УДК 517.925

В. М. Евтухов, В. А. Касьянова (Одес. нац. ун-т)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА. I

We establish asymptotic representations for a class of unbounded solutions of second order differential equations whose right-hand sides contain the sum of terms with nonlinearities of more general form than nonlinearities of Emden – Fowler type.

Встановлюються асимптотичні зображення для одного класу необмежених розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять у правій частині суму доданків із нелінійностями більш загального вигляду, ніж нелінійності типу Емдена – Фаулера.

Исследования асимптотического поведения решений обобщенного уравнения Эмдена – Фаулера (см. [1, с. 326 – 402] (гл. V) и [2 – 8]), а также дифференциальных уравнений первого порядка, содержащих в правой части сумму слагаемых со степенными нелинейностями (см. [9, с. 113 – 127] (гл. 5) и [10, 11]), явились важной предпосылкой для разработки в [1, 12 – 15] методов установления асимптотики правильных неколеблющихся решений обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков с нелинейностями типа Эмдена – Фаулера вида

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} p_k(t)|y|^{\sigma_{0k}}|y'|^{\sigma_{1k}}\dots\left|y^{(n-1)}\right|^{\sigma_{n-1k}},$$

где $m \ge 1$, $\sigma_{mk} \in \mathbb{R}$, $m = 0, \dots, n-1$; $k = 1, \dots, m$, $p_k\colon [a, \omega[\, \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $k = 1, \dots, m$, — непрерывные функции, $-\infty < a < \omega \le +\infty$.

Вопрос об асимптотике решений дифференциальных уравнений с нелинейностями более общего вида в целом остается открытым даже для двучленных уравнений

$$y^{(n)} = p(t)\varphi(y).$$

При $n = 2$ такие уравнения исследовались в работах [16, 17] и некоторых других.

В настоящей статье рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(y), \tag{0.1}$$

где $\alpha_k \in \{-1; 1\}$, $k = 1, \dots, m$, $p_k\colon [a, \omega[\, \to \,]0, +\infty[$, $k = 1, \dots, m$, — непрерывно дифференцируемые функции, $r_k\colon [a, \omega[\, \to \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$, — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t\uparrow\omega} r_k(t) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{0.2}$$

$-\infty < a < \omega \le +\infty$, а $\varphi_k\colon [y_0, \omega[\, \to \,]0, +\infty[$, $k = 1, \dots, m$, $0 < y_0 < +\infty$, — дважды непрерывно дифференцируемые функции такие, что

$$\lim_{y\to+\infty} \varphi_k(y) = \varphi_k^0 = \text{const} \ne 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \dots, m_1, \tag{0.3}$$

$$\lim_{y\to+\infty} \varphi_k(y) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty \end{cases} \quad \text{при} \quad k = m_1 + 1, \dots, m^1, \tag{0.4}$$

причем

$$\varphi_k'(y) \ne 0 \quad \text{при} \quad y \ge y_0 \quad \text{и} \quad \lim_{y\to+\infty} \frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k'(y)} = \sigma_k = \text{const}, \tag{0.5}$$

если $k \in \{1, \dots, m\}$ и отлично от тех $k \in \{1, \dots, m_1\}$, для которых $\varphi_k(y) \equiv \equiv \varphi_k^0$.

Положим

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \omega = +\infty, \\ t-\omega, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}$$

и введем следующее определение.

Решение $y: [t_0, \omega[\to [y_0, +\infty[$, $t_0 \in [a, \omega[$, уравнения (0.1) будем называть $\Pi_\omega(\mu_0)$-решением, где $-\infty \le \mu_0 \le +\infty$, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y(t) = +\infty$;

2) $y'(t) > 0$ при $t \in [t_0, \omega[$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty; \end{cases}$

3) $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0$, причем $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2} = 1$, если $\mu_0 = \pm\infty$.

***Замечание* 0.1.** Нетрудно убедиться в том, что если $\mu_0 = \pm\infty$ и существует конечный или равный $\pm\infty$ $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{y''(t)y(t)}{[y'(t)]^2}$, то значением этого предела может быть только 1.

1. Априорные асимптотические свойства $\Pi_\omega(\mu_0)$-решений.

Лемма 1.1. *Пусть* $y: [t_0, \omega[\to [y_0, +\infty[$ — $\Pi_\omega(\mu_0)$-*решение уравнения* (0.1). *Тогда*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \mu_0 + 1 \quad \textit{при} \quad |\mu_0| < +\infty \tag{1.1}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \pm\infty \quad \textit{при} \quad \mu_0 = \pm\infty. \tag{1.2}$$

Более того, если $|\mu_0| < +\infty$, *то выполняется неравенство* $(\mu_0 + 1)\pi_\omega(t) \ge 0$ *при* $t \in [a, \omega[$[2], *а если* $\mu_0 = +\infty$ $(\mu_0 = -\infty)$, *то* $\omega = +\infty$ $(\omega < +\infty)$.

Доказательство. В силу правила Лопиталя в форме Штольца (см. [18, с. 115]) и определения $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y'(t)}{y(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t) + y'(t)}{y'(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} + 1 = \begin{cases} \mu_0 + 1, & \text{если } |\mu_0| < +\infty, \\ \pm\infty, & \text{если } \mu_0 = \pm\infty. \end{cases}$$

---

[1] Здесь и ниже считаем, что $m_1 = 0$ $(m_1 = m)$, если выполняется только условие (0.4) (только условие (0.3)).

[2] При $\omega = +\infty$ считаем, что $a > 0$.

Справедливость второго утверждения леммы непосредственно следует из (1.1) и (1.2), если дополнительно учесть знаковые условия из определения $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения и вид функции $\pi_\omega(t)$.

Для установления наиболее важных для дальнейшего асимптотических свойств $\Pi_\omega(\mu_0)$-решений уравнения (0.1) нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1.2. *Если* $m_1 < m$ *и* $k \in \{m_1 + 1, \ldots, m\}$, *то*

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y\varphi_k'(y)}{\varphi_k(y)} = 1 + \sigma_k. \tag{1.3}$$

Если же $m_1 \geq 1$, $k \in \{1, \ldots, m_1\}$ *и отлично от тех, для которых* $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0$, *то*

$$\sigma_k \leq -1 \quad \text{и} \quad \lim_{y \to +\infty} \frac{y\varphi_k'(y)}{\varphi_k(y)} = 0. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $k \in \{1, \ldots, m\}$ и отлично от тех $k \in \{1, \ldots, m_1\}$, для которых $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0$. В этом случае выполняются условия (0.5).

Полагая

$$z_k(y) = \frac{y\varphi_k'(y)}{\varphi_k(y)},$$

замечаем, что

$$z_k'(y) = \frac{1}{y} z_k(y) \left[1 + \frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k(y)} - z_k(y) \right]. \tag{1.5}$$

В силу (0.5) соответствующая (1.5) функция $f(y, c) = \frac{1}{y} c \left[1 + \frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k(y)} - c \right]$ при любом значении c, отличном от 0 и $1 + \sigma_k$, сохраняет знак в некоторой окрестности $+\infty$. Поэтому для функции z_k существует конечный или равный $\pm\infty$ предел при $y \to +\infty$. Если бы этот предел был равен $\pm\infty$, то из (1.5) следовало бы, что

$$\frac{z_k'(y)}{z_k^2(y)} = -\frac{1}{y}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to +\infty.$$

Отсюда в результате интегрирования получили бы асимптотическое соотношение

$$\frac{1}{z_k(y)} \sim \ln y \quad \text{при} \quad y \to +\infty,$$

в котором выражение, стоящее слева, стремится к нулю, а стоящее справа — к $+\infty$ при $y \to +\infty$, что невозможно. Следовательно, $\lim_{y \to +\infty} z_k(y) = c = \text{const}$. Далее, покажем, что возможными значениями c могут быть лишь либо 0, либо $1 + \sigma_k$. Действительно, если бы это было не так, то из (1.5) с учетом (0.5) имели бы

$$z_k'(y) = \frac{c}{y}[1 + \sigma_k - c + o(1)] \quad \text{при} \quad y \to +\infty,$$

откуда следовало бы асимптотическое соотношение

$$z_k(y) = c[1 + \sigma_k - c + o(1)] \ln y \quad \text{при} \quad y \to +\infty,$$

которое противоречит условию $\lim\limits_{y\to+\infty} z_k(y) = \text{const}$. Значит,

$$\lim_{y\to+\infty} z_k(y) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } 1+\sigma_k. \end{cases} \tag{1.6}$$

Отсюда, в частности, ясно, что при $\sigma_k = -1$ утверждения леммы справедливы.

Пусть $\sigma_k \neq -1$. Тогда если $k \in \{m_1+1, \ldots, m\}$ (случай $m_1 < m$), то в силу условий (0.4), (0.5) и (1.6) для вычисления $\lim\limits_{y\to+\infty} z_k(y)$ применимо правило Лопиталя в форме Штольца. Поэтому получим

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{y\varphi_k'(y)}{\varphi_k(y)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\varphi_k'(y) + y\varphi_k''(y)}{\varphi_k'(y)} = 1 + \lim_{y\to+\infty} \frac{y\varphi_k''(y)}{\varphi_k'(y)} = 1 + \sigma_k.$$

Тем самым установлена справедливость первого утверждения леммы.

Если же $k \in \{1, \ldots, m_1\}$ (случай $m_1 \geq 1$) и отлично от тех значений, для которых $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0$, то $\lim\limits_{y\to+\infty} z_k(y) = 0$, поскольку в противном случае в силу (1.6) и (0.3) получили бы асимптотическое соотношение

$$y\varphi_k'(y) \sim (1+\sigma_k)\varphi_k^0 \neq 0 \quad \text{при} \quad y \to +\infty,$$

откуда следовало бы, что $\lim\limits_{y\to+\infty} \varphi_k(y) = \pm\infty$, но это противоречит (0.3). Таким образом, выполняется второе из условий (1.4). С учетом этого условия из (1.5) имеем

$$\frac{z_k'(y)}{z_k(y)} \sim \frac{1+\sigma_k}{y} \quad \text{при} \quad y \to +\infty.$$

Отсюда получаем асимптотическое соотношение

$$\ln|z_k(y)| \sim (1+\sigma_k)\ln y \quad \text{при} \quad y \to +\infty,$$

которое не противоречит условию $\lim\limits_{y\to+\infty} z_k(y) = 0$ лишь в случае, когда выполняется неравенство $\sigma_k < -1$.

Лемма доказана.

Лемма 1.3. *Пусть* $|\mu_0| < +\infty$, $m_1 \geq 1$ *и для некоторого* $i \in \{1, \ldots, m_1\}$ *выполняются условия*

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)}{p_i(t)} = 0 \quad \textit{при} \quad j = 1, \ldots, m_1 \quad (j \neq i), \tag{1.7}$$

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} \right] < -|1+\mu_0|(1+\sigma_j) \quad \textit{при} \quad j = m_1+1, \ldots, m, \tag{1.8}$$

если $m_1 < m$. *Тогда для каждого* $\Pi_\omega(\mu_0)$*-решения уравнения* (0.1)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)\varphi_i(y(t))} = 0 \quad \textit{при любом} \quad j \in \{1, \ldots, m\}, \quad \textit{отличном от} \ i. \tag{1.9}$$

Доказательство. Пусть $y: [t_0, \omega[\to [y_0, +\infty[$ — произвольное $\Pi_\omega(\mu_0)$-решение уравнения (0.1). Тогда в силу условия 1 определения этого решения, (0.3) и (1.7) очевидно, что (1.9) выполняется для любого $j \in \{1, \ldots, m_1\}$, отличного от i.

Допустим теперь, что $j \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$ (если $m_1 < m$), и положим

$$z_j(t) = \frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)}.$$

Вычисляя производную этой функции, получаем

$$z_j'(t) = \frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)}\left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} + \frac{\varphi_j'(y(t))y'(t)}{\varphi_j(y(t))}\right],$$

или

$$z_j'(t) = \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} + \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)}\frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))}\right]. \quad (1.10)$$

Здесь согласно леммам 1.1 и 1.2

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)}\frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))} = \left|1 + \mu_0\right|(1 + \sigma_j).$$

Поэтому в силу условий (1.8) существуют числа $\gamma_j < 0$ и $t_j \in [t_0, \omega[$ такие, что

$$\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} + \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)}\frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))} < \gamma_j \quad \text{при} \quad t \in [t_j, \omega[.$$

Ввиду этого неравенства из (1.10) получаем

$$z_j'(t) \le \frac{\gamma_j z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|} \quad \text{при} \quad t \in [t_j, \omega[. \quad (1.11)$$

Отсюда следует, что

$$\ln z_j(t) \le C + (\gamma_j \operatorname{sign} \pi_\omega(t)) \ln\left|\pi_\omega(t)\right| \quad \text{при} \quad t \in [t_j, \omega[,$$

где C — некоторая вещественная постоянная. Выражение, стоящее в правой части этого неравенства, в силу условия $\gamma_j < 0$ и вида функции $\pi_\omega(t)$ стремится к $-\infty$ при $t \uparrow \omega$. Поэтому $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z_j(t) = 0$. Если же в дополнение к этому учесть (0.3) при $k = i$, то получим (1.9).

Лемма 1.4. *Пусть* $\left|\mu_0\right| < +\infty$, $m_1 < m$ *и для некоторого* $i \in \{m_1 + 1, \dots$ $\dots, m\}$ *выполняются условия*

$$\limsup_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|\left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] <$$

$$< \left|1 + \mu_0\right|(1 + \sigma_i) \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, m_1 \quad (\text{если } m_1 \ge 1), \quad (1.12)$$

$$\limsup_{t\uparrow\omega}|\pi_\omega(t)|\left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] <$$

$$< \left|1 + \mu_0\right|(\sigma_i - \sigma_j) \quad \text{при} \quad j = m_1 + 1, \dots, m \quad (j \ne i). \quad (1.13)$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(\mu_0)$*-решения уравнения* (0.1) *имеют место предельные соотношения* (1.9).

Доказательство. Пусть $y: [t_0, \omega[\to [y_0, +\infty[$ — произвольное $\Pi_\omega(\mu_0)$-решение уравнения (0.1). Выбрав произвольным образом $j \in \{1, \dots, m_1\}$ (если $m_1 \ge 1$), рассмотрим функцию

$$z_j(t) = \frac{p_j(t)}{p_i(t)\varphi_i(y(t))}.$$

Для нее имеем

$$z_j'(t) = \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)}\frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))}\right]. \quad (1.14)$$

В силу определения $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения, лемм 1.1, 1.2 и условия (1.12) существуют числа $\gamma_j < 0$ и $t_j \in [t_0, \omega[$ такие, что

$$\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)}\frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))} < \gamma_j \quad \text{при} \quad t \in [t_j, \omega[.$$

Поэтому из (1.14) получаем неравенство (1.11). Из этого неравенства, как было показано при доказательстве леммы 1.3, следует, что $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z_j(t) = 0$. Учитывая этот факт и условия (0.3), приходим к выводу о справедливости предельного соотношения (1.9) при $j \in \{1, \dots, m_1\}$.

Теперь выберем произвольным образом число $j \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$, отличное от i (если такое существует), и введем функцию

$$z_j(t) = \frac{p_j(t)\varphi_j(y(t))}{p_i(t)\varphi_i(y(t))}.$$

Для этой функции

$$z_j'(t) =$$

$$= \frac{z_j(t)}{|\pi_\omega(t)|}\left[\frac{|\pi_\omega(t)|p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{|\pi_\omega(t)|p_i'(t)}{p_i(t)} + \frac{|\pi_\omega(t)|y'(t)}{y(t)}\left(\frac{y(t)\varphi_j'(y(t))}{\varphi_j(y(t))} - \frac{y(t)\varphi_i'(y(t))}{\varphi_i(y(t))}\right)\right].$$

Отсюда с учетом определения $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения, лемм 1.1, 1.2 и условия (1.13) следует существование чисел $\gamma_j < 0$ и $t_j \in [t_0, \omega[$ таких, что выполняется неравенство (1.11), которое, в свою очередь, влечет, как было показано при доказательстве леммы 1.3, выполнение условия $\lim\limits_{t\uparrow\omega} z_j(t) = 0$. Следовательно, при $j \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$ предельное соотношение (1.9) также справедливо.

Лемма доказана.

Аналогичным образом с использованием лемм 1.1 и 1.2 устанавливаются следующие утверждения.

Лемма 1.5. *Пусть* $m_1 \geq 1$ *и для некоторого* $i \in \{1, \dots, m_1\}$ *выполняются условия* (1.7),

$$\sigma_j < -1 \quad \text{и} \quad \limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)|\left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)}\right] < +\infty$$

$$\text{при} \quad j = m_1 + 1, \dots, m, \quad (1.15)$$

если $m_1 < m$. *Тогда для каждого* $\Pi_\omega(\pm\infty)$*-решения уравнения* (0.1) *имеют место предельные соотношения* (1.9).

Лемма 1.6. *Пусть* $m_1 < m$ *и для некоторого* $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$ *выполняются неравенства* $\sigma_i > -1$,

$$\sigma_j < \sigma_i \quad \text{при} \quad j = m_1 + 1, \dots, m, \quad (1.16)$$

а также условия

$$\limsup_{t\uparrow\omega} |\pi_\omega(t)| \left[\frac{p_j'(t)}{p_j(t)} - \frac{p_i'(t)}{p_i(t)} \right] < +\infty \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, m \quad (j \neq i). \tag{1.17}$$

Тогда для каждого $\Pi_\omega(\pm\infty)$*-решения уравнения* (0.1) *имеют место предельные соотношения* (1.9).

2. Основные результаты. Для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ положим

$$I_{i1}(t) = \int_{A_{i1}}^{t} p_i(s)\,ds, \qquad Q_{i1}(t) = \int_{a}^{t} I_{i1}(s)\,ds, \qquad I_{i2}(t) = \int_{A_{i2}}^{t} \pi_\omega(s) p_i(s)\,ds,$$

где

$$A_{i1} = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega p_i(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega p_i(s)\,ds < +\infty, \end{cases}$$

$$A_{i2} = \begin{cases} a, & \text{если } \int_a^\omega |\pi_\omega(s)| p_i(s)\,ds = +\infty, \\ \omega, & \text{если } \int_a^\omega |\pi_\omega(s)| p_i(s)\,ds < +\infty. \end{cases}$$

Кроме того, при $m_1 < m$ введем для каждого $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$ функцию

$$\Phi_i(y) = \int_{B_i}^{y} \frac{dz}{\varphi_i(z)}, \quad \text{где} \quad B_i = \begin{cases} y_0, & \text{если } \int_{y_0}^{+\infty} \frac{dz}{\varphi_i(z)} = +\infty, \\ +\infty, & \text{если } \int_{y_0}^{+\infty} \frac{dz}{\varphi_i(z)} < +\infty. \end{cases}$$

При этом с учетом леммы 1.2 заметим, что при $\sigma_i > 0$ предел интегрирования $B_i = +\infty$, а при $\sigma_i < 0$ — $B_i = y_0$. Кроме того, для функции Φ_i существует обратная функция Φ_i^{-1}, заданная на промежутке $[0, +\infty[$, если $B_i = y_0$, или на промежутке $[b_i, 0[$, где $b_i = -\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dz}{\varphi_i(z)}$, если $B_i = +\infty$, причем для них

$$\begin{gathered} \lim_{y\to+\infty} \Phi_i(y) = +\infty, \qquad \lim_{z\to+\infty} \Phi_i^{-1}(z) = +\infty \quad \text{при} \quad B_i = y_0, \\ \lim_{y\to+\infty} \Phi_i(y) = 0, \qquad \lim_{z\uparrow 0} \Phi_i^{-1}(z) = +\infty \quad \text{при} \quad B_i = +\infty. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $|\mu_0| < +\infty$, $m_1 \geq 1$ *и для некоторого* $i \in \{1, \dots, m_1\}$ *выполняются условия* (1.7), (1.8). *Тогда для существования у уравнения* (0.1) $\Pi_\omega(\mu_0)$*-решений необходимо и достаточно, чтобы*

$$(\mu_0 + 1)\pi_\omega(t) \geq 0, \qquad \alpha_i I_{i1}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[\tag{2.2}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)} = \mu_0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} Q_{i1}(t) = \pm\infty, \tag{2.3}$$

причем для каждого из них имеют место асимптотические представления

$$y(t) = \alpha_0 \varphi_i^0 Q_{i1}(t)[1+o(1)], \quad y'(t) = \alpha_i \varphi_i^0 I_{i1}(t)[1+o(1)] \quad \textit{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.4}$$

Более того, при выполнении условий (2.2), (2.3) *уравнение* (0.1) *имеет однопараметрическое семейство таких решений в случае* $A_{i1} = \omega$ *и двупараметрическое — в случае* $A_{i1} = a$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to [y_0, +\infty[$ — произвольное $\Pi_\omega(\mu_0)$-решение уравнения (0.1). Тогда согласно лемме 1.1 выполняется первое из неравенств (2.2). Кроме того, в силу условий (1.7) и (1.8) из леммы 1.3 следует, что для данного решения имеют место предельные соотношения (1.9). С учетом этих соотношений из (0.1) получаем

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поскольку здесь $i \in \{1, \ldots, m_1\}$, ввиду (0.3) имеем

$$y''(t) = \alpha_i \varphi_i^0 p_i(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.5}$$

Отсюда с учетом условий 1 и 2 определения $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения следует, что

$$y'(t) \sim \alpha_0 \varphi_i^0 \int_{A_{i1}}^{t} p_i(s)\,ds, \quad y(t) \sim \alpha_0 \varphi_i^0 \int_a^t \int_{A_{i1}}^{\tau} p_i(s)\,ds\,d\tau \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega$$

(т. е. имеют место асимптотические представления (2.4)), выполняются второе из неравенств (2.2) и второе из предельных соотношений (2.3). Справедливость первого из предельных соотношений (2.3) следует из (2.5) и первого из полученных выше асимптотических представлений, если принять во внимание условие 3 определения $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения.

Достаточность. Применяя к уравнению (0.1) преобразование

$$y(t) = \alpha_i \varphi_i^0 Q_{i1}(t)[1+v_1(t)], \quad y'(t) = \alpha_i \varphi_i^0 I_{i1}(t)[1+v_2(t)], \tag{2.6}$$

получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} v_1' = \frac{Q_{i1}'(t)}{Q_{i1}(t)}[v_2 - v_1], \\ v_2' = \frac{I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)}\left[-1 - v_2 + \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]}{\alpha_i \varphi_i^0 p_i(t)} \varphi_k\Big(\alpha_i \varphi_i^0 Q_{i1}(t)[1+v_1]\Big)\right]. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Эту систему рассмотрим на множестве $\Omega = [t_1, \omega[\times D$, где

$$D = \left\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |v_k| \le \frac{1}{2}, \ k = 1, 2\right\},$$

а число $t_1 \in [a, \omega[$ выбрано с учетом вторых условий из (2.2) и (2.3) так, чтобы при $t \in [t_1, \omega[$ выполнялось неравенство $\alpha_i \varphi_i^0 Q_{i1}(t) > 2y_0$.

Поскольку для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\frac{\partial \varphi_k\Big(\alpha_i \varphi_i^0 Q_{i1}(t)[1+v_1]\Big)}{\partial v_1} = \alpha_i \varphi_i^0 Q_{i1}(t) \varphi_k'\Big(\alpha_i \varphi_i^0 Q_{i1}(t)[1+v_1]\Big),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_k\Big(\alpha_i \varphi_i^0 Q_{i1}(t)[1+v_1]\Big)}{\partial v_1^2} = \Big[\alpha_i \varphi_i^0 Q_{i1}(t)\Big]^2 \varphi_k''\Big(\alpha_i \varphi_i^0 Q_{i1}(t)[1+v_1]\Big),$$

с использованием формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа получаем разложение

$$\varphi_k\big(\alpha_i\varphi_i^0 Q_{i1}(t)[1+v_1]\big) = \varphi_k\big(\alpha_i\varphi_i^0 Q_{i1}(t)\big) +$$
$$+ \alpha_i\varphi_i^0 Q_{i1}(t)\varphi_k'\big(\alpha_i\varphi_i^0 Q_{i1}(t)\big)v_1 + \big[\alpha_i\varphi_i^0 Q_{i1}(t)\big]^2 \varphi_k''\big(\alpha_i\varphi_i^0 Q_{i1}(t)[1+\xi_k]\big)v_1^2,$$

где $\xi_k = \xi_k(t, v_1)$ такова, что $|\xi_k(t, v_1)| < |v_1| \le 1/2$ при любом $t \in [t_1, \omega[$. Заметим, что это разложение принимает вид $\varphi_k\big(\alpha_i\varphi_i^0 Q_{i1}(t)[1+v_1]\big) \equiv \varphi_k^0$ для тех $k \in \{1, \ldots, m_1\}$, при которых функция φ_k тождественно равна постоянной.

Учитывая полученное разложение, записываем систему уравнений (2.7) в виде

$$v_1' = \frac{Q_{i1}'(t)}{Q_{i1}(t)}[v_2 - v_1],$$
$$v_2' = \frac{I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)}[f(t) + c_1(t)v_1 - v_2 + V(t, v_1)], \tag{2.8}$$

где

$$f(t) = -1 + \frac{\varphi_i(q_i(t))[1+r_i(t)]}{\varphi_i^0} + \sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\varphi_k(q_i(t))}{\alpha_i p_i(t)\varphi_i^0},$$

$$q_i(t) = \alpha_i\varphi_i^0 Q_{i1}(t),$$

$$c_1(t) = \frac{[1+r_i(t)]q_i(t)\varphi_i'(q_i(t))}{\varphi_i^0} + \sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]q_i(t)\varphi_k'(q_i(t))}{\alpha_i p_i(t)\varphi_i^0},$$

$$V(t, v_1) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]q_i^2(t)(q_i(t))[1+\xi_k(t, v_1)]}{\alpha_i p_i(t)\varphi_i^0} v_1^2.$$

В силу (2.2) и (2.3)

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_i(t) = +\infty, \qquad q_i(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in]a, \omega[,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} q_i'(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) q_i''(t)}{q_i'(t)} = \mu_0.$$

Следовательно, функция q_i имеет те же асимптотические свойства, что и любое $\Pi_\omega(\mu_0)$-решение уравнения (0.1). Поэтому ввиду лемм 1.2, 1.3 и условий (0.3), (0.4)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t)\varphi_k(q_i(t))}{p_i(t)\varphi_i^0} = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, m \ \ (k \ne i),$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \varphi_k(q_i(t)) = \varphi_k^0 > 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} q_i(t)\varphi_k'(q_i(t)) = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, m_1,$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{q_i(t)\varphi_k'(q_i(t))}{\varphi_k(q_i(t))} = 1 + \sigma_k \quad \text{при} \quad k = m_1 + 1, \ldots, m.$$

Если же учесть, что $|\xi_k(t, v_1)| < 1/2$ при $t \in [t_1, \omega[$ и $|v_1| \le 1/2$, а также лемму 1.2 и условия (0.5), то при всех $k \in \{1, \ldots, m\}$, отличных от тех, для которых $\varphi_k(y) \equiv 0$, будем иметь

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{q_i^2(t)[1+\xi_k(t,v_1)]^2\,\varphi_k''(q_i(t)[1+\xi_k(t,v_1)])}{\varphi_k(q_i(t)[1+\xi_k(t,v_1)])} =$$

$$= \sigma_k(1+\sigma_k) \quad \text{равномерно по} \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

В силу (0.3) – (0.5) каждая из функций φ_k, $k \in \{1,\ldots,m\}$, является (см. [19, с. 15], гл. 1) правильно меняющейся на бесконечности. Поэтому для каждого $k \in \{1,\ldots,m\}$ найдутся постоянные l_k, $L_k > 0$ такие, что

$$l_k\,\varphi_k(q_i(t)) \le \varphi_k(q_i(t)[1+\xi_k(t,v_1)]) \le$$

$$\le L_k\,\varphi_k(q_i(t)) \quad \text{при} \quad t \in [t_1,\omega[\quad \text{и} \quad |v_1| \le \frac{1}{2}.$$

Учитывая теперь приведенные выше условия, получаем

$$\lim_{t\uparrow\omega} f(t) = 0, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} c_1(t) = 0$$

и

$$\lim_{v_1\to 0}\frac{V(t,v_1)}{v_1} = 0 \quad \text{равномерно по} \quad t \in [t_1,\omega[.$$

Тем самым установлено, что для системы уравнений (2.8) выполнены все условия леммы 2.1 работы [20]. Согласно этой лемме система дифференциальных уравнений (2.8) имеет по крайней мере одно решение $(v_k)_{k=1}^2 : [t_2,\omega[\to \mathbb{R}^2$ $(t_2 \in [t_1,\omega[)$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$. Если же учесть, что

$$\lim_{t\uparrow\omega}\ln|Q_{i1}(t)| = +\infty, \qquad \lim_{t\uparrow\omega}\ln|I_{i1}(t)| = \begin{cases} +\infty & \text{при } A_{i1} = a, \\ -\infty & \text{при } A_{i1} = \omega, \end{cases}$$

и принять во внимание замечание 1.1 из работы [21], то нетрудно понять, что исчезающих при $t \uparrow \omega$ решений у системы (2.8) будет однопараметрическое семейство в случае $A_{i1} = \omega$ и двупараметрическое — в случае $A_{i1} = a$. В силу замен (2.6) каждому такому решению системы (2.8) соответствует решение $y : [t_2, \omega[\to [y_0, +\infty[$ уравнения (0.1), допускающее при $t \uparrow \omega$ асимптотические представления (2.4). Используя эти представления и условия (2.2), (2.3), легко убеждаемся в том, что данное решение удовлетворяет всем условиям определения $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения уравнения (0.1).

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Пусть* $m_1 \ge 1$ *и для некоторого* $i \in \{1,\ldots,m_1\}$ *выполняются условия* (1.7) *и* (1.15), *если* $m_1 < m$. *Тогда для существования у уравнения* (0.1) $\Pi_\omega(+\infty)$*-решений* $(\Pi_\omega(-\infty)$*-решений*$)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\omega = +\infty$ $(\omega < +\infty)$,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\,I_{i1}'(t)}{I_{i1}(t)} = +\infty \ (-\infty) \tag{2.9}$$

и выполнялись условия

$$\lim_{t\uparrow\omega} Q_{i1}(t) = \pm\infty, \qquad \alpha_i I_{i1}(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in\,]a,\omega[. \tag{2.10}$$

Более того, при указанных условиях уравнение (0.1) *имеет двупараметрическое семейство таких решений, причем каждое из них допускает асимптотические представления вида* (2.4).

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0,\omega[\to [y_0,+\infty[$ — произвольное $\Pi_\omega(+\infty)$-решение $(\Pi_\omega(-\infty)$-решение$)$ уравнения (0.1). Тогда согласно лемме 1.1 $\omega = +\infty$ $(\omega < +\infty)$. Кроме того, в силу условий (1.7) и (1.15) для данного решения на основании леммы 1.5 имеют место предельные соотношения (1.9). С учетом этих соотношений из (0.1) получаем

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Отсюда с учетом определения $\Pi_\omega(+\infty)$-решения $(\Pi_\omega(-\infty)$-решения$)$ уравнения (0.1) следуют асимптотические представления (2.4) и условия (2.9), (2.10).

Достаточность. Предполагая выполненными условия $\omega = +\infty$ $(\omega < +\infty)$, (2.9) и (2.10), уравнение (0.1) с помощью преобразования (2.6) сводим к системе уравнений вида (2.7). После этого таким же образом, как при доказательстве достаточности теоремы 2.1, устанавливаем, что эта система имеет по крайней мере одно решение $(v_k)_{k=1}^2 : [t_2, \omega[\to \mathbb{R}^2$ $(t_2 \in [t_1, \omega[)$, стремящееся к нулю при $t \uparrow \omega$. А поскольку согласно условиям (2.9), (2.10)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \ln\left|Q_{i1}(t)\right| = +\infty, \qquad \lim_{t\uparrow\omega} \ln\left|I_{i1}(t)\right| = +\infty,$$

на основании замечания 1.1 из работы [20] приходим к выводу о существовании у системы (2.7) двупараметрического семейства таких решений. Каждому из них в силу преобразования (2.6) соответствует $\Pi_\omega(+\infty)$-решение $(\Pi_\omega(-\infty)$-решение$)$ $y : [t_2, \omega[\to [y_0, +\infty[$ уравнения (0.1), допускающее асимптотические представления (2.4).

Теорема 2.3. *Пусть* $\mu_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0, -1\}$, $m_1 < m$ *и для некоторого* $i \in \{m_1 + 1, \ldots, m\}$ *выполняются условия* $\sigma_i \neq 0$, (1.12) *и* (1.13). *Тогда для существования у уравнения* (0.1) $\Pi_\omega(\mu_0)$*-решений необходимо, а если выполняется одно из следующих двух условий*:

$$\mu_0 \neq -\frac{1}{2}; \quad \mu_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sigma_i < 0, \tag{2.11}$$

то и достаточно, чтобы

$$(1+\mu_0)\pi_\omega(t) > 0, \qquad \alpha_i \mu_0 \pi_\omega(t) > 0 \quad \text{при} \quad t \in [a, \omega[, \tag{2.12}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) I'_{i2}(t)}{I_{i2}(t)} = -(1+\mu_0)\sigma_i. \tag{2.13}$$

Более того, для каждого такого решения имеют место асимптотические представления

$$\frac{y(t)}{\varphi_i(y(t))} = -\frac{\alpha_i\sigma_i}{\mu_0} I_{i2}(t)[1+o(1)],$$
$$y'(t) = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)} y(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.14}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $y : [t_0, \omega[\to [y_0, +\infty[$ — произвольное $\Pi_\omega(\mu_0)$-решение уравнения (0.1). Тогда согласно лемме 1.1 выполняется первое из неравенств (2.12), а согласно лемме 1.4 имеют место предельные соотношения (1.9). Учитывая (1.9), из (0.1) получаем

$$y''(t) = \alpha_i p_i(t)\varphi_i(y(t))[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Поскольку $\mu_0 \neq 0$ и в силу определения $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0$, отсюда следует

$$\frac{y'(t)}{\varphi_i(y(t))} = \frac{\alpha_i}{\mu_0} p_i(t)\pi_\omega(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega. \tag{2.15}$$

Из этого асимптотического представления с учетом первых двух условий определения $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения приходим к выводу о справедливости второго из неравенств (2.12).

Далее, применяя правило Лопиталя (в форме Штольца), в силу (2.15), неравенства $\sigma_i \neq 0$ и леммы 1.2 находим

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{y(t)}{I_{i2}(t)\varphi_i(y(t))} = \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(y(t)/\varphi_i(y(t)))}{I_{i2}(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\frac{(y'(t)/\varphi_i(y(t)))[1-y(t)\varphi_i'(y(t))/\varphi_i(y(t))]}{\pi_\omega(t)p_i(t)} =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega}\frac{\alpha_i\pi_\omega(t)p_i(t)[1-(1+\sigma_i)]/\mu_0}{\pi_\omega(t)p_i(t)} = -\frac{\alpha_i\sigma_i}{\mu_0}.$$

Значит, имеет место первое из асимптотических представлений (2.14). Справедливость второго из них вытекает из леммы 1.1.

Используя теперь (2.15) и первое из асимптотических представлений (2.14), получаем

$$\frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = -\frac{\pi_\omega^2(t)y'(t)}{\sigma_i I_{i2}(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega.$$

Отсюда с учетом леммы 1.1 и вида функции $I_{i2}(t)$ следует, что выполняется условие (2.13).

Достаточность. Применяя к уравнению (0.1) преобразование

$$\begin{gathered}\Phi_i(y(t)) = \frac{\alpha_i}{\mu_0}I_{i2}(t)[1+v_1(x)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}[1+v_2(x)], \\ x = \beta\ln|\pi_\omega(t)|, \quad \text{где} \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega = +\infty, \\ -1, & \text{если } \omega < +\infty, \end{cases}\end{gathered} \tag{2.16}$$

получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta\left[-\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)}(1+v_1) + \frac{\alpha_i\mu_0(1+\mu_0)}{I_{i2}(t)}\frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))}(1+v_2)\right], \\ v_2' &= \beta\left[1+v_2-(1+\mu_0)(1+v_2)^2 + \frac{\pi_\omega^2(t)}{(1+\mu_0)Y_i(t,v_1)}\sum_{k=1}^m \alpha_k p_k(t)[1+r_k(t)]\varphi_k(Y_i(t,v_1))\right], \end{aligned} \tag{2.17}$$

где

$$Y_i(t,v_1) = \Phi_i^{-1}\left(\frac{\alpha_i}{\mu_0}I_{i2}(t)(1+v_1)\right), \qquad t = \begin{cases} e^x & \text{при } \omega = +\infty, \\ \omega - e^{-x} & \text{при } \omega < +\infty. \end{cases}$$

В силу неравенств $\sigma_i \neq 0,\ \mu_0 \neq 0,\ -1$ и условий (2.12), (2.13)

$$\begin{gathered}\alpha_i\mu_0\sigma_i I_{i2}(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in\,]a,\omega[, \\ \lim_{t\uparrow\omega} I_{i2}(t) = \begin{cases} \pm\infty & \text{при } \sigma_i < 0, \\ 0 & \text{при } \sigma_i > 0. \end{cases}\end{gathered} \tag{2.18}$$

Учитывая (2.18), выбираем в случае $\sigma_i > 0$ число $t_1 \in\,]a,\omega[$ так, чтобы при $t \in [t_1,\omega[$ выполнялось неравенство

$$b_i < \frac{3\alpha_i\mu_0}{2} I_{i2}(t) < 0 \quad \text{в случае, когда} \quad \sigma_i > 0,$$

где b_i определено в начале настоящего пункта при описании свойств функций Φ_i, Φ_i^{-1}. Если же $\sigma_i < 0$, то в качестве t_1 выбираем любое число из промежутка $]a, \omega[$.

Полагая $x_0 = \beta \ln|\pi_\omega(t_1)|$, рассматриваем систему уравнений (2.17) на множестве

$$\Omega = [x_0, +\infty[\times D, \qquad D = \left\{(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |v_k| \le \frac{1}{2},\ k = 1, 2\right\}.$$

В силу выбора числа t_1, вида функции Φ_i и условий (2.1), (2.18) $Y_i(t(x), v_1) \ge$ $\ge y_0$ при $x \ge x_0$ и $|v_1| \le 1/2$,

$$\lim_{x \to +\infty} Y_i(t(x), v_1) = \lim_{t \uparrow \omega} Y_i(t(x), v_1) = +\infty \quad \text{равномерно по} \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{2.19}$$

Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right) = \frac{\alpha_i}{\mu_0} I_{i2}(t)\left[1 - \frac{Y_i(t, v_1)\varphi_i'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\left(\frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right) = -\left(\frac{\alpha_i}{\mu_0} I_{i2}(t)\right)^2 \frac{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)}\left\{\frac{Y_i(t, v_1)\varphi_i'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))} + \right.$$

$$\left. + \frac{Y_i^2(t, v_1)\varphi_i''(Y_i(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))} - \left[\frac{Y_i(t, v_1)\varphi_i'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}\right]^2\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)}\right) = \frac{\alpha_i}{\mu_0} \frac{I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t, v_1))\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{Y_i^2(t, v_1)}\left[\frac{Y_i(t, v_1)\varphi_k'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_k(Y_i(t, v_1))} - 1\right],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\left(\frac{\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)}\right) = \left[\frac{\alpha_i}{\mu_0} I_{i2}(t)\right]^2 \frac{\varphi_i^2(Y_i(t, v_1))\varphi_k(Y_i(t, v_1))}{Y_i^3(t, v_1)}\left\{\frac{Y_i^2(t, v_1)\varphi_k''(Y_i(t, v_1))}{\varphi_k(Y_i(t, v_1))} + \right.$$

$$+ \frac{Y_i^2(t, v_1)\varphi_i'(Y_i(t, v_1))\varphi_k'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))\varphi_k(Y_i(t, v_1))} -$$

$$\left. - 2\frac{Y_i(t, v_1)\varphi_k'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_k(Y_i(t, v_1))} - \frac{Y_i(t, v_1)\varphi_i'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))} + 2\right\}.$$

Тогда согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа при каждом фиксированном $t \in [t_1, \omega[$ имеют место разложения

$$\frac{Y_i(t, v_1)}{\varphi_i(Y_i(t, v_1))} = \frac{Y_i(t, 0)}{\varphi_i(Y_i(t, 0))} + \frac{\alpha_i}{\mu_0} I_{i2}(t)\left[1 - \frac{Y_i(t, 0)\varphi_i'(Y_i(t, 0))}{\varphi_i(Y_i(t, 0))}\right]v_1 -$$

$$- \left(\frac{\alpha_i}{\mu_0} I_{i2}(t)\right)^2 \frac{\varphi_i(Y_i(t, \xi_0))}{Y_i(t, \xi_0)}\left[\frac{Y_i(t, \xi_0)\varphi_i'(Y_i(t, \xi_0))}{\varphi_i(Y_i(t, \xi_0))} + \frac{Y_i^2(t, \xi_0)\varphi_i''(Y_i(t, \xi_0))}{\varphi_i(Y_i(t, \xi_0))} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{Y_i(t, \xi_0)\varphi_i'(Y_i(t, \xi_0))}{\varphi_i(Y_i(t, \xi_0))}\right)^2\right]v_1^2,$$

$$\frac{\varphi_k(Y_i(t,v_1))}{Y_i(t,v_1)} =$$

$$= \frac{\varphi_k(Y_i(t,0))}{Y_i(t,0)} + \frac{\alpha_i}{\mu_0}\frac{I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t,0))\varphi_k(Y_i(t,0))}{Y_i^2(t,0)}\left[\frac{Y_i(t,0)\varphi_k'(Y_i(t,0))}{\varphi_k(Y_i(t,0))} - 1\right]v_1 +$$

$$+ \left(\frac{\alpha_i}{\mu_0}I_{i2}(t)\right)^2\frac{\varphi_i^2(Y_i(t,\xi_k))\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))}{Y_i^3(t,\xi_k)}\left[\frac{Y_i^2(t,\xi_k)\varphi_k''(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))} +\right.$$

$$+ \frac{Y_i^2(t,\xi_k)\varphi_i'(Y_i(t,\xi_k))\varphi_k'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_i(Y_i(t,\xi_k))\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))} -$$

$$\left. - 2\frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_k'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))} - \frac{Y_i(t,\xi_k)\varphi_i'(Y_i(t,\xi_k))}{\varphi_k(Y_i(t,\xi_k))} + 2\right]v_1^2,$$

где $\xi_k = \xi_k(t, v_1)$, $k = 0, 1, \ldots, m$, таковы, что

$$\left|\xi_k(t,v_1)\right| < \left|v_1\right|, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$
$$\text{при} \quad t \in [t_1, \omega[\quad \text{и} \quad v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{2.20}$$

Учитывая эти разложения, систему (2.17) записываем в виде

$$\begin{aligned} v_1' &= \beta[\,f_1(x) + c_{11}(x)v_1 + c_{12}(x)v_2 + V_1(x, v_1, v_2)\,], \\ v_2' &= \beta[\,f_2(x) + c_{21}(x)v_1 + c_{22}(x)v_2 + V_2(x, v_1, v_2)\,], \end{aligned} \tag{2.21}$$

где

$$f_1(x(t)) = -\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{I_{i2}(t)} + \frac{\mu_0(1+\mu_0)}{\alpha_i I_{i2}(t)}\frac{Y_i(t,0)}{\varphi_i(Y_i(t,0))},$$

$$f_2(x(t)) = -\mu_0 + \frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{1+\mu_0}\frac{\varphi_i(Y_i(t,0))}{Y_i(t,0)}\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k\, p_k(t)\varphi_k(Y_i(t,0))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,0))}[\,1 + r_k(t)\,],$$

$$c_{11}(x(t)) = -\frac{\pi_\omega(t)I_{i2}(t)}{I_{i2}(t)} + (1+\mu_0)\left[1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_i'(Y_i(t,0))}{\varphi_i(Y_i(t,0))}\right],$$

$$c_{12}(x(t)) = \frac{\mu_0(1+\mu_0)}{\alpha_i\, I_{i2}(t)}\frac{Y_i(t,0)}{\varphi_i(Y_i(t,0))},$$

$$c_{21}(x(t)) = \frac{\pi_\omega(t)I_{i2}'(t)}{\mu_0(1+\mu_0)I_{i2}(t)}\left[\frac{I_{i2}(t)\varphi_i(Y_i(t,0))}{Y_i(t,0)}\right]\times$$

$$\times\sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k\, p_k(t)[\,1 + r_k(t)\,]\varphi_k(Y_i(t,0))}{\alpha_i p_i(t)\varphi_i(Y_i(t,0))}\left[\frac{Y_i(t,0)\varphi_k'(Y_i(t,0))}{\varphi_k(Y_i(t,0))} - 1\right],$$

$$c_{22}(x(t)) = -1 - 2\mu_0,$$

$$V_1(x(t), v_1, v_2) = (1+\mu_0)\left[1 - \frac{Y_i(t,0)\varphi_i'(Y_i(t,0))}{\varphi_i(Y_i(t,0))}\right]v_1 v_2 +$$

$$+ \frac{\mu_0(1+\mu_0)}{\alpha_i\, I_{i2}(t)}v_1^2(1+v_2)\frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\left(\frac{Y_i(t,v_1)}{\varphi_i(Y_i(t,v_1))}\right)\Bigg|_{v_1=\xi_0(t,\,v_1)},$$

$$V_2\big(x(t), v_1, v_2\big) = -(1+\mu_0)v_2^2 +$$

$$+ \frac{v_1^2}{1+\mu_0}\pi_\omega(t) I_{i2}'(t) \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k\, p_k(t)[1+r_k(t)]}{p_i(t)} \frac{\partial^2}{\partial v_1^2}\left(\frac{\varphi_i(Y_i(t, v_1))}{Y_i(t, v_1)}\right)\Bigg|_{v_1=\xi_k(t,\, v_1)}.$$

Далее, установим свойства функций, стоящих в правой части системы (2.21).

В силу условий (0.3) – (0.5), леммы 1.2 и условия (2.19) равномерно по $v_1 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ имеют место пределы

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y_i(t, v_1)\varphi_k'(Y_i(t, v_1))}{\varphi_k(Y_i(t, v_1))} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 1,\dots, m_1, \\ 1+\sigma_k & \text{при } k = m_1+1,\dots, m \end{cases} \tag{2.22}$$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y_i(t, v_1)\varphi_k''(Y_i(t, v_1))}{\varphi_k'(Y_i(t, v_1))} = \sigma_k \tag{2.23}$$

при всех $k \in \{1, \dots, m\}$, отличных от тех, для которых $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0$.

Учитывая, что $i \in \{m_1 + 1, \dots, m\}$, с использованием правила Лопиталя в форме Штольца и (2.22) находим

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{Y_i(t, 0)}{\varphi_i(Y_i(t, 0)) I_{i2}(t)} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\left(\dfrac{Y_i(t, 0)}{\varphi_i(Y_i(t, 0))}\right)'}{I_{i2}'(t)} =$$

$$= \frac{\alpha_i}{\mu_0}\lim_{t\uparrow\omega}\left[1 - \frac{Y_i(t, 0)\varphi_i'(Y_i(t, 0))}{\varphi_i(Y_i(t, 0))}\right] = -\frac{\alpha_i\sigma_i}{\mu_0}.$$

Отсюда следует

$$\frac{Y_i(t, 0)}{\varphi_i(Y_i(t, 0))} = -\frac{\alpha_i\sigma_i}{\mu_0} I_{i2}(t)[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t\uparrow\omega. \tag{2.24}$$

Поскольку $Y_i'(t, 0) = \dfrac{\alpha_i}{\mu_0} I_{i2}'(t)\varphi_i(Y_i(t, 0))$, то ввиду (2.24) и (2.13)

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) Y_i'(t, 0)}{Y_i(t, 0)} = 1 + \mu_0,$$

т. е. $Y_i(t, 0)$ имеет свойства любого $\Pi_\omega(\mu_0)$-решения уравнения (0.1), которые использовались при установлении леммы 1.4. Вследствие этого факта и выполнения условий (1.12) и (1.13) имеем

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{p_k(t)\varphi_k(Y_i(t, 0))}{p_i(t)\varphi_i(Y_i(t, 0))} = 0 \quad \text{при любом} \quad k \in \{1, \dots, m\}, \quad \text{отличном от} \quad i. \tag{2.25}$$

Наконец, заметим, что все функции φ_k, где k отлично от тех значений, при которых $\varphi_k(y) \equiv \varphi_k^0$, являются строго монотонными на промежутке $[y_0, +\infty[$ и правильно меняющимися на бесконечности (см. [19]). Поэтому для каждого $k \in \{1, \dots, m\}$ существуют постоянные l_k, $L_k > 0$ такие, что

$$l_k \le \frac{\varphi_k(Y_i(t,\xi))}{\varphi_k(Y_i(t,0))} \le L_k \quad \text{при любых} \quad t \in [t_1, \omega[\quad \text{и} \quad \xi \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \tag{2.26}$$

Теперь, принимая во внимание условия (2.19), (2.20), (2.22) – (2.26) и (2.13), а также замену независимой переменной $x = \beta \ln |\pi_\omega(t)|$, легко убеждаемся в том, что в системе (2.21)

$$\lim_{x\to+\infty} f_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \qquad \lim_{x\to+\infty} c_{11}(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} c_{12}(x) = -\sigma_i(1+\mu_0),$$

$$\lim_{x\to+\infty} c_{21}(x) = -\mu_0, \qquad \lim_{x\to+\infty} c_{22}(x) = -1-2\mu_0,$$

а функции V_1, V_2 таковы, что

$$\lim_{|v_1|+|v_2|\to 0} \frac{V_k(x, v_1 v_2)}{|v_1|+|v_2|} = 0, \quad k = 1, 2, \quad \text{равномерно по} \quad x \in [x_0, +\infty[\,.$$

Значит, система (2.21) является квазилинейной системой дифференциальных уравнений с почти постоянными коэффициентами.

Записав характеристическое уравнение для предельной матрицы коэффициентов линейной части этой системы в виде

$$\begin{vmatrix} -\beta\lambda & -\beta\sigma_i(1+\mu_0) \\ -\beta\mu_0 & -\beta(1+2\mu_0)-\beta\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

получим

$$\lambda^2 + (1+2\mu_0)\lambda - \sigma_i\mu_0(1+\mu_0) = 0.$$

В силу (2.11) это уравнение не имеет корней с нулевой действительной частью.

Таким образом, для системы дифференциальных уравнений (2.21) выполнены все условия теоремы 2.1 работы [21]. Согласно этой теореме система (2.21) имеет по крайней мере одно решение $(v_k)_{k=1}^2 \colon [x_1, +\infty[\to \mathbb{R}^2$, где $x_1 \ge x_0$, стремящееся к нулю при $x \to +\infty$. Данному решению в силу замен (2.16) соответствует решение $y\colon [t_2, \omega[\to [y_0, +\infty[$, допускающее асимптотические представления

$$\Phi_i(y(t)) = \frac{\alpha_i}{\mu_0} I_{i2}(t)[1+o(1)], \qquad \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}[1+o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Если же учесть, что для этого решения

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\Phi_i(y(t))}{\dfrac{y(t)}{\varphi_i(y(t))}} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\Phi_i'(y(t))}{\left(\dfrac{y(t)}{\varphi_i(y(t))}\right)'} = \lim_{t\uparrow\omega} \frac{1}{1 - \dfrac{y(t)\varphi_i'(y(t))}{\varphi_i(y(t))}} = -\frac{1}{\sigma_i},$$

то из последних представлений получим представления (2.14).

Теорема доказана.

3. Выводы. В данной работе для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка выделен новый класс так называемых $\Pi_\omega(\mu_0)$-решений, в некотором смысле близкий к классу P_ω-решений, введенному в [14]. В случае дифференциального уравнения вида (0.1) предложен подход, позволяющий получить необходимые и достаточные условия существования решений из данного класса, а также установить для них асимптотические представления при $t \uparrow \omega$, где ω либо конечно, либо равно $\pm\infty$. Важной особенностью этого подхода является то, что ситуации, относящиеся к $\omega < +\infty$ и $\omega = \pm\infty$, не разделяются при исследовании, как это обычно бывает, а изучаются в рамках единого метода. Полученные здесь результаты позволяют непосредственно дать описание асимптотического поведения как правильных, так и различного типа сингулярных решений.

Поскольку отдельные слагаемые в правой части уравнения (0.1) содержат нелинейности, нечетко заданные классом правильно меняющихся в левой окрестности ω функций, асимптотику не всегда можно записать в явном виде (см. теорему 2.3). Однако если в этой теореме конкретно определить вид функции φ_i, то асимптотические представления при $t \uparrow \omega$ могут быть представлены явными формулами. Например, если в дополнение к условиям теоремы 2.3 предположить, что функция $\psi_i(y) = y^{-\sigma_i - 1}\varphi_i(y)$ такова, что

$$\psi_i\left(|\pi_\omega(t)|^{1+\mu_0+o(1)}\right) = [C(\mu_0) + o(1)]\psi(|\pi_\omega(t)|) \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

где $C(\mu_0)$ — отличная от нуля вещественная постоянная, то асимптотические представления (2.14) можно записать в явном виде

$$y(t) = \left|\frac{C(\mu_0)\sigma_i}{\mu_0} I_{i2}(t)\psi_i(|\pi_\omega(t)|)\right|^{-\frac{1}{\sigma_i}}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega,$$

$$y'(t) = \frac{1+\mu_0}{\pi_\omega(t)}\left|\frac{C(\mu_0)\sigma_i}{\mu_0} I_{i2}(t)\psi_i(|\pi_\omega(t)|)\right|^{-\frac{1}{\sigma_i}}[1 + o(1)] \quad \text{при} \quad t \uparrow \omega.$$

Указанному выше условию удовлетворяют функции $\varphi_i(y) = y^{1+\sigma_i}\dfrac{P_n(y)}{Q_n(y)}$, где P_n, Q_n — полиномы степени n, $\varphi_i(y) = y^{1+\sigma_i}\ln^\gamma y$, $\varphi_i(y) = y^{1+\sigma_i}\ln^\gamma y \ln^\gamma \ln y$ и многие другие.

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991.
2. *Кигурадзе И. Т.* Асимптотические свойства решений одного нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1965. – **29**, № 5. – С. 965–986.
3. *Костин А. В.* Об асимптотике продолжаемых решений уравнения типа Эмдена – Фаулера // Докл. АН СССР. – 1971. – **200**, № 1. – С. 28–31.
4. *Чантурия Т. А.* Об асимптотическом представлении решений уравнения $u'' = a(t)|u|^n \operatorname{sign} u$ // Дифференц. уравнения. – 1972. – **8**, № 7. – С. 1195–1206.
5. *Костин А. В., Евтухов В. М.* Асимптотика решений одного нелинейного дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. – 1976. – **231**, № 5. – С. 1059–1062.
6. *Евтухов В. М.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении второго порядка // Докл. АН СССР. – 1977. – **233**, № 4. – С. 531–534.
7. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Сообщ. АН ГССР. – 1982. – **106**, № 3. – С. 473–476.
8. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений второго порядка // Math. Nachr. – 1984. – **115**. – P. 215–236.
9. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 216 с.
10. *Костин А. В.* О поведении при $x \to +\infty$ решений обыкновенных дифференциальных уравнений и алгебраических уравнений с монотонными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1967. – **3**, № 2. – С. 206–218.
11. *Костин А. В.* Об асимптотических свойствах решений обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка // Там же. – 1968. – **4**, № 7. – С. 1184–1195.

12. *Костин А. В.* Асимптотика правильных решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Там же. – 1987. – **23**, № 3. – С. 524 – 526.
13. *Евтухов В. М.* Асимптотические свойства монотонных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка // Докл. расшир. зас. Ин-та прикл. математики им. И. Н. Векуа Тбилис. ун-та. – 1988. – **3**, № 3. – С. 62 – 65.
14. *Евтухов В. М.* Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена – Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. – 1992. – **324**, № 2. – С. 258 – 260.
15. *Евтухов В. М.* Об одном классе монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения n-го порядка типа Эмдена – Фаулера // Сообщ. АН Грузии. – 1992. – **145**, № 2. – С. 269 – 273.
16. *Marić V., Tomić M.* Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = f(x)\Phi(y)$ // Math. Z. – 1976. – **149**. – P. 261 – 266.
17. *Wong P. K.* Existence and asymptotic behavior of proper solutions of a class of second-order nonlinear differential equations // Pacif. J. Math. – 1963. – **13**. – P. 737 – 760.
18. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
19. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
20. *Evtukhov V. M., Shinkarenko V. N.* On the solutions with degree asymptotics of the differential equations with exponential nonlinearity // Нелінійні коливання. – 2002. – **5**, № 3. – С. 324 – 341.
21. *Евтухов В. М.* Об исчезающих на бесконечности решениях вещественных неавтономных систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 4. – С. 433 – 444.

Получено 02.04.2004