УДК 517.927

Б. А. Шувар, С. М. Ментинський (Нац. ун-т „Львів. політехніка”)

ДВОСТОРОННЯ АПРОКСИМАЦІЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

We suggest the general sheme of two-sided approximation of solutions of boundary-value problems for ordinary differential equations, which contains a number of the well-known and new two-sided methods. In the study, we use the constructions of the A. M. Samoilenko numerical-analytic method together with the strategy of construction of two-sided methods developed in the works by M. S. Kurpel' and B. A. Shuvar.

Запропоновано загальну схему двосторонньої апроксимації розв'язків крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, яка охоплює низку відомих і нових двосторонніх методів. При дослідженні використано конструкції чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка у поєднанні з методикою побудови двосторонніх методів, запропонованою в роботах М. С. Курпеля та Б. А. Шувара.

У цій статті досліджуються двосторонні ітераційні методи в застосуванні до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Двосторонні ітераційні методи, теорія яких започаткована С. О. Чаплигіним, мають відомі переваги перед іншими ітераційними методами. Проте їх використання обмежене кількома несприятливими чинниками. Основні з них — неопуклість та немонотонність, а також припущення про диференційовність відповідних операторів. У роботах [1 – 3] запропоновано нові підходи до побудови двосторонніх методів для рівнянь з немонотонними та неопуклими правими частинами. У статті [3], зокрема, досліджено нові двосторонні методи, що не вимагають диференційовності відповідних операторів. При використанні цих методів для апроксимації розв'язків граничних задач слід враховувати їх специфіку, зумовлену потребою побудови операторів відповідної структури в лінеаризованих частинах алгоритмів. Для цього зручно використовувати, зокрема, конструкції чисельно-аналітичного методу А. М. Самойленка [4, 5], який протягом минулих трьох десятиліть систематично застосовували для дослідження граничних задач для рівнянь із звичайними і частинними похідними.

У даному дослідженні використовуються зазначені підходи до побудови двосторонніх методів із метою побудови загальної схеми двосторонньої апроксимації розв'язків деяких класів крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, яка охоплює відомі [6 – 9] та нові алгоритми.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$Lx = f(t, x) \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$V(x) = 0. \tag{2}$$

Тут L — лінійний диференціальний оператор, $x \in B$, $f: R' \times B \to B$ ($R' \subseteq R$, $B \subset E$, E — банахів простір, напівупорядкований конусом додатних елементів).

Для відшукання послідовних наближень до розв'язку задачі (1), (2) використовуємо додаткове рівняння

$$x = L^{+}[f(t,x)] - L^{-}[f(t,x)] + c \tag{3}$$

таке, що будь-який розв'язок x^* рівняння (1), що задовольняє умови (2), є також розв'язком рівняння (3), причому L^{+}, $L^{-}: E \to E$ — лінійні додатні оператори, $c \in E$. Можливість зображення еквівалентного до задачі (1), (2) інтегрального рівняння у формі (3) досліджено в [10].

Нехай:

а) задано оператори $F_i(t,u,v,y,z)$, $F_i: R' \times B \times B \times B \times B \to B$, $i = 1, 2$, такі, що справджуються рівності

$$F_1(t,x,x,x,x) = f(t,x) = F_2(t,x,x,x,x);$$

б) задано лінійні щодо p, q оператори $l_i\,(t, y, z, p, q)$, $l_i\colon R'\times B\times B\times E\times\times E\to E$, $i = 1, 2$, такі, що при $\underline{y} \le \underline{u} \le \underline{v} \le \underline{z}$, $\underline{y} \le \bar{y} \le \bar{z} \le \underline{z}$, $\underline{y}$, $\underline{z}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\underline{u}$, $\underline{v} \in B$, $\bar{u}$, $\bar{v} \in E$, справджуються нерівності

$$F_1(t,\bar{u},\bar{v},\bar{y},\bar{z}) - F_1(t,\underline{u},\underline{v},\underline{y},\underline{z}) \ge l_1(t,\bar{y},\bar{z},\bar{u}-\underline{u},\underline{v}-\bar{v}),$$

$$F_2(t,\underline{u},\underline{v},\underline{y},\underline{z}) - F_2(t,\bar{u},\bar{v},\bar{y},\bar{z}) \ge l_2(t,\bar{y},\bar{z},\bar{u}-\underline{u},\underline{v}-\bar{v});$$

в) із співвідношень $y \le z$, y, $z \in B$

$$p \ge L^+[l_1(t, y, z, p, q)] + L^-[l_2(t, y, z, p, q)],$$

$$q \ge L^+[l_2(t, y, z, p, q)] + L^-[l_1(t, y, z, p, q)]$$

випливають нерівності $p \ge \theta$, $q \ge \theta$ (p, $q \in E$, θ — нульовий елемент простору E).

Теорема. *Нехай справджуються умови* а) – в), *рівняння* (3) *має хоча б один розв'язок* x^* *і система*

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= L^+[F_1(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n)] + L^-[F_2(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n)] + c,\\ z_{n+1} &= L^+[F_2(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n)] + L^-[F_1(t, y_{n+1}, z_{n+1}, y_n, z_n)] + c \end{aligned} \tag{4}$$

при кожному $n = 0, 1, 2, \ldots$ *має єдиний розв'язок. Тоді для послідовностей* $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ *компонент розв'язків системи* (4) *з нерівностей*

$$y_0 \le y_1 \le x^* \le z_1 \le z_0$$

випливають співвідношення

$$y_n \le y_{n+1} \le x^* \le z_{n+1} \le z_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Доведення. Виконання нерівностей (5) при $n = 0$ забезпечують умови теореми, а з припущення про їх виконання при $n = k-1$ випливають співвідношення

$$\begin{aligned} y_{k+1} - y_k &= L^+[F_1(t, y_{k+1}, z_{k+1}, y_k, z_k)] - L^-[F_2(t, y_{k+1}, z_{k+1}, y_k, z_k)] + c -\\ &- L^+[F_1(t, y_k, z_k, y_{k-1}, z_{k-1})] + L^-[F_2(t, y_k, z_k, y_{k-1}, z_{k-1})] - c \ge\\ &\ge L^+[l_1(t, y_k, z_k, y_{k+1} - y_k, z_k - z_{k+1})] + L^-[l_2(t, y_k, z_k, y_{k+1} - y_k, z_k - z_{k+1})],\\ z_k - z_{k+1} &= L^+[F_2(t, y_k, z_k, y_{k-1}, z_{k-1})] - L^-[F_1(t, y_k, z_k, y_{k-1}, z_{k-1})] + c -\\ &- L^+[F_2(t, y_{k+1}, z_{k+1}, y_k, z_k)] + L^-[F_1(t, y_{k+1}, z_{k+1}, y_k, z_k)] - c \ge\\ &\ge L^+[l_2(t, y_k, z_k, y_{k+1} - y_k, z_k - z_{k+1})] + L^-[l_1(t, y_k, z_k, y_{k+1} - y_k, z_k - z_{k+1})], \end{aligned}$$

а також

$$\begin{aligned} x^* - y_{k+1} &\ge L^+[l_1(t, x^*, x^*, x^* - y_{k+1}, z_{k+1} - x^*)] +\\ &+ L^-[l_2(t, x^*, x^*, x^* - y_{k+1}, z_{k+1} - x^*)],\\ z_{k+1} - x^* &\ge L^+[l_2(t, x^*, x^*, x^* - y_{k+1}, z_{k+1} - x^*)] +\\ &+ L^-[l_1(t, x^*, x^*, x^* - y_{k+1}, z_{k+1} - x^*)], \end{aligned}$$

які за умовою в) дають дві пари нерівностей: $y_{k+1} - y_k \geq \theta$, $z_k - z_{k+1} \geq \theta$ та $x^* - y_{k+1} \geq \theta$, $z_{k+1} - x^* \geq \theta$. Отже, справджуються нерівності

$$y_k \leq y_{k+1} \leq x^* \leq z_{k+1} \leq z_k,$$

що на підставі принципу математичної індукції доводить теорему.

Опишемо один загальний спосіб побудови операторів $F_1(u, v, y, z)$, $F_2(u, v, y, z)$ у (4). Нехай:

1) праву частину рівняння (1) можна подати у вигляді неперервної за сукупністю аргументів функції $F(t, y, z)$ $(f(t, x) \equiv F(t, x, x))$, для якої задано неперервні за сукупністю аргументів неспадні по y, незростаючі по z оператори $G_k(t, y, z)w$, $\alpha_k(t, y, z)w$, $A_k(t, y, z)w$, $k = 1, 2$, які щодо w є лінійними неперервними додатними операторами і для яких із співвідношень $y \leq z$, $t \in [0; T]$, $x, y, z \in [a; b]$ випливають нерівності

$$\begin{aligned} &(G_1(t,y,z)+\alpha_1(t,y,z)-A_1(t,z,y))(z-y) \leq F(t,z,x) - F(t,y,x), \\ &F(t,x,z) - F(t,x,y) \leq -(G_2(t,y,z)+\alpha_2(t,y,z)-A_2(t,z,y))(z-y); \end{aligned} \tag{6}$$

2) задані умовою 1 оператори $G_k(t, y, z)$, $\alpha_k(t, y, z)$, $A_k(t, y(t), z(t))$ такі, що із співвідношень $y \leq z$, $t \in [0; T]$, $x, y, z \in [a; b]$,

$$\begin{aligned} p \geq\ & L^+[G_1(t,y,z)p + G_2(t,y,z)q] + \\ &+ L^-[-(G_1(t,y,z)+\alpha_1(t,y,z))p - (G_2(t,y,z)+\alpha_2(t,y,z))q], \\ q \geq\ & L^+[(G_1(t,y,z)+\alpha_1(t,y,z))q + (G_2(t,y,z)+\alpha_2(t,y,z))p] + \\ &+ L^-[-G_1(t,y,z)p - G_2(t,y,z)q] \end{aligned}$$

випливають нерівності $p \geq \theta$, $q \geq \theta$.

Тоді в (4) можна покласти

$$\begin{aligned} F_1(t,y,z,p,q) =\ & G_1(t,y,z)(p-y) - G_2(t,y,z)(q-z) + \\ &+ (A_1(t,y,z)+A_2(t,y,z))(y-z) + F(t,y,z), \\ F_2(t,y,z,p,q) =\ & (G_1(t,y,z)+\alpha_1(t,y,z))(q-z) - (G_2(t,y,z) + \\ &+ \alpha_2(t,y,z))(p-y) + (A_1(t,y,z)+A_2(t,y,z))(z-y) + F(t,z,y). \end{aligned} \tag{7}$$

Зазначимо, що припущення (6) в умовах наведеного твердження справджуються, наприклад, якщо оператори

$$G_1(t,y,z) + \alpha_1(t,y,z) - A_1(t,z,y) \quad \text{та} \quad G_2(t,y,z) + \alpha_2(t,y,z) - A_2(t,z,y)$$

є похідними від $F(t,y,z)$ відповідно щодо y та z. У цьому випадку алгоритм (4), (7) тотожний застосуванню до рівняння (3) одного з основних варіантів методу Чаплигіна. Якщо ж оператори $A_1(t,z,y)$ і $A_2(t,z,y)$ в (6) є нульовими операторами, то з результатів дослідження отримують частинні результати, які є близькими до результатів із [3]. Якщо ж, крім того, нульовими є оператори $\alpha_1(t,z,y)$ і $\alpha_2(t,z,y)$, то отримані результати вписуються в абстрактну схему методу Курпеля із [2]. Якщо $G_1(t,z,y)$ і $G_2(t,z,y)$, $\alpha_1(t,z,y)$ і $\alpha_2(t,z,y)$ та $A_1(t,z,y)$ і $A_2(t,z,y)$ є нульовими операторами, то отримаємо загальну схему алгоритмів (див. [6 – 9]), що зазвичай використовуються при дослідженні крайових задач двосторонніми методами.

Постулюємо умову:

3) задано неперервні за сукупністю аргументів неспадні по y, незростаючі

по z оператори $\beta_k(t, y, z)w$, $k = 1, 2$, які щодо w є лінійними неперервними додатними операторами і для яких із співвідношень $y \leq z$, $t \in [0, T]$, x, y, $z \in [a; b]$ випливають нерівності

$$F(t,z,x) - F(t,y,x) \leq (G_1(t,y,z)+\beta_1(t,y,z)-A_1(t,z,y))(z-y),$$

$$-(G_2(t,y,z)+\beta_2(t,y,z)-A_2(t,z,y))(z-y) \leq F(t,x,z) - F(t,x,y),$$

де $G_1(t,y,z)$, $G_2(t,y,z)$, $A_1(t,y,z)$, $A_2(t,y,z)$ задовольняють умову 1.

Розглянемо застосування запропонованого алгоритму на прикладі лінійної двоточкової крайової задачі

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{8}$$

$$\alpha x(0) + \beta x(T) = \gamma, \tag{9}$$

де x — елемент простору $C^1_{R_m}[0;T]$ неперервно диференційовних m-вимірних векторних функцій скалярного аргументу, напівупорядкованого конусом додатних елементів, $t \in [0;T]$, $f: D = [0;T]\times[a;b] \to C^1_{R_m}[0;T]$ $(a, b \in C^1_{R_m}[0;T])$, γ — m-вимірний сталий вектор, α і β — сталі матриці порядку $m \times m$, в алгоритмі (4), (7) приймаємо

$$L^+[f(t)] = (\alpha+\beta)^{-1}\alpha\int_0^t f(s)ds, \qquad L^-[f(t)] = (\alpha+\beta)^{-1}\beta\int_t^T f(s)ds$$

за умови, що матриця $\alpha + \beta$ — неособлива, причому $(\alpha+\beta)^{-1}\alpha \geq \Theta$ і $(\alpha+\beta)^{-1}\beta \geq \Theta$. Позначивши через $G = \{g_{ij}\}$, $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$ сталі матриці з елементами

$$g_{ij} = \max_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}} \left|g^{(1)}_{ij}(t,y,z) + g^{(2)}_{ij}(t,y,z)\right|,$$

$$a_{ij} = \max_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}} \left|a^{(1)}_{ij}(t,y,z) + a^{(2)}_{ij}(t,y,z)\right|,$$

$$b_{ij} = \max_{\substack{t\in[0,T]\\ y,z\in[a,b]}} \left|\beta^{(1)}_{ij}(t,y,z) + \beta^{(2)}_{ij}(t,y,z)\right|,$$

отримаємо умову збіжності у вигляді

$$(E-GT)^{-1} > \Theta, \qquad \left\|(E-GT)^{-1}T(A+B)\right\|q < 1.$$

Зауваження. Якщо в (6) покласти $G_k(t,y,z) \equiv \Theta$, $\alpha_k(t,y,z) \equiv \Theta$, $A_k(t,y,z) \equiv \Theta$, $k = 1, 2$, а за $\beta_1(t,y,z)$ і $\beta_2(t,y,z)$ прийняти константи Ліпшиця функції $F(t,y,z)$ за змінними y і z відповідно, то для задачі (8), (9) отримаємо результат із [9]. Зазначимо, що для випадку ненульових $G_1(t,y,z)$, $G_2(t,y,z)$ у проведених дослідженнях встановлено умови, за яких послідовні наближення матимуть надлінійну (зокрема, і квадратичну) швидкість збіжності. Крім цього, використання у структурі пропонованого алгоритму операторів $A_1(t,y,z)$, $A_2(t,y,z)$ (відмінних від нуля) дозволяє апріорі враховувати вплив похибок заокруглення на монотонність та двосторонність послідовних наближень при практичній реалізації алгоритму. Схожі порівняння можна провести для задачі про відшукання періодичних розв'язків [6, 7], багатоточкової задачі Валле Пуссена та крайових задач для рівнянь із параметрами [8].

Перспективи подальших досліджень у цьому напрямку — розширення класів задач, для апроксимації розв'язків яких можна застосовувати досліджений двосторонній алгоритм, а також побудова схем дискретизації, придатних для його реалізації за допомогою сучасних обчислювальних засобів.

1. *Курпель М. С.* Про деякі модифікації методу С. О. Чаплигіна наближеного інтегрування диференціальних рівнянь // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1969. – № 4. – С. 303 – 306.
2. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения. – Киев: Наук. думка, 1980. – 268 с.
3. *Шувар Б. А.* Двусторонние итерационные методы решения нелинейных уравнений в полуупорядоченных пространствах // Второй симпозиум по методам решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. – Таллин: Ин-т кибернетики АН ЭССР, 1981. – Т.1. – С. 68 – 73.
4. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 277 с.
5. *Ronto M., Samoilenko A. M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. – Singapore: World Sci., 2000. – 455 p.
6. *Курпель Н. С.* О двусторонних приближениях к периодическим решениям дифференциальных уравнений // Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. – Т.1. – С. 384 – 352.
7. *Собкович Р. И., Шувар Б. А.* Двусторонние приближения к периодическим решениям систем дифференциальных уравнений с параметрами // Нелинейные динамические процессы физики и механики. – Киев: Наук. думка, 1981. – С. 138 – 145.
8. *Собкович Р. И.* Двусторонний метод исследования некоторых краевых задач с параметрами. – Киев, 1981. – 36 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.52).
9. *Нестеренко Л. И.* Об одном двустороннем методе решения двухточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Докл. АН УРСР. – 1980. – № 11. – С. 18 – 21.
10. *Volkman P.* Gowohnliche Differentialgleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorraumen // Math. Z. – 1972. – **127**, № 2. – S. 157 – 164.

Одержано 18.03.2004