4 // Prepr. Ser. Pure Math. – 1999. – № 22.
3. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 316 с.
4. *Борисенко А. А.* Изометрические погружения пространственных форм в римановы и псевдоримановы пространства постоянной кривизны // Успехи мат. наук. – 2001. – **56**, вып. 3. – С. 3–78.

Получено 01.12. 2003