УДК 517.5

С. Б. Вакарчук, К. Ю. Мыскин (Акад. таможен. службы Украины, Днепропетровск)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОДНОВРЕМЕННОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ БИЛИНЕЙНЫМИ СПЛАЙНАМИ

Exact estimates of approximation errors for two variable functions and their derivatives by bilinear splines are obtained on some classes.

На деяких класах одержано точні значення оцінок похибок наближення функцій двох змінних та їх похідних інтерполяційними білінійними сплайнами.

1. Пусть C_D — класс непрерывных в области $D \overset{\text{df}}{=} [0,\, 1] \times [0,\, 1]$ функций $f(x, y)$, а $C_D^{r,s}(r, s \in \mathbb{Z}_+)$ — класс функций $f(x, y) \in C_D$, у которых непрерывны производные $f^{(i,j)}(x, y) \overset{\text{df}}{=} \dfrac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}$, где $i \le r$ и $j \le s$; $f^{(0,0)}(x, y) \overset{\text{df}}{=} f(x, y)$. При этом полагаем $C_D^{0,0} \overset{\text{df}}{=} C_D$. Для произвольной функции $f(x, y) \in C_D$ запишем норму $\|f\|_C = \max\{|f(x, y)|\colon (x, y) \in D\}$ и полный модуль непрерывности

$$\omega(f; t, \tau) = \{|f(A_1) - f(A_2)|\colon A_1(x_1, y_1) \in D, A_2(x_2, y_2) \in D,$$
$$|x_1 - x_2| \le t, |y_1 - y_2| \le \tau\}, \qquad t,\ \tau \ge 0.$$

Через $C_D^{r,s}(\omega)$ $\left(r, s = 0, 1; C_D^{0,0}(\omega) \overset{\text{df}}{=} C_D(\omega)\right)$ обозначим класс функций $f(x, y) \in C_D^{r,s}$, удовлетворяющих условию $\omega\left(f^{(r,s)}; t, \tau\right) \le \omega(t, \tau)$, $0 \le t$, $\tau \le 1$, где $\omega(t, \tau)$ — некоторый модуль непрерывности.

Пусть $\Omega(t)$, $t \ge 0$, — произвольный модуль непрерывности и $\rho(A_1, A_2)$ — расстояние между точками $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$, принадлежащими D. Обозначим через $C_{D,\rho}^{r,s}(\Omega)$ $\left(r, s = 0, 1; C_{D,\rho}^{0,0}(\Omega) \overset{\text{df}}{=} C_{D,\rho}(\Omega)\right)$ класс функций $f(x, y) \in C_D^{r,s}$, которые удовлетворяют условию

$$\omega_\rho\left(f^{(r,s)}, t\right) \overset{\text{df}}{=} \omega\left(f^{(r,s)}, t\right) = \sup\left\{\left|f^{(r,s)}(A_1) - f^{(r,s)}(A_2)\right|\colon A_1, A_2 \in D,\right.$$
$$\left.\rho(A_1, A_2) \le t\right\} \le \Omega(t), \qquad 0 \le t \le d_\rho,$$

где $d_\rho = \max\{\rho(A_1, A_2)\colon A_1, A_2 \in D\}$.

Далее в качестве ρ рассмотрим евклидово

© С. Б. ВАКАРЧУК, К. Ю. МЫСКИН, 2005

$$\rho_e(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

и хэммингово

$$\rho_H(A_1, A_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

расстояния. При этом $d_{\rho_e} = \sqrt{2}$, а $d_{\rho_H} = 2$.

Зададим в области D сетку узлов $\delta_{nm} \stackrel{\text{df}}{=} \delta_n^x \times \delta_m^y$ $(n, m \geq 2)$, где $\delta_n^x : x_i = i/n$, $i = \overline{0, n}$; $\delta_m^y : y_j = j/m$, $j = \overline{0, m}$, и поставим в соответствие каждой функции $f(x, y) \in C_D$ функцию $S_{1,1}(f; x, y) \in C_D$, определенную следующим образом:

1) на каждом прямоугольнике $D_{ij} \stackrel{\text{df}}{=} [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$, $S_{1,1}(f; x, y)$ является алгебраическим многочленом первой степени по x и по y;

2) $S_{1,1}(f; x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$.

Функции $S_{1,1}(f; x, y)$ называют интерполяционными сплайнами первой степени двух переменных [1, с. 54–58] или интерполяционными билинейными сплайнами [2].

На множестве точек $(x, y) \in D_{ij}$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$, имеет место представление

$$S_{1,1}(f; x, y) = \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} f\left(x_{i+p}, y_{j+k}\right) H_{p,i}(x) H_{k,j}(y),$$

где

$$H_{0,i}(x) \stackrel{\text{df}}{=} n(x_{i+1} - x), \qquad \sum_{p=0}^{1} H_{p,i} \equiv 1,$$

$$H_{0,j}(y) \stackrel{\text{df}}{=} m(y_{j+1} - y), \qquad \sum_{k=0}^{1} H_{k,j} \equiv 1.$$

При фиксированном значении одной из переменных, например $x(y)$, $S_{1,1}(f; x, y)$ является сплайном первой степени относительно другой переменной $y(x)$. Нетрудно убедиться в том, что для любой функции $f(x, y)$ сплайн $S_{1,1}(f; x, y)$ единствен [1].

Обозначим

$$F(x_i, y_j) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} (-1)^{p+k} f(x_{i+p}, y_{j+k}),$$

$$F_j(x_i, y) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} (-1)^{p+1} H_{k,j}(y) f(x_{i+p}, y_{j+k}),$$

$$F_i(x, y_j) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} (-1)^{k+1} H_{p,i}(x) f(x_{i+p}, y_{j+k}),$$

где $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$.

Напомним, что для решения сформулированной в [3] задачи полигональной интерполяции В. Н. Малоземов доопределил первую производную ломаной $L_n(f, x)$, $0 \le x \le 1$, в ее вершинах $x_i = i/n$, $i = \overline{0, n}$, следующим образом: $L^{(1)}(f, x_i) \overset{\text{df}}{=} n[f(x_{i+1}) - f(x_i)]$, $i = \overline{0, n-1}$, $L^{(1)}(f, 1) \overset{\text{df}}{=} n[f(1) - f(x_{n-1})]$, полагая при этом $L^{(1)}(f, x) = n[f(x_{i+1}) - f(x_i)]$, если $x \in [x_i, x_{i+1})$, $i = \overline{0, n-2}$, и $L^{(1)}(f, x) = n[f(1) - f(x_{n-1})]$, если $x \in [x_{n-1}, 1]$.

При решении экстремальных задач, сформулированных в теоремах 1 – 3 следующего пункта, возникают аналогичные проблемы, связанные с доопределением смешанной производной $S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y)$ и частных производных $S_{1,1}^{(r,s)}(f; x, y)$ $(r, s = 0, 1; r + s = 1)$ функции $S_{1,1}(f; x, y)$ на точечных множествах

$$A_i \overset{\text{df}}{=} \{(x, y) : x = x_i, 0 \le y \le 1\}, \qquad i = \overline{1, n-1},$$

$$B_j \overset{\text{df}}{=} \{(x, y) : y = y_j, 0 \le x \le 1\}, \qquad j = \overline{1, m-1},$$

где производные претерпевают разрывы первого рода.

Используя изложенные в [3] соображения, доопределим $S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y)$ на множестве D. В результате этого для смешанной производной получим следующие выражения [4]:

1) если $(x, y) \in D'_{ij} \overset{\text{df}}{=} [x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1})$, $i = \overline{0, n-2}$, $j = \overline{0, m-2}$, то $S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y) = nmF(x_i, y_j)$;

2) если $(x, y) \in D'_{n-1, j} \overset{\text{df}}{=} [x_{n-1}, x_n] \times [y_j, y_{j+1})$, $j = \overline{0, m-2}$, то $S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y) = nmF(x_{n-1}, y_j)$;

3) если $(x, y) \in D'_{i, m-1} \overset{\text{df}}{=} [x_i, x_{i+1}) \times [y_{m-1}, y_m]$, $i = \overline{0, n-2}$, то $S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y) = nmF(x_i, y_{m-1})$;

4) если $(x, y) \in D'_{n-1, m-1} \overset{\text{df}}{=} [x_{n-1}, x_n] \times [y_{m-1}, y_m]$, то $S_{1,1}^{(1,1)}(f; x, y) = nmF(x_{n-1}, y_{m-1})$.

Используя указанные выше соображения, после доопределения производной $S_{1,1}^{(1,0)}(f; x, y)$ на множестве D получим выражения [5]:

a$_1$) если $(x, y) \in D''_{ij} \overset{\text{df}}{=} [x_i, x_{i+1}) \times [y_j, y_{j+1}]$, $i = \overline{0, n-2}$, $j = \overline{0, m-1}$, то $S_{1,1}^{(1,0)}(f; x, y) = nF_j(x_i, y)$;

b$_1$) если $(x, y) \in D''_{n-1, j} \overset{\text{df}}{=} [x_{n-1}, x_n] \times [y_j, y_{j+1}]$, $j = \overline{0, m-1}$, то $S_{1,1}^{(1,0)}(f; x, y) = nF_j(x_{n-1}, y)$.

После проведенного соответствующим образом доопределения частной производной $S_{1,1}^{(0,1)}(f; x, y)$ на D имеем следующие выражения для данной функции [5]:

a$_2$) $S_{1,1}^{(0,1)}(f; x, y) = mF_i(x, y_j)$, если $(x, y) \in D'''_{ij} \overset{\text{df}}{=} [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1})$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-2}$;

b$_2$) $S_{1,1}^{(0,1)}(f; x, y) = mF_i(x, y_{m-1})$, если $(x, y) \in D'''_{i,m-1} \stackrel{\text{df}}{=} [x_i, x_{i+1}] \times [y_{m-1}, y_m]$, $i = \overline{0, n-1}$.

Отметим, что записанные с учетом проведенного доопределения выражения для $S_{1,1}^{(r,s)}(f; x, y)$ $(r, s = 0, 1;\ 1 \le r + s \le 2)$ совпадают с формулами для соответствующих производных там, где последние существуют.

2. В монографии Н. П. Корнейчука [6, с. 323] отмечалось, что по сравнению с одномерным случаем исследование вопросов приближения функций двух и более переменных значительно усложняется ввиду появления принципиально новых обстоятельств, связанных с многомерностью. Поэтому на сегодняшний день имеется немного точных результатов, полученных в задачах оценки погрешности приближения в многомерном случае, в том числе и в задачах многомерной сплайн-интерполяции.

Для произвольной функции $f(x, y) \in C_D^{r,s}$, $r, s = 0, 1$, обозначим

$$\mathcal{E}_{n,m}^{r,s}(f; x, y) \stackrel{\text{df}}{=} f^{(r,s)}(x, y) - S_{1,1}^{(r,s)}(f; x, y), \qquad (x, y) \in D,$$

где $\mathcal{E}_{n,m}^{0,0}(f; x, y) = \mathcal{E}_{n,m}(f; x, y)$. Для любого класса $\mathfrak{M} \subset C_D^{r,s}$ запишем

$$E_{n,m}^{r,s}(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{df}}{=} \sup\left\{\left\|\mathcal{E}_{n,m}^{r,s}(f)\right\|_C : f \in \mathfrak{M}\right\}.$$

При этом полагаем $E_{n,m}^{0,0}(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{df}}{=} E_{n,m}(\mathfrak{M})$.

Пусть $\omega(t, \tau)$ и $\Omega(t)$ — произвольные выпуклые вверх модули непрерывности. В работах [7, 8] показано, что

$$E_{n,m}(C_D(\omega)) = \omega\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2m}\right)$$

и

$$E_{n,m}\left(C_{D,\rho_e}(\Omega)\right) = \Omega\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2}}\right).$$

Для произвольного модуля непрерывности $\omega(t, \tau)$ в статье [4] показано, что

$$E_{n,m}^{1,1}\left(C_D^{1,1}(\omega)\right) = nm\int_0^{1/n}\int_0^{1/m} \omega(t, \tau)\, dt\, d\tau.$$

В работе [9] доказана справедливость соотношений

$$E_{n,m}^{1,0}\left(C_D^{1,0}(\omega)\right) = n\int_0^{1/n} \omega\left(t, \frac{1}{2m}\right) dt,$$

если $\omega(t, \tau)$ — модуль непрерывности, выпуклый вверх по переменной τ;

$$E_{n,m}^{0,1}\left(C_D^{0,1}(\omega)\right) = m\int_0^{1/m} \omega\left(\frac{1}{2n}, \tau\right) d\tau,$$

если $\omega(t, \tau)$ — модуль непрерывности, выпуклый вверх по переменной t;

для выпуклого вверх модуля непрерывности $\Omega(t)$ имеют место равенства

$$E^{1,0}_{n,m}\left(C^{1,0}_{D,\rho_e}(\Omega)\right) = n\int\limits_0^{1/n}\Omega\left(\sqrt{t^2+\frac{1}{4m^2}}\right)dt,$$

$$E^{0,1}_{n,m}\left(C^{0,1}_{D,\rho_e}(\Omega)\right) = m\int\limits_0^{1/m}\Omega\left(\sqrt{\frac{1}{4n^2}+\tau^2}\right)d\tau,$$

а для произвольного модуля непрерывности $\Omega(t)$

$$E^{1,1}_{n,m}\left(C^{1,1}_{D,\rho_e}(\Omega)\right) = nm\int\limits_0^{1/n}\int\limits_0^{1/m}\Omega\left(\sqrt{t^2+\tau^2}\right)dt\,d\tau.$$

В [5] получены следующие результаты:

если $\omega_*(t,\tau) = \omega_1(t)+\omega_2(\tau)$, где $\omega_i(\cdot)$, $i = 1, 2,$ — произвольные модули непрерывности, то

$$E^{1,1}_{n,m}\left(C^{1,1}_{D}(\omega_*)\right) = n\int\limits_0^{1/n}\omega_1(t)\,dt + m\int\limits_0^{1/m}\omega_2(\tau)\,d\tau;$$

если $\tilde{\omega}(t,\tau) = \omega_1(t)+\omega_2(\tau)$, где $\omega_1(t)$ — произвольный (выпуклый вверх), а $\omega_2(\tau)$ — выпуклый вверх (произвольный) модули непрерывности, то

$$E^{1,0}_{n,m}\left(C^{1,0}_{D}(\tilde{\omega})\right) = n\int\limits_0^{1/n}\omega_1(t)\,dt + \omega_2\left(\frac{1}{2m}\right)$$

$$\left(E^{0,1}_{n,m}\left(C^{0,1}_{D}(\tilde{\omega})\right) = \omega_1\left(\frac{1}{2n}\right) + m\int\limits_0^{1/m}\omega_2(\tau)\,d\tau\right).$$

Данная статья продолжает указанную тематику и основное ее содержание составляют следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega(t)$ — *произвольный выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда для любых натуральных чисел* $n, m \geq 2$ *справедливы равенства*

$$E_{n,m}\left(C_{D,\rho_H}(\Omega)\right) = \Omega\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2m}\right). \tag{1}$$

Теорема 2. *Если условия теоремы* 1 *выполнены, то*

$$E^{1,0}_{n,m}\left(C^{1,0}_{D,\rho_H}(\Omega)\right) = n\int\limits_{1/(2m)}^{1/n+1/(2m)}\Omega(t)\,dt, \tag{2}$$

$$E^{0,1}_{n,m}\left(C^{0,1}_{D,\rho_H}(\Omega)\right) = m\int\limits_{1/(2n)}^{1/(2n)+1/m}\Omega(t)\,dt, \tag{3}$$

где натуральные числа $n, m \geq 2$.

Теорема 3. *Пусть* $\Omega(t)$ — *произвольный модуль непрерывности. Тогда для любых натуральных чисел* $n, m \geq 2$ *имеют место равенства*

$$E^{1,1}_{n,m}\left(C^{1,1}_{D,\rho_H}(\Omega)\right) = nm\int\limits_0^{1/n}\int\limits_0^{1/m}\Omega(t+\tau)\,dt\,d\tau =$$

$$= nm \begin{cases} \int\limits_0^{1/n} t\Omega(t)\,dt + \dfrac{1}{n}\int\limits_{1/n}^{1/m} \Omega(t)\,dt + \int\limits_{1/m}^{1/m+1/n} \left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}-t\right)\Omega(t)\,dt, & m < n, \\ \int\limits_0^{1/m} t\Omega(t)\,dt + \dfrac{1}{m}\int\limits_{1/m}^{1/n} \Omega(t)\,dt + \int\limits_{1/n}^{1/n+1/m} \left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}-t\right)\Omega(t)\,dt, & m > n, \\ \int\limits_0^{1/n} t\Omega(t)\,dt + \int\limits_{1/n}^{2/n} \left(\dfrac{2}{n}-t\right)\Omega(t)\,dt, & m = n. \end{cases} \tag{4}$$

3. ***Доказательство теоремы*** **1.** Учитывая изложенные в п. 1 свойства функций $H_{p,i}(x)$ и $H_{k,j}(y)$, $p, k = 0, 1$, где $(x, y) \in D_{ij}$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$, для произвольной функции $f(x, y) \in C_D$ записываем

$$\mathscr{E}_{n,m}(f; x, y) = \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\big[f(x, y) - f(x_{i+p}, y_{j+k})\big].$$

Используя определение модуля непрерывности, отсюда имеем

$$\left|\mathscr{E}_{n,m}(f; x, y)\right| \le \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\omega_{\rho_H}\left(f; \left|x - x_{i+p}\right| + \left|y - y_{j+k}\right|\right). \tag{5}$$

Поскольку $\Omega(t)$ — выпуклая вверх функция, исходя из неравенства (5), записываем

$$\left|\mathscr{E}_{n,m}(f; x, y)\right| \le$$

$$\le \Omega\left(\sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\Big((-1)^p\big(x - x_{i+p}\big) + (-1)^k\big(y - y_{j+k}\big)\Big)\right), \tag{6}$$

где $(x, y) \in D_{ij}$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$. Используя определения функций $H_{p,i}(x)$ и $H_{p,j}(y)$, $p = 0, 1$, из (6) имеем

$$\left|\mathscr{E}_{n,m}(f; x, y)\right| \le \Omega\left(\sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\left(\frac{1}{n}H_{1-p,i}(x) + \frac{1}{m}H_{1-k,j}(y)\right)\right) =$$

$$= \Omega\left(\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{1-p,i}(x)\sum_{k=0}^{1} H_{k,j}(y) + \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{1} H_{k,j}(y)H_{1-k,j}(y)\sum_{p=0}^{1} H_{p,i}(x)\right) =$$

$$= \Omega\left(\frac{2}{n}H_{0,i}(x)H_{1,i}(x) + \frac{2}{m}H_{0,j}(y)H_{1,j}(y)\right),$$

где $(x, y) \in D_{ij}$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$. Поскольку

$$\max_{\substack{(x,y)\in D_{ij} \\ \left(i=\overline{0,n-1};\ j=\overline{0,m-1}\right)}} \left\{H_{0,i}(x)H_{1,i}(x);\ H_{0,j}(y)H_{1,j}(y)\right\} = \frac{1}{4}, \tag{7}$$

для любой точки $(x, y) \in D_{ij}$, $i = \overline{0, n-1}$, $j = \overline{0, m-1}$, получаем

$$\left|\mathscr{E}_{n,m}(f; x, y)\right| \le \Omega\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2m}\right)$$

и, следовательно,

$$E_{n,m}\Big(C_{D,\rho_H}(\Omega)\Big) \le \Omega\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2m}\right). \tag{8}$$

Для получения оценки снизу в качестве экстремальной рассмотрим функцию

$$f_0(x,y) = \Omega\Big(\min(x-x_i, x_{i+1}-x)+\min\big(y-y_j, y_{j+1}-y\big)\Big),$$

где $(x,y)\in D_{ij}$, $i=\overline{0,n-1}$, $j=\overline{0,m-1}$. Проводя стандартные рассуждения (см., например, [4, 5, 8–9]), можно убедиться в принадлежности $f_0(x,y)$ классу $C_{D,\rho_H}(\Omega)$. Поскольку $f_0(x_i,y_j)=0$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{0,m}$, то

$$E_{n,m}\Big(C_{D,\rho_H}(\Omega)\Big) \ge \left\|\mathscr{E}_{n,m}(f_0)\right\|_C = \|f_0\|_C \ge$$

$$\ge f_0\left(\frac{1}{2n},\frac{1}{2m}\right) = \Omega\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2m}\right). \tag{9}$$

Сравнивая оценки сверху (8) и снизу (9), получаем равенство (1), что и завершает доказательство теоремы 1.

4. ***Доказательство теоремы*** **2.** Не уменьшая общности, покажем справедливость равенства (2), поскольку все рассуждения, связанные с получением соотношения (3), имеют аналогичный характер. Пусть, например, точка (x,y) принадлежит множеству D''_{ij}, $i=\overline{0,n-2}$, $j=\overline{0,m-1}$. Согласно введенным в п. 1 обозначениям

$$S^{(1,0)}_{1,1}(f;x,y) = nF_j(x_i,y) =$$

$$= n\sum_{k=0}^{1}H_{k,j}(y)\big[f(x_{i+1},y_{j+k})\pm f(x,y_{j+k})-f(x_i,y_{j+k})\big] =$$

$$= n\sum_{k=0}^{1}H_{k,j}(y)\big[(x_{i+1}-x)f(x_{i+1},x;y_{j+k})+(x-x_i)f(x,x_i;y_{j+k})\big] =$$

$$= \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)f(x,x_{i-p+1};y_{j+k}), \tag{10}$$

где $f(x,x_{i-p+1};y_{j+k})$, $p,k=0,1$, — частные разделенные разности первого порядка функции $f(x,y)$ по переменной x при $y=y_{j+k}$. Используя в (10) интегральное представление разделенных разностей [10], для произвольной функции $f(x,y)\in C^{1,0}_D$ записываем

$$\mathscr{E}^{1,0}_{n,m}(f;x,y) = f^{(1,0)}(x,y) - S^{(1,0)}_{1,1}(f;x,y) =$$

$$= \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\int_0^1\Big[f^{(1,0)}(x,y)-f^{(1,0)}\big(x+\tau(x_{i-p+1}-x);y_{j+k}\big)\Big]d\tau,$$

где $(x,y)\in D''_{ij}$, $i=\overline{0,n-2}$, $j=\overline{0,m-1}$. Отсюда следует, что

$$\left|\mathscr{E}^{1,0}_{n,m}(f;x,y)\right| \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\int_0^1\omega_{\rho_H}\Big(f^{(1,0)};\tau\big|x_{i-p+1}-x\big|+\big|y_{j+k}-y\big|\Big)d\tau. \tag{11}$$

Используя определение класса $C^{1,0}_{D,\rho_H}(\Omega)$, из (11) при $(x, y) \in D''_{ij}$, $i = \overline{0, n-2}$, $j = \overline{0, m-1}$, получаем

$$\left|\mathscr{E}^{1,0}_{n,m}(f; x, y)\right| \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x) H_{k,j}(y) \int_0^1 \Omega\left(\frac{\tau}{n} H_{p,i}(x) + \frac{1}{m} H_{1-k,j}(y)\right) d\tau. \tag{12}$$

Учитывая выпуклость вверх модуля непрерывности $\Omega(t)$ и соотношение (7), из (12) имеем

$$\left|\mathscr{E}^{1,0}_{n,m}(f; x, y)\right| \le n \sum_{p=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} H_{k,j}(y) \int_0^{n^{-1}H_{p,i}(x)} \Omega\left(u + \frac{1}{m} H_{1-k,j}(y)\right) du \le$$

$$\le n \sum_{p=0}^{1} \int_0^{n^{-1}H_{p,i}(x)} \Omega\left(u + \frac{2}{m} H_{0,j}(y) H_{1,j}(y)\right) du \le \Psi_i(x), \tag{13}$$

где

$$\Psi_i(x) \overset{\text{df}}{=} n \sum_{p=0}^{1} \int_0^{n^{-1}H_{p,i}(x)} \Omega\left(u + \frac{1}{2m}\right) du.$$

Очевидно, что функция $\Psi_i(x)$ непрерывна на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Проводя обычным образом ее исследование на экстремум на указанном множестве, получаем

$$\max\left\{\Psi_i(x) : x_i \le x \le x_{i+1}\right\} = \Psi_i(x_{i+k}), \qquad k = 0, 1. \tag{14}$$

Тогда из (12)–(14) имеем

$$\left|\mathscr{E}^{1,0}_{n,m}(f; x, y)\right| \le n \int_{1/(2m)}^{1/n + 1/(2m)} \Omega(t)\, dt, \tag{15}$$

где $(x, y) \in D''_{ij}$, $i = \overline{0, n-2}$, $j = \overline{0, m-1}$. На основании подобных рассуждений можно убедиться в справедливости оценок, аналогичных (15), когда $(x, y) \in D''_{n-1,j}$, $j = \overline{0, m-1}$. Из изложенного выше следует оценка сверху

$$E^{1,0}_{n,m}\left(C^{1,0}_{D,\rho_H}(\Omega)\right) =$$

$$= \sup\left\{\left\|\mathscr{E}^{1,0}_{n,m}(f)\right\|_C : f \in C^{1,0}_{D,\rho_H}(\Omega)\right\} \le n \int_{1/(2m)}^{1/n+1/(2m)} \Omega(t)\, dt. \tag{16}$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию $\gamma(x, y)$, которая задается на множестве $\left[0, \frac{2}{n}\right] \times \left[0, \frac{1}{m}\right]$ следующим образом:

$$\gamma(x, y) \overset{\text{df}}{=} \Omega\left((-1)^i\left(\frac{1}{n} - x\right) + (-1)^j\left(\frac{1}{2m} - y\right)\right),$$

если $(x, y) \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{2m}, \frac{j+1}{2m}\right]$, $i, j = 0, 1$. При этом имеют место равенства

$$\gamma\left(x+\frac{2}{n}, y\right) = \gamma\left(x, y+\frac{1}{m}\right) = \gamma(x, y),$$

т. е. $\gamma(x, y)$ является $\frac{2}{n}$-периодической по переменной x и $\frac{1}{m}$-периодической по переменной y. Полагая

$$\gamma_*(x, y) \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma(x, y) - n \int\limits_{1/(2m)}^{1/n+1/(2m)} \Omega(t)\,dt,$$

вводим функцию

$$f_1(x, y) \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_0^x \gamma_*(t, y)\,dt, \qquad (x, y) \in D.$$

Путем стандартных рассуждений можно убедиться в принадлежности $f_1(x, y)$ классу $C^{1,0}_{D,\rho_H}(\Omega)$. После несложных вычислений получаем $f_1(x_i, y_j) = 0$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, m}$. Значит, $S_{1,1}(f_1; x, y) \equiv 0$ для любых точек $(x, y) \in D$. Тогда

$$E^{1,0}_{n,m}\left(C^{1,0}_{D,\rho_H}(\Omega)\right) \geq \left\| \mathscr{E}^{1,0}_{n,m}(f_1) \right\|_C = \left\| f_1^{(1,0)} \right\|_C \geq$$

$$\geq \left| f_1^{(1,0)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2m}\right) \right| = n \int\limits_{1/(2m)}^{1/n+1/(2m)} \Omega(t)\,dt. \tag{17}$$

Требуемое равенство (2) получим, сопоставив оценку сверху (16) и оценку снизу (17).

Теорема 2 доказана.

5. ***Доказательство теоремы* 3.** Не уменьшая общности, проведем рассуждения для множеств D'_{ij}, $i = \overline{0, n-2}$, $j = \overline{0, m-2}$, поскольку для множеств $D'_{n-1,j}$, $j = \overline{0, m-2}$, $D'_{i,m-1}$, $i = \overline{0, n-2}$, и $D'_{n-1,m-1}$ ход рассуждений аналогичен. Использовав определение и свойства разделенных разностей функции $f(x, y) \in C^{1,1}_D$ [10], для произвольной точки $(x, y) \in D'_{ij}$ запишем следующие равенства [4]:

$$\mathscr{E}^{1,1}_{n,m}(f; x, y) = f^{(1,1)}(x, y) - S^{(1,1)}_{1,1}(f; x, y) =$$

$$= f^{(1,1)}(x, y) - nm\left[F(x_i, y_j) \pm \sum_{p=0}^{1} f(x_{i+p}, y)\right] = f^{(1,1)}(x, y) -$$

$$- n\sum_{k=0}^{1} H_{k,j}(y)\left[\sum_{p=0}^{1} (-1)^p f(x_{i-p+1}; y_{j-k+1}, y) \pm f(x; y_{j-k+1}, y)\right] =$$

$$= f^{(1,1)}(x, y) - \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x) H_{k,j}(y) f(x_{i-p+1}, x; y_{j-k+1}, y), \tag{18}$$

где $f(x_{i-p+1}; y_{j-k+1}, y)$ и $f(x; y_{j-k+1}, y)$, $k, p = 0, 1$ — частные разделенные разности первого порядка по переменной y, $f(x_{i-p+1}, x; y_{j-k+1}, y)$, $k, p = 0, 1$, — смешанные разделенные разности первого порядка по переменной x и по переменной y. Представляя смешанные разделенные разности в (18) в интегральной форме [10], для произвольной функции $f(x, y) \in C^{1,1}_D$ получаем

$$\mathscr{E}^{1,1}_{n,m}(f;x,y) = \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1\Big[f^{(1,1)}(x,y)-f^{(1,1)}\big(x+t(x_{i-p+1}-x),\,y+\tau(y_{j-k+1}-y)\big)\Big]dt\,d\tau.$$

Используя определение модуля непрерывности, записываем

$$\left|\mathscr{E}^{1,1}_{n,m}(f;x,y)\right| \le$$

$$\le \sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} H_{p,i}(x)H_{k,j}(y)\int_0^1\int_0^1 \omega_{\rho_H}\big(f^{(1,1)};t\left|x_{i-p+1}-x\right|+\tau\left|y_{j-k+1}-y\right|\big)dt\,d\tau, \quad (19)$$

где $(x,y)\in D'_{ij}$, $i=\overline{0,n-2}$, $j=\overline{0,m-2}$.

Обозначим

$$\Psi_{ij}(x,y) \overset{\text{df}}{=} nm\sum_{p=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}\int_0^{n^{-1}H_{p,i}(x)}\int_0^{m^{-1}H_{k,j}(y)}\Omega(u+v)\,du\,dv. \quad (20)$$

Для каждой функции $f(x,y)\in C^{1,1}_{D,\rho_H}(\Omega)$ в силу (19), (20) имеем

$$\left|\mathscr{E}^{1,1}_{n,m}(f;x,y)\right| \le \Psi_{ij}(x,y), \quad (21)$$

где $(x,y)\in D'_{ij}$, $i=\overline{0,n-2}$, $j=\overline{0,m-2}$. Исследуя функцию $\Psi_{ij}(x,y)$ на экстремум на множестве $\overline{D'_{ij}}$, где $\overline{D'_{ij}}$ — замыкание D'_{ij}, получаем

$$\max\left\{\Psi_{ij}(x,y):(x,y)\in\overline{D'_{ij}}\right\} = \Psi_{ij}(x_{i+p},y_{j+k}) =$$

$$= nm\int_0^{1/n}\int_0^{1/m}\Omega(u+v)\,du\,dv, \qquad p,k=0,1. \quad (22)$$

Учитывая (21), (22) и изложенное в начале данного пункта относительно аналогичного характера рассуждений на множествах $D'_{n-1,j}$, $j=\overline{0,m-2}$, $D'_{i,m-1}$, $i=\overline{0,n-2}$, и $D'_{n-1,m-1}$, записываем оценку сверху

$$E^{1,1}_{n,m}\big(C^{1,1}_{D,\rho_H}(\Omega)\big) \le nm\int_0^{1/n}\int_0^{1/m}\Omega(u+v)\,du\,dv. \quad (23)$$

Применяя для вычисления двукратного интеграла стандартные методы математического анализа, из (23) получаем

$$E^{1,1}_{n,m}\big(C^{1,1}_{D,\rho_H}(\Omega)\big) \le$$

$$\le nm\begin{cases}\displaystyle\int_0^{1/n}t\Omega(t)\,dt+\frac{1}{n}\int_{1/n}^{1/m}\Omega(t)\,dt+\int_{1/m}^{1/m+1/n}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-t\right)\Omega(t)\,dt, & m<n,\\[2ex] \displaystyle\int_0^{1/m}t\Omega(t)\,dt+\frac{1}{m}\int_{1/m}^{1/n}\Omega(t)\,dt+\int_{1/n}^{1/n+1/m}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}-t\right)\Omega(t)\,dt, & m>n,\\[2ex] \displaystyle\int_0^{1/n}t\Omega(t)\,dt+\int_{1/n}^{2/n}\left(\frac{2}{n}-t\right)\Omega(t)\,dt, & m=n.\end{cases} \quad (24)$$

Для получения оценки снизу рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y) \overset{\text{df}}{=} \Omega\left((-1)^i\left(\frac{1}{n} - x\right) + (-1)^j\left(\frac{1}{m} - y\right)\right),$$

где $(x, y) \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}\right]$, $i, j = 0, 1$, и

$$\varphi\left(x + \frac{2}{n}, y\right) = \varphi\left(x, y + \frac{2}{m}\right) = \varphi(x, y).$$

Полагая

$$\varphi_*(x, y) \overset{\text{df}}{=} \varphi(x, y) - nm \int\limits_0^{1/n} \int\limits_0^{1/m} \Omega(u + v)\, du\, dv, \qquad (x, y) \in D,$$

вводим функцию

$$f_2(x, y) \overset{\text{df}}{=} \int\limits_0^x \int\limits_0^y \varphi_*(t, \tau)\, dt\, d\tau, \qquad (x, y) \in D.$$

Нетрудно убедиться в принадлежности $f_2(x, y)$ классу $C^{1,1}_{D, \rho_H}(\Omega)$. Учитывая, что $f_2(x_i, y_j) = 0$, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{0, n}$, а значит, $S_{1,1}(f_2; x, y) \equiv 0$, записываем

$$E^{1,1}_{n,m}\left(C^{1,1}_{D, \rho_H}(\Omega)\right) \geq \left\| \mathscr{E}^{1,1}_{n,m}(f_2) \right\|_C \geq \left| f_2^{(1,1)}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \right| = nm \int\limits_0^{1/n} \int\limits_0^{1/m} \Omega(u + v)\, du\, dv.$$

Сравнивая полученную оценку снизу с оценкой сверху (24), получаем требуемое соотношение (4).

Теорема 3 доказана.

1. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 350 с.
2. *Шумилов Б. М.* О локальной аппроксимации билинейными сплайнами // Методы сплайн-функций (вычислительные системы). – 1979. – Вып. 81. – С. 42–47.
3. *Малоземов В. Н.* К полигональной интерполяции // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 5. – С. 537–540.
4. *Вакарчук С. Б.* К интерполяции билинейными сплайнами // Там же. – 1990. – **47**, № 5. – С. 26–30.
5. *Шабозов М. Ш.* Точные оценки одновременного приближения функций двух переменных и их производных билинейными сплайнами // Там же. – 1996. – **59**, № 1. – С. 142–152.
6. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближений. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
7. *Сторчай В. Ф.* Приближение непрерывных функций двух переменных сплайн-функциями в метрике *C* // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1972. – С. 66 – 68.
8. *Сторчай В. Ф.* Приближение непрерывных функций двух переменных многогранными функциями и сплайн-функциями в равномерной метрике // Там же. – 1975. – С. 82 – 89.
9. *Шабозов М. Ш.* О погрешности интерполяции билинейными сплайнами// Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1554 – 1560.
10. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа. – М.: Гостехиздат, 1953. – 528 с.

Получено 17.06.2003