УДК 517.544

І. Т. Денисюк (Луцьк. техн. ун-т)

ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ЛАМЕ В ОБЛАСТЯХ З КУСКОВО-ГЛАДКИМИ МЕЖАМИ

We study the problem of the conjugation of solutions of the Lamé wave equation in domains containing special lines (sets of angular points) and conic points. We show that the solutions of the Lamé wave equation near nonsmoothnesses of boundary surfaces gain power singularities and establish their asymptotics. Taking into account this asymptotics and using introduced elastic retarded potentials of simple and double layer and volume, we reduce the problem to a system of functional equations and formulate conditions of solvability.

Вивчається задача спряження розв'язків хвильового рівняння Ламе в областях, що містять особливі лінії (множини кутових точок) і конічні точки. Показано, що розв'язки хвильового рівняння Ламе поблизу негладкостей межових поверхонь набувають особливостей степеневого характеру, і знайдено їх асимптотику. Враховуючи її та застосовуючи введені до розгляду пружні загаювальні потенціали простого і подвійного шару та об'єму, задачу зведено до системи функціональних рівнянь і сформульовано умови її розв'язності.

Застосування до прикладних стаціонарних задач механіки суцільного середовища задач спряження аналітичних функцій у заданих [1, 2] і афінно перетворених двовимірних областях, а також гармонічних функцій у тривимірних областях з негладкими межами [3] наведено в роботах [4 – 9]. Для розв'язування динамічних задач механіки суцільного середовища в тривимірних областях із негладкими межами, що є важливими як з теоретичної, так і з прикладної точки зору [10, с. 12], необхідно побудувати розв'язок хвильового рівняння Ламе в областях зазначеного типу. Розв'язок тривимірних динамічних задач в областях із гладкими межами в роботі [11] знаходиться за допомогою інтегрального перетворення Лапласа.

Постановка задачі. Нехай V_1 — скінченна однозв'язна область, обмежена поверхнею S, що містить гладкі замкнені особливі лінії (множини кутових точок), які не перетинаються, та конічні точки, $V_0 = R_3 \setminus V_1$, R_3 — тривимірний простір. Побудуємо розв'язок хвильового рівняння Ламе [12]

$$c_{1i}^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u}_i(x,t) - c_{2i}^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{u}_i(x,t) - \frac{\partial^2 \bar{u}_i(x,t)}{\partial t^2} = \bar{f}_i(x,t) \tag{1}$$

у відповідних областях V_i, $i = \overline{0,1}$, при початкових умовах

$$\bar{u}_i(x,t)\big|_{t=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial \bar{u}_i(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{2}$$

і граничних умовах на поверхні S:

в точках гладкості

$$\bar{u}_0^-(x,t) - \bar{u}_1^+(x,t) = 0, \qquad N_{x0}\left[\bar{u}_0^-(x,t)\right] - N_{x1}\left[\bar{u}_1^+(x,t)\right] = 0, \quad x \in S, \tag{3}$$

в особливих точках x_0 поверхні S

$$\lim_{x \to x_0}\left[\bar{u}_0^-(x,t) - \bar{u}_1^+(x,t)\right] = 0, \qquad \lim_{x \to x_0}\left\{N_{x0}\left[\bar{u}_0^-(x,t)\right] - N_{x1}\left[\bar{u}_1^+(x,t)\right]\right\} = 0, \tag{4}$$

де $c_{1i}^2 = \dfrac{\lambda_i + 2\mu_i}{\rho_i}$, $c_{2i}^2 = \dfrac{\mu_i}{\rho_i}$, $\lambda_i = \dfrac{2\nu_i \mu_i}{1 - 2\nu_i}$, $0 < \nu_i < 0{,}5$, $\mu_i \neq \infty$, нормальний оператор $N_{xi}[\ldots]$ діє згідно з правилом

$$N_{xi}[\bar{u}_i(x,t)] = 2\mu_i \frac{\partial \bar{u}_i(x,t)}{\partial n} + \lambda_i[\bar{n},\ \operatorname{div}\bar{u}_i(x,t)] + \mu_i[\bar{n}, \operatorname{rot}\bar{u}_i(x,t)],$$

значення індексу $i = 1$ відповідає величинам області V_1, а значення $i = 0$ — величинам області V_0, $\bar{n}$ — нормаль до поверхні S, зовнішня до області V_1; $\bar{u}_1^{\pm}(x,t)$, $N_{xi}\big[\bar{u}_i^{\pm}(x,t)\big]$ — граничні значення векторних функцій $\bar{u}_i(x,t)$, $N_{xi}[\bar{u}_i(x,t)]$ при підході до поверхні S зі сторони області V_1 (знак „+") або V_0 (знак „–").

При $x \to \infty$ функція $\bar{u}_0(x,t)$ набуває заданого значення, що задовольняє однорідне хвильове рівняння (1), з точністю до двочлена $C_1 t + C_0$ (C_0, C_1 — сталі).

Умови (4) не є тривіальним наслідком умов (3); вони визначають клас розв'язку аналогічно тому, як це має місце в двовимірному випадку в задачі Рімана [13, с. 444].

Коректний розв'язок рівняння Ламе в особливих точках x_0 визначається рівнянням [10, 12]

$$\lim_{\Delta V \to x_0} \iiint_{\Delta V} \left[c_{1i}^2 \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{u}_i(x,t) - c_{2i}^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{u}_i(x,t) - \frac{\partial^2 \bar{u}_i(x,t)}{\partial t^2} - \bar{f}_i(x,t) \right] d\nu = 0, \tag{5}$$

що фізично означає виконання умов рівноваги середовища в особливих точках, тобто при стягуванні області ΔV в точку x_0.

Пружні загаювальні потенціали. Введемо до розгляду пружні загаювальні потенціали на основі розв'язку задачі (1), (2) для миттєвої зосередженої сили, що діє в просторі R_3, наведеного в роботі [12, с. 651], а також [14]. Зазначимо, що в роботі [14] загаювальні потенціали як такі не розглядалися.

Означення 1. *Пружним загаювальним потенціалом простого шару називається інтеграл*

$$\bar{V}(x,t) = \int_0^t d\tau \iint_S \Gamma_1(x,y,t-\tau)\bar{\varphi}_1(y,\tau)\, ds_y, \tag{6}$$

де

$$\Gamma_1(x,y,t-\tau) = \big\| \Gamma_{1kj}(x,y,t-\tau) \big\|,$$

$$\Gamma_{1kj}(x,y,t) = \delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right) U_{kj}^{(1)}(y,x) +$$

$$+ \delta\left(t - \frac{r}{c_2}\right) U_{kj}^{(2)}(y,x) + t\left[H\left(t - \frac{r}{c_1}\right) - H\left(t - \frac{r}{c_2}\right)\right]\frac{1}{r^2} U_{kj}^{(3)}(y,x),$$

$$U_{kj}^{(1)}(y,x) = \frac{1}{4\pi\rho c_1^2} \frac{\partial r}{\partial y_k} \frac{\partial r}{\partial y_j} \frac{1}{r},$$

$$U_{kj}^{(2)}(y,x) = \frac{1}{4\pi\rho c_2^2} \left[\frac{\delta_{kj}}{r} - \frac{\partial r}{\partial y_k} \frac{\partial r}{\partial y_j} \right] \frac{1}{r},$$

$$U_{kj}^{(3)}(y,x) = -\frac{1}{4\pi\rho} \left[\frac{\delta_{kj}}{r} - 3\frac{\partial r}{\partial y_k} \frac{\partial r}{\partial y_j} \right] \frac{1}{r},$$

$\delta(t)$ — *дельта-функція Дірака,* $H(t)$ — *одинична функція Хевісайда,* δ_{kj} —

символ Кронекера, $\overline{\varphi}_1(y,\tau)=\{\varphi_{11}(y,\tau),\varphi_{12}(y,\tau),\varphi_{13}(y,\tau)\}$ — *густина,* $r = |x-y|$, $y=(y_1,y_2,y_3)$.

Означення 2. *Пружним загаювальним потенціалом подвійного шару називається інтеграл*

$$\overline{W}(x,y,t) = \int_0^t d\tau \iint_S \Gamma_2(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_2(y,\tau)\,ds_y, \tag{7}$$

де

$$\Gamma_2(x,y,t-\tau) = \left\|\Gamma_{2kj}(x,y,t-\tau)\right\|,$$

$$\Gamma_{2kj}(x,y,t) = \delta'\left(t-\frac{r}{c_1}\right)T_{kj}^{(4)}(y,x) +$$

$$+\ \delta'\left(t-\frac{r}{c_2}\right)T_{kj}^{(5)}(y,x) + \delta\left(t-\frac{r}{c_1}\right)T_{kj}^{(1)}(y,x) + \delta\left(t-\frac{r}{c_2}\right)T_{kj}^{(2)}(y,x) +$$

$$+\ t\left[H\left(t-\frac{r}{c_1}\right)-H\left(t-\frac{r}{c_2}\right)\right]T_{kj}^{(3)}\frac{1}{r^2}(y,x),$$

$$T_{kj}^{(4)}(y,x) = -\frac{1}{4\pi\rho c_1^2}\left[\lambda n_j + 2\mu\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\right]\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{1}{r},$$

$$T_{kj}^{(5)}(y,x) = -\frac{\mu}{4\pi\rho c_2^2}\left[\delta_{kj}\frac{\partial r}{\partial n(y)}+\frac{\partial r}{\partial y_j}n_k - 2\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\right]\frac{1}{r},$$

$$T_{kj}^{(1)}(y,x) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\rho c_1^2}\left[(\lambda-2\mu)\frac{\partial r}{\partial y_k}n_j(y)-2\mu\frac{\partial r}{\partial y_j}n_k(y)-2\mu\delta_{kj}\frac{\partial r}{\partial n(y)}+12\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\right]\frac{1}{r^2},$$

$$T_{kj}^{(2)}(y,x) = -\frac{\mu}{4\pi\rho c_2^2}\left[3\delta_{kj}\frac{\partial r}{\partial n(y)}+2\frac{\partial r}{\partial y_k}n_j(y)+3\frac{\partial r}{\partial y_j}n_k(y)-12\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\right]\frac{1}{r^2},$$

$$T_{kj}^{(3)}(y,x) = \frac{6\mu}{4\pi\rho}\left[\delta_{kj}\frac{\partial r}{\partial n(y)}+\frac{\partial r}{\partial y_k}n_j(y)+\frac{\partial r}{\partial y_j}n_k(y)-5\frac{\partial r}{\partial y_k}\frac{\partial r}{\partial y_j}\frac{\partial r}{\partial n(y)}\right]\frac{1}{r^2},$$

$\delta'(t)=\dfrac{d}{dt}\delta(t)$, $\overline{\varphi}_2(y,\tau)=\{\varphi_{21}(y,\tau),\varphi_{22}(y,\tau),\varphi_{23}(y,\tau)\}$ — *густина.*

Означення 3. *Пружним загаювальним потенціалом об'єму називається інтеграл*

$$\overline{U}(x,t) = \int_0^t d\tau \iiint_V \Gamma_1(y,x,t-\tau)\overline{\varphi}_3(y,\tau)\,d\nu, \tag{8}$$

де $\overline{\varphi}_3(y,\tau)=\{\varphi_{31}(y,\tau),\varphi_{32}(y,\tau),\varphi_{33}(y,\tau)\}$ — *густина.*

Встановимо умови існування так уведених потенціалів і вивчимо їхні властивості у випадку області, обмеженої кусково-гладкою поверхнею S.

Теорема 1. *Якщо вектор густини* $\overline{\varphi}_2(x,t)$ *пружного загаювального потенціалу подвійного шару* (7) *задовольняє умову Ліпшиця – Гельдера в точках гладкості поверхні* S, *має неперервні обмежені похідні* $\partial\overline{\varphi}_2(x,t)/\partial t$ *і* $\partial^2\overline{\varphi}_2(x,t)/\partial t^2$, *а в особливих точках* $x_0\in S$ *дорівнює нулю та має вигляд*

$$\overline{\varphi}_2(x,t) = O\left(|x-x_0|^{\alpha}\right), \quad \alpha\in(0,1), \tag{9}$$

то пружний загаювальний потенціал подвійного шару (7) *існує, задовольняє однорідне хвильове рівняння Ламе, що відповідає* (1), *з початковими умовами* (2) *і в точках гладкості поверхні граничні значення потенціалу визначаються рівністю*

$$\overline{W}^{\pm}(x,t) = \pm\overline{\varphi}_2(x,t) + \overline{W}(x,t), \tag{10}$$

де $\overline{W}(x,t)$ *— пряме значення потенціалу в точці* x, $\overline{W}^{\pm}(x,t)$ *— граничні значення потенціалу при підході до точки* $x \in S$ *зі сторони області* V_1 (*знак* „+") *або* V_0 (*знак* „–").

Доведення. Нехай поверхня S містить одну особливу гладку лінію L і точка x_1 ($x_1 \in S$, $x_1 \notin L$) є точкою гладкості поверхні S. Оточимо особливу лінію трубчастою поверхнею радіуса $R_0 < R_1$, де R_1 — відстань від x_1 до особливої лінії.

Подамо інтеграл (7) у вигляді суми

$$\overline{W}(x,t) = \overline{W}_1(x,t) + \overline{W}_2(x,t), \tag{11}$$

$$\overline{W}_1(x,t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_1} \Gamma_2(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_2(y,\tau)\,ds_y,$$

$$\overline{W}_2(x,t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_2} \Gamma_2(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_2(y,\tau)\,ds_y,$$

де S_1 — частина поверхні S, що лежить поза трубчастою поверхнею, а S_2 — всередині неї.

Перший інтеграл формули (11) є вектором з компонентами $\left(k=\overline{1,3}\right)$, які в результаті інтегрування за змінною τ згідно з [15] набирають вигляду

$$\iint_S \sum_{j=1}^{3} \left\{ -T_{kj}^{(4)}(y,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{2j}\left(y, t-\frac{r}{c_1}\right) - T_{kj}^{(5)}(y,x)\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{2j}\left(y, t-\frac{r}{c_2}\right) + \right.$$
$$+ T_{kj}^{(1)}(y,x)\varphi_{2j}\left(y, t-\frac{r}{c_1}\right) + T_{kj}^{(2)}(y,x)\varphi_{2j}\left(y, t-\frac{r}{c_2}\right) +$$
$$\left. + T_{kj}^{(3)}(y,x)\int_{1/c_1}^{1/c_2} \theta\varphi_{2j}(y, t-r\theta)\,d\theta \right\} ds_y \tag{12}$$

при умові, що $t \ge \max\left\{\frac{r}{c_1}, \frac{r}{c_2}\right\}$, а другий інтеграл має компоненти такого самого вигляду, необхідно лише поверхню інтегрування S_1 замінити на S_2.

Згідно з формулою Лагранжа [16, с. 226] маємо

$$\varphi_{2j}\left(y, t-\frac{r}{c_1}\right) = \varphi_{2j}(y,t) - \varphi'_{2j}\left(y, t+(\varepsilon_{1j}-1)\frac{r}{c_1}\right)\frac{r}{c_1},$$

де $0 < \varepsilon_{1j} < 1$.

Записуючи аналогічні зображення для інших функцій і їхніх похідних та враховуючи тотожність

$$-T_{kj}^{(4)}(y,x) - T_{kj}^{(5)}(y,x) + T_{kj}^{(1)}(y,x)\frac{r}{c_1} + T_{kj}^{(2)}(y,x)\frac{r}{c_2} + T_{kj}^{(3)}(y,x)\frac{r}{3}\left(\frac{1}{c_2^3} - \frac{1}{c_1^3}\right) \equiv 0,$$

отримуємо

$$\overline{W_1}(x,t) = \iint_{S_1} \left\| T_{kj}^{(1)}(y,x) + T_{kj}^{(2)}(y,x) + T_{kj}^{(3)}(y,x)\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}\right)\right\| \overline{\varphi}_2(y,t)\,ds_y -$$

$$- \iint_{S_1} \left\langle \left\{ \left\| T_{kj}^{(4)}(y,x) \right\| \frac{\partial}{\partial t}\overline{\varphi}_2\left[y, t + (\varepsilon_{21} - 1)\,\frac{r}{c_1}\right]\frac{1}{c_1} + \right.\right.$$

$$\left. + \left\| T_{kj}^{(5)}(y,x) \right\| \frac{\partial}{\partial t}\overline{\varphi}_2\left[y, t + (\varepsilon_{22} - 1)\,\frac{r}{c_2}\right]\frac{1}{c_2} \right\} r +$$

$$+ \left\{ \left\| T_{kj}^{(1)}(y,x) \right\| \frac{1}{c_1^2}(1 - \varepsilon_{21})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{\varphi}_2\left[y, t + (\varepsilon_{221} - 1)(1 - \varepsilon_{21})\,\frac{r}{c_1}\right] + \right.$$

$$+ \left\| T_{kj}^{(2)}(y,x) \right\| \frac{1}{c_2^2}(1 - \varepsilon_{22})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\overline{\varphi}_2\left[y, t + (\varepsilon_{222} - 1)(1 - \varepsilon_{22})\,\frac{r}{c_2}\right] +$$

$$\left.\left. + \left\| T_{kj}^{(3)}(y,x) \right\| (1 - \varepsilon_{25}) \int_{1/c_1}^{1/c_2} \theta^3 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\overline{\varphi}_2[y, t + (1 - \varepsilon_{25})(\varepsilon_{225} - 1) r\theta]\,d\theta \right\} r^2 \right\rangle ds_y, \quad (13)$$

де

$$\varepsilon_{2g} = \begin{cases} \varepsilon_{2g1}, & j = 1, \\ \varepsilon_{2g2}, & j = 2, \quad g = 1, 2, 5, \\ \varepsilon_{2g3}, & j = 3, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{22g} = \begin{cases} \varepsilon_{22g1}, & j = 1, \\ \varepsilon_{22g2}, & j = 2, \quad 0 < \varepsilon_{gj} < 1, \quad 0 < \varepsilon_{22g} < 1. \\ \varepsilon_{22g3}, & j = 3, \end{cases}$$

Перший інтеграл у (13) є відомим узагальненим пружним потенціалом подвійного шару [17, с. 549] $\overline{W_0}(x,t) = \iint_{S_1} \Gamma_{20}(x,y)\overline{\varphi}_2(y,t)\,ds_y$ і має граничні значення при прямуванні точки x до поверхні S_1

$$\overline{W_0}^{\pm}(x,t) = \mp\overline{\varphi}_2(x,t) + \overline{W_0}(x,t). \quad (14)$$

Другий інтеграл зображення (13) має неперервну підінтегральну функцію і є неперервною функцією при переході точки x через точку гладкості поверхні S [17].

Інтеграл $\overline{W_2}(x,t)$ формули (11) обчислюється для $x \in S_1$ шляхом переходу до змінних $\rho, s, \theta,$ що є криволінійними координатами в околі кривої L [3], при врахуванні умови (9) як невласний інтеграл.

Таким чином, інтеграл (7) існує, а враховуючи зображення (11), (13), (14) і групуючи доданки, отримуємо формулу (10).

Нехай поверхня S містить конічну точку, що є вершиною конічної поверхні з прямолінійними твірними і гладкою криволінійною напрямною. Тоді трубчасту поверхню необхідно замінити сферичною з центром в особливій точці при описаній вище схемі доведення з використанням локальних координат, пов'язаних із конічною точкою [3].

Аналогічне доведення використовується при наявності скінченного числа особливих ліній L_j, $j = \overline{1, N}$, які не перетинаються, і скінченного числа конічних точок O_k, $k = \overline{1, m}$, $O_k \notin L_j$.

Безпосередня підстановка (7) в однорідне хвильове рівняння Ламе і умови (2) показує, що вони задовольняються.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Якщо в точках гладкості поверхні* S *густина* $\overline{\varphi}_1(x, t)$ *пружного загаювального потенціалу простого шару* $\overline{V}(x, t)$ (6) *задовольняє умову Ліпшиця – Гельдера, має неперервні обмежені похідні* $\dfrac{\partial \overline{\varphi}_1(x, t)}{\partial t}$ *і* $\dfrac{\partial^2 \overline{\varphi}_1(x, t)}{\partial t^2}$, *а в особливих точках* x_0 *прямує до нескінченності і набуває асимптотичного зображення*

$$\overline{\varphi}_1(x, t) = O\left(\frac{1}{|x - x_0|^\alpha}\right), \quad \alpha \in (0, 1), \tag{15}$$

то потенціал існує, є неперервною функцією при переході точки x *через точку гладкості поверхні, задовольняє однорідне хвильове рівняння Ламе* (1) *і умови* (2) *і в точках гладкості поверхні* S *граничні значення нормального оператора від пружного загаювального потенціалу простого шару такі:*

$$N_x^{\pm}\left[\overline{V}(x, t)\right] = \pm\overline{\varphi}_1(x, t) + N_x\left[\overline{V}(x, t)\right], \tag{16}$$

де $N_x\left[\overline{V}(x, t)\right]$ — *пряме значення нормального оператора від потенціалу на поверхні.*

Доведення. Нехай поверхня S містить одну особливу гладку лінію. Як і при доведенні теореми 1, введемо трубчасту поверхню, що охоплює особливу лінію. Тоді

$$\overline{V}(x, t) = \overline{V}_1(x, t) + \overline{V}_2(x, t), \tag{17}$$

$$\overline{V}_1(x, t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_1} \Gamma_1(x, y, t - \tau)\overline{\varphi}_1(y, \tau)\, ds_y,$$

$$\overline{V}_2(x, t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_2} \Gamma_1(x, y, t - \tau)\overline{\varphi}_1(y, \tau)\, ds_y.$$

Вектор $\overline{V}_1(x, t)$ після інтегрування по τ згідно з [15] і застосування формули Лагранжа, як і при доведенні теореми 1, набирає вигляду

$$\begin{aligned}\overline{V}_1(x, t) = {} & \iint_{S_1} \left\| U_{kj}^{(1)}(y, x) + U_{kj}^{(2)}(y, x) + U_{kj}^{(3)}(y, x)\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}\right)\right\| \overline{\varphi}_1(y, \tau)\, ds_y + \\ & + \iint_{S_1} \left\{ \left\| U_{kj}^{(1)}(y, x)\right\| \frac{\partial}{\partial t}\overline{\varphi}_1\left[y, t + (\varepsilon_{11} - 1)\frac{r}{c_1}\right]\frac{1}{c_1} + \right. \\ & + \left\| U_{kj}^{(2)}(y, x)\right\| \frac{\partial}{\partial t}\overline{\varphi}_1\left[y, t + (\varepsilon_{12} - 1)\frac{r}{c_2}\right]\frac{1}{c_2} + \\ & \left. + \left\| U_{kj}^{(3)}(y, x)\right\| \int_{1/c_1}^{1/c_2} \frac{\partial}{\partial t}\overline{\varphi}_1[y, t + (\varepsilon_{15} - 1)r\theta]\, d\theta \right\} r\, ds_y,\end{aligned} \tag{18}$$

де

$$\varepsilon_{1h} = \begin{cases} \varepsilon_{1h1}, & j = 1, \\ \varepsilon_{1h2}, & j = 2, \quad h = 1, 2, 5, \quad 0 < \varepsilon_{1hj} < 1. \\ \varepsilon_{1h3}, & j = 3, \end{cases}$$

Перший доданок у правій частині (18) є відомим узагальненим пружним потенціалом простого шару [17, с. 547], що зберігає неперервність при переході через точку гладкості поверхні S_1. Другий інтеграл (18), що має неперервну підінтегральну функцію, є неперервною функцією при $x \in S_1$.

Інтеграл $\overline{V}_2(x, t)$ обчислюється за допомогою зв'язаних із кривою криволінійних координат ρ, s, θ [3] при врахуванні умови (15) як невласний.

Діючи оператором $N_x[\ ]$ на рівності (17), (18) і враховуючи відомі граничні значення нормального оператора від узагальненого потенціалу простого шару [17, с. 554], неперервність нормального оператора від другого інтеграла зображення (17), переконуємося, що співвідношення (16) виконується.

У випадку конічної точки також замість трубчастої поверхні беремо сферу при зазначеній схемі доведення. Аналогічно проводиться доведення для скінченного числа особливих ліній, що не перетинаються, і конічних точок.

При безпосередній підстановці (6) у (1) і (2) бачимо, що вони задовольняються.

Теорему доведено.

Теорема 3. *Об'ємний пружний загаювальний потенціал* (8) *із густиною* $\overline{\varphi}_3(x, t) = -\frac{1}{2}\bar{f}(x, t)$ *є розв'язком неоднорідного хвильового рівняння Ламе* (1) *з умовами* (2).

Доведення. Виконаємо в (8) інтегрування по τ згідно з [15] і подамо потенціал, як і в роботі [18], у вигляді

$$U_k(x,t) = -\frac{1}{2}\iiint\limits_{V\setminus E}\Bigg[\left\|U_{kj}^{(1)}(y,x)\right\|\bar{f}\left(y, t-\frac{r}{c_1}\right) +$$

$$+ \left\|U_{kj}^{(2)}(y,x)\right\|\bar{f}\left(y, t-\frac{r}{c_2}\right) + \left\|U_{kj}^{(3)}(y,x)\right\|\int\limits_{1/c_1}^{1/c_2}\theta\bar{f}(y, t-r\theta)r\theta\Bigg]d\nu_y -$$

$$-\frac{1}{2}\iiint\limits_{E}\Bigg\{\left\|U_{kj}^{(1)}(y,x)\right\|\left[\bar{f}\left(y, t-\frac{r}{c_1}\right) - f(y,t)\right] +$$

$$+ \left\|U_{kj}^{(2)}(y,x)\right\|\left[\bar{f}\left(y, t-\frac{r}{c_2}\right) - \bar{f}(y,t)\right] +$$

$$+ \left\|U_{kj}^{(3)}(y,x)\right\|\int\limits_{1/c_1}^{1/c_2}\theta\left[\bar{f}(y, t-r\theta) - \bar{f}(y,t)\right]d\theta\, d\nu_y -$$

$$-\frac{1}{2}\iiint\limits_{E}\left[\left\|U_{kj}^{(1)}(y,x) + U_{kj}^{(2)}(y,x) + U_{kj}^{(3)}(y,x)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c_2^2} - \frac{1}{c_1^2}\right)\right\|\bar{f}(y,t)\right]d\nu_y, \qquad (19)$$

де $E = E(x, \varepsilon)$ — куля з центром у точці x радіуса ε.

Перший доданок має неперервні частинні похідні другого порядку і задовольняє однорідне хвильове рівняння Ламе, другий інтеграл є двічі диференційовною функцією, а третій задовольняє неоднорідне рівняння Ламе з правою частиною $\bar{f}(x,t)$ [17, с. 554].

Підставляючи потенціал (8) у формі (19) у рівняння (1) і граничні умови (2) і спрямовуючи радіус ε до 0, одержуємо твердження теореми.

Теорему доведено.

Теорема 4 (Ляпунова – Таубера). *Якщо густина* $\overline{\varphi}_2(x,t)$ *пружного загаювального потенціалу подвійного шару задовольняє умови теореми* 1 *і існують граничні значення нормального оператора від пружного загаювального потенціалу подвійного шару з однієї сторони поверхні* S *в її точці гладкості, то вони існують і з іншої сторони і виконується рівність*

$$N_{x0}^{-}\left[\overline{W}(x,t)\right] = N_{x1}^{+}\left[\overline{W}(x,t)\right]. \tag{20}$$

Доведення. Розглянемо, як і при доведенні теореми 1, спочатку випадок наявності на поверхні S особливої лінії. Тоді нормальний оператор від пружного загаювального потенціалу подвійного шару зображується згідно з формулою (11) сумою величин $N_x\left[\overline{W}_1(x,t)\right]$ і $N_x\left[\overline{W}_2(x,t)\right]$.

Перший доданок на основі формули (13) має вигляд суми нормального оператора від узагальненого пружного потенціалу подвійного шару $N_x\left[\overline{W}_0(x,t)\right]$ [17] і нормального оператора від інтеграла з неперервною підінтегральною функцією. Згідно з [17, с. 554], якщо існує граничне значення величини $N_x\left[\overline{W}_0(x,t)\right]$ на одній стороні поверхні S_1, то існує граничне значення на іншій стороні, що збігається з першим,

$$N_{x0}^{-}\left[\overline{W}_0(x,t)\right] = N_{x1}^{+}\left[\overline{W}_0(x,t)\right], \tag{21}$$

а нормальний оператор від другого інтеграла при $x \in S_1$ є неперервною функцією при переході через точку гладкості такої поверхні.

Другий доданок $N_x\left[\overline{W}_2(x,t)\right]$ обчислюється шляхом переходу до змінних ρ, s, зв'язаних з особливою лінією [3], при $x \in S_1$ як сингулярний інтеграл, і, таким чином, з огляду на (21) одержуємо твердження теореми. Схема доведення у випадку наявності на поверхні поділу конічної точки, а також для скінченного числа особливих ліній, які не перетинаються, і конічних точок, є аналогічною.

Теорему доведено.

Розв'язність задачі. Знайдемо асимптотику розв'язків хвильового рівняння Ламе поблизу особливих точок поверхні S.

Лема 1. *Асимптотичні зображення розв'язку однорідного хвильового рівняння Ламе* (1) *і нормального оператора від нього поблизу особливої лінії поверхні* S *збігаються з асимптотикою розв'язку стаціонарного рівняння Ламе і нормального оператора від нього відповідно і мають вигляд*

$$\bar{u}(x,t) = \left\{u_\rho, u_\theta, u_s\right\},$$

$$u_\rho = \sum_{q=1}^{4}\left(\rho^{m_q}A_q\right) + o\left(\rho^{m_0}\right), \quad u_\theta = \sum_{q=1}^{4}\left(\rho^{m_q}B_q\right) + o\left(\rho^{m_0}\right), \quad u_s = \rho^{m_5}C + o\left(\rho^{m_5}\right),$$

$$\overline{N}_x[\bar{u}(x,t)] = \left\{\tau_{\rho\theta}, \sigma_\theta, \tau_{\theta s}\right\}, \quad \tau_{\rho\theta} = \mu\sum_{q=1}^{4}\left(\rho^{m_q-1}\left[\left(m_q-1\right)B_q + \frac{\partial A_q}{\partial\theta}\right] + O(1)\right), \tag{22}$$

$$\sigma_\theta = 2\mu\sum_{q=1}^{4}\left(\rho^{m_q-1}\left\{\left[\beta\left(1+m_q\right)+1\right]A_q + (\beta+1)\frac{\partial B_q}{\partial\theta}\right\} + O(1)\right),$$

$$\tau_{\theta s} = \mu\rho^{m_5-1}\frac{\partial C}{\partial\theta} + O(1),$$

де

$$A_q = \left(m_q-\kappa\right)a_{1q}(s)\sin\left(m_q-1\right)\theta + \left(\kappa-m_q\right)b_{1q}(s)\cos\left(m_q-1\right)\theta +$$
$$+ c_{1q}(s)\sin\left(m_q+1\right)\theta - d_{1q}(s)\cos\left(m_q+1\right)\theta,$$
$$B_q = \left(m_q+\kappa\right)a_{1q}(s)\cos\left(m_q-1\right)\theta +$$
$$+ \left(m_q+\kappa\right)b_{1q}(s)\sin\left(m_q-1\right)\theta + c_{1q}(s)\cos\left(m_q+1\right)\theta + d_{1q}(s)\sin\left(m_q+1\right)\theta,$$
$$C = g_1(s)\cos m_5\theta + h_1(s)\sin m_5\theta, \quad \beta = \frac{\nu}{1-2\nu}, \quad m_5 = \frac{\pi}{2\pi-\omega},$$
$$\mu^* = \frac{\kappa_1\gamma-\kappa_0}{1-\gamma}, \quad \kappa_i = 3-4\nu_i, \quad i=\overline{0,1}, \quad \gamma = \frac{\mu_0}{\mu_1}, \quad \omega(s) = \theta_1(s)-\theta_2(s)$$

— *кут розхилу поверхні* S *в точці з дуговою координатою* s *особливої лінії* L; $m_q\in(0,1)$, $q=\overline{1,4}$, *і є коренями характеристичних рівнянь*

$$\sin m_q\omega = \pm m_q\sin\omega, \quad \mu^*\sin m_q\omega = \pm m_q\sin\omega, \quad q=\overline{1,4}, \tag{23}$$

$m_0=\max\{m_1;m_2;m_3;m_4\}$; *формули* (22) *не мають ідентифікуючого індексу* $i=\overline{0,1}$.

Доведення. Однорідне хвильове рівняння Ламе (1) є інваріантним відносно перетворення

$$x_1' = B^*x_1, \quad x_2' = B^*x_2, \quad x_3' = B^*x_3, \quad t' = B^*t.$$

Враховуючи лінійність граничних умов (3), отримуємо

$$u_j(x_1,x_2,x_3,t) = A^*u_j\left(B^*x_1,B^*x_2,B^*x_3,B^*t\right), \quad A^* = A^*\left(B^*\right), \quad j=\overline{1,3}. \tag{24}$$

Диференціюючи (24) по B^*, одержуємо систему рівнянь

$$\left(\mathrm{grad}\,u_j,\bar r\right) + \frac{\partial u_j}{\partial t} = -\frac{B^*}{A^*}\frac{\partial A^*}{\partial B^*}u_j,$$

розв'язок якої

$$u_j = x_1^{m_j}\varphi_j\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_1}{x_3},\frac{x_1}{t}\right). \tag{25}$$

Підставляючи зображення декартових координат в околі особливої лінії за допомогою криволінійних координат ρ,θ,s [3] у (25), одержуємо формули для компонент вектора $\bar u$ розв'язку хвильового рівняння Ламе:

$$u_\rho = \rho^{m_1}A\left(\theta,s,\frac{\rho}{t}\right), \quad u_\theta = \rho^{m_2}B\left(\theta,s,\frac{\rho}{t}\right), \quad u_s = \rho^{m_3}C\left(\theta,s,\frac{\rho}{t}\right), \quad m_j=m_j(s,t). \tag{26}$$

З рівняння (5) на основі (26) знаходимо системи диференціальних рівнянь, що визначають невідомі величини і збігаються з наведеними в роботах [6, 19]. Корені характеристичних рівнянь (23) детально досліджено в [20].

Лему доведено.

Лема 2. *Асимптотики розв'язків однорідних хвильового і стаціонарного рівнянь Ламе, а також нормального оператора від них поблизу конічної точки поверхні* S *збігаються і мають такий вигляд у локальних координатах* ρ_1, θ_1, s_1, *пов'язаних з конічною точкою* [3]:

$$\bar{u}(x,t) = \left\{u_{\rho_1}, u_{\theta_1}, u_{s_1}\right\},$$

$$u_{\rho_1} = \sum_{g=1}^{l}\left(\rho_1^{m_{kg}} A_{kg}\right) + o\left(\rho_1^{m_{k0}}\right), \quad u_{\theta_1} = \sum_{g=1}^{l}\left(\rho_1^{m_{kg}} B_{kg}\right) + o\left(\rho_1^{m_{k0}}\right),$$

$$u_{s_1} = \sum_{g=1}^{l}\left(\rho_1^{m_{kg}} C_{kg}\right) + o\left(\rho_1^{m_{k0}}\right), \quad N_x[\bar{u}(x,t)] = \left\{\tau_{\rho_1\theta_1}, \sigma_{\theta_1}, \tau_{\theta_1 s_1}\right\},$$

$$\tau_{\rho_1\theta_1} = \mu\sum_{g=1}^{l}\left(\rho_1^{m_{kg}-1}\left[\left(m_{kg}-1\right)B_{kg} + \frac{\partial A_{kg}}{\partial\theta_1}\right] + O(1)\right), \tag{27}$$

$$\sigma_{\theta_1} = 2\mu\sum_{g=1}^{l}\left\langle\rho_1^{m_{kg}-1}\left\{\left[\beta\left(m_{kg}+2\right)+1\right]A_{kg} + (\beta+1)\frac{\partial B_{kg}}{\partial\theta_1} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta H_0^{-1}\left(\frac{\partial C_{kg}}{\partial s_1}\right) + \beta B_{kg} H_0^{-1}\left(\frac{\partial H_0}{\partial\theta_1}\right)\right\}\right\rangle + O(1), \quad \beta = \frac{\nu}{1-2\nu},$$

$$\tau_{\theta_1 s_1} = \mu\sum_{g=1}^{l}\left[\rho_1^{m_{kg}-1}\left(-H_0^{-1}\left(\frac{\partial H_0}{\partial\theta_1}\right)C_{kg} + \frac{\partial C_{kg}}{\partial\theta_1} + H_0^{-1}\left(\frac{\partial B_{kg}}{\partial s_1}\right)\right)\right] + O(1),$$

де l *— число коренів* $m_{kg}\in(0,1)$ *відповідних характеристичних рівнянь* [7], $m_{k0} = \max\limits_{g=\overline{1,l}} m_{kg}$, H_0, A_{kg}, B_{kg}, C_{kg} *наведено в роботі* [7].

Доведення проводиться на основі формул (25) і подання декартових координат криволінійними координатами ρ_1, θ_1, s_1 [3], що детально наведено в [7] і використано для конкретних фізичних задач у роботах [19, 21].

Для подальшого необхідними є величини

$$A_{1k} = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{p=1}^{2}\left|U_{0jk}^{(p)}(y,x) - U_{1jk}^{(p)}(y,x)\right| + \delta_1\left|U_{0jk}^{(3)}(y,x) - U_{1jk}^{(3)}(y,x)\right|\right\}ds_y,$$

$$A_{2k} = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{p=1,2,4,5}\left|T_{0kj}^{(p)}(y,x) - T_{1kj}^{(p)}(y,x)\right| + \right.$$

$$\left. + r^2\delta_1\left|T_{0jk}^{(3)}(y,x) - T_{1kj}^{(3)}(y,x)\right|\right\}ds_y,$$

$$\alpha_{1k} = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{s=1}^{2}\left[\left|T_{1kj}^{(s)}(y,x)\right|\delta_{s+1}\right]r + \left|U_{1kj}^{(3)}(y,x)\right|(\delta_4+\delta_5)r^2\right\}ds_y,$$

$$\alpha_{2k} = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{g=1}^{2}\left[\left|T_{1kj}^{(g)}(y,x)\right|\delta_{g+1}\right]r + \right.$$

$$\left. + \sum_{g=4}^{5}\left[\left|T_{1kj}^{(g)}(y,x)\right|\delta_{g-2}\right] + \left|T_{1kj}^{(3)}(y,x)\right|(\delta_4+\delta_5)r^2\right\}ds_y, \tag{28}$$

$$B_{1k} = 0{,}5\iint\limits_S\left\{\sum_{g=1,2,4,5}\left|P_{0kj}^{(g)}(y,x) - P_{1kj}^{(g)}(y,x)\right| + \left|P_{0kj}^{(3)}(y,x) - P_{1kj}^{(3)}(y,x)\right|\delta_1 r^2\right\}ds_y,$$

$$B_{2k} = 0{,}5\iint\limits_S \sum_{j=1}^{3}\left\{\sum_{g=1}^{6}\left|G_{0kj}^{(g)}(y,x) - G_{1kj}^{(g)}(y,x)\right| + \left|G_{0kj}^{(7)}(y,x) - G_{1kj}^{(3)}(y,x)\right|\delta_1 r^2\right\}ds_y,$$

$$\alpha_{3k} = 0{,}5 \iint_S \sum_{j=1}^{3} \left\{ \sum_{s=1}^{2} \left[\left| P_{1kj}^{(s)}(y, x) \right| \delta_{s+1} \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=4}^{5} \left[\left| P_{1kj}^{(s)}(y, x) \right| \delta_{7-s} \right] + \left| P_{1kj}^{(3)}(y, x) \right| (\delta_4 + \delta_5) r^2 \right\} ds_y,$$

$$\alpha_{4k} = 0{,}5 \iint_S \sum_{j=1}^{3} \left\{ \sum_{p=1}^{2} \left[\left| G_{1kj}^{(p)}(y, x) \right| \delta_{p+1} \right] r + \sum_{g=4,6} \left[\left| G_{1kj}^{(g)}(y, x) \right| \delta_2 \right] r + \right.$$

$$\left. + \sum_{g=3,5} \left[\left| G_{1kj}^{(g)}(y, x) \right| \delta_3 \right] r + \left| G_{1kj}^{(7)}(y, x) \right| (\delta_4 + \delta_5) r^2 \right\} ds_y, \quad k = \overline{1, 3},$$

де $G_{1kj}^{(g)}(y, x)$, $g = \overline{1, 7}$, — вирази, що визначають елементи матриці

$$N_{xi}[\Gamma_{2i}(x, y, t)] = \left\| \delta^n \left(t - \frac{r}{c_{1i}} \right) G_{ikj}^{(6)}(y, x) + \delta^n \left(t - \frac{r}{c_{2i}} \right) G_{ikj}^{(5)}(y, x) + \right.$$

$$+ \delta' \left(t - \frac{r}{c_{1i}} \right) G_{ikj}^{(4)}(y, x) + \delta' \left(t - \frac{r}{c_{2i}} \right) G_{ikj}^{(3)}(y, x) + \delta \left(t - \frac{r}{c_{1i}} \right) G_{ikj}^{(1)}(y, x) +$$

$$\left. + \delta \left(t - \frac{r}{c_{2i}} \right) G_{ikj}^{(2)}(y, x) + t \left[H \left(t - \frac{r}{c_{1i}} \right) - H \left(t - \frac{r}{c_{2i}} \right) \right] G_{ikj}^{(7)}(y, x) \right\|, \quad i = \overline{0, 1},$$

$\Gamma_{2i}(x, y, t)$ — матриця загаювального потенціалу подвійного шару, віднесена до області V_i і означена в експлікації формули (7),

$$G_{ikj}^{(6)} = -\frac{1}{c_{1i}} \lambda_i n_j \sum_{q=1}^{3} \left[\frac{\partial r}{\partial x_q} T_{ikj}^{(4)}(y, x) \right] - \frac{\mu_i}{c_{1i}} \sum_{q=1}^{3} \left\{ \left[\frac{\partial r}{\partial x_q} T_{ikj}^{(4)}(y, x) + \frac{\partial r}{\partial x_j} T_{ikq}^{(4)}(y, x) \right] n_q \right\},$$

$$G_{ikj}^{(5)}(y, x) = -\frac{1}{c_{2i}} \lambda_i n_j \sum_{q=1}^{3} \left[\frac{\partial r}{\partial x_q} T_{ikj}^{(5)}(y, x) \right] +$$

$$+ \mu_i \sum_{q=1}^{3} \left\{ \left[\frac{\partial r}{\partial x_q} T_{ikj}^{(5)}(y, x) + \frac{\partial r}{\partial x_j} T_{ikq}^{(5)}(y, x) \right] n_q \right\},$$

$$G_{ikj}^{(4)}(y, x) = \lambda_i n_j \left\{ \left[\sum_{q=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ikq}^{(4)}(y, x) \right] - \frac{1}{c_{1i}} \sum_{q=1}^{3} \left[\frac{\partial r}{\partial x_q} T_{ikq}^{(1)}(y, x) \right] \right\} +$$

$$+ \mu_i \sum_{q=1}^{3} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_q} T_{ikj}^{(4)}(y, x) - \frac{1}{c_{1i}} \frac{\partial r}{\partial x_q} T_{ikj}^{(4)}(y, x) + \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ikj}^{(4)}(y, x) - \frac{1}{c_{1i}} \frac{\partial r}{\partial x_j} T_{ikj}^{(1)}(y, x) \right] n_q \right\},$$

$$G_{ikj}^{(3)}(y, x) = \lambda_i n_j \left\{ \left[\sum_{q=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_q} T_{ikj}^{(5)}(y, x) \right] - \frac{1}{c_{2i}} \sum_{q=1}^{3} \left[\frac{\partial r}{\partial x_q} T_{ikq}^{(2)}(y, x) \right] \right\} +$$

$$+ \mu_i \sum_{q=1}^{3} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_q} T_{ikj}^{(5)}(y, x) - \frac{1}{c_{2i}} \frac{\partial r}{\partial x_j} T_{ikq}^{(2)}(y, x) + \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ikq}^{(5)}(y, x) - \frac{1}{c_{2i}} \frac{\partial r}{\partial x_j} T_{ikq}^{(2)}(y, x) \right] n_q \right\},$$

$$G_{ikj}^{(2)}(y, x) = \lambda_i n_j \left\{ \left[\sum_{q=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_q} T_{ikq}^{(2)}(y, x) \right] - \frac{1}{c_{2i}^2 r} \sum_{q=1}^{3} \left[\frac{\partial r}{\partial x_q} T_{ikq}^{(3)}(y, x) \right] \right\} +$$

$$+\ \mu_i \sum_{q=1}^{3} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_q} T^{(2)}_{ikj}(y,x) + \frac{1}{c^2_{2i} r} \frac{\partial r}{\partial x_q} T^{(3)}_{ikj}(y,x) + \frac{\partial}{\partial x_j} T^{(2)}_{ikq}(y,x) + \frac{1}{c^2_{2i} r} \frac{\partial r}{\partial x_j} T^{(3)}_{ikq}(y,x) \right] n_q \right\},$$

$$G^{(1)}_{ikj}(y,x) \ = \ \lambda_i n_j \left\{ \left[\sum_{q=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_q} T^{(1)}_{ikq}(y,x) \right] - \frac{1}{c^2_{1i} r} \sum_{q=1}^{3} \left[\frac{\partial r}{\partial x_q} T^{(3)}_{ikq}(y,x) \right] \right\} +$$

$$+\ \mu_i \sum_{q=1}^{3} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_q} T^{(1)}_{ikj}(y,x) - \frac{1}{c^2_{1i} r} \frac{\partial r}{\partial x_q} T^{(3)}_{ikj}(y,x) + \frac{\partial}{\partial x_j} T^{(1)}_{ikq}(y,x) - \frac{1}{c^2_{1i} r} \frac{\partial r}{\partial x_j} T^{(3)}_{ikq}(y,x) \right] n_q \right\},$$

$$G^{(7)}_{ikj}(y,x) \ = \ \lambda_i n_j \sum_{q=1}^{3} \left[\frac{\partial}{\partial x_q} \left(\frac{1}{r^2} \right) T^{(3)}_{ikq}(y,x) \right] +$$

$$+\ \mu_i \sum_{q=1}^{3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_q} \left[\frac{1}{r^2} T^{(3)}_{ikj}(y,x) \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{r^2} T^{(3)}_{ikq}(y,x) \right] n_q \right\},$$

$P^{(h)}_{ikj}(y,x)$, $h = \overline{1,5}$, випливає з відповідних виразів $-T^{(h)}_{ikj}(y,x)$ при заміні $\bar{n}(y)$ на $\bar{n}(x)$; $\delta_1 = 0{,}5\left|c_{20}^{-2} - c_{10}^{-2}\right|$, $\delta_2 = \left|c_{10}^{-1} - c_{11}^{-1}\right|$, $\delta_3 = \left|c_{20}^{-1} - c_{21}^{-1}\right|$, $\delta_4 = 0{,}5\left|c_{20}^{-2} - c_{21}^{-2}\right|$, $\delta_5 = 0{,}5\left|c_{10}^{-2} - c_{11}^{-2}\right|$.

Теорема 5. *Якщо існують корені характеристичних рівнянь лем* 1 *і* 2, *що належать інтервалу* $(0,1)$, *частинні похідні по* t *всіх порядків правої частини* $\bar{f}_i(x,t)$ *хвильового рівняння Ламе* (1) *за модулем обмежені одним і тим самим числом*

$$\left| \frac{\partial^n \bar{f}_i(x,t)}{\partial t^n} \right| < L, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{29}$$

при $x \in S$ *і виконуються нерівності*

$$q_{1k} \ = \ A_{1k} + A_{2k} + \alpha_{1k} + \alpha_{2k} \ < \ 1, \quad q_{2k} \ = \ B_{1k} + B_{2k} + \alpha_{3k} + \alpha_{4k} \ < \ 1, \tag{30}$$

де A_{1k}, A_{2k}, α_{1k}, α_{2k}, B_{1k}, B_{2k}, α_{3k}, α_{4k} *визначено формулами* (28), *то існує єдиний сингулярний розв'язок задачі спряження* (1) – (4).

Доведення. Подамо розв'язок хвильового рівняння Ламе у вигляді

$$\bar{u}_i(x,t) \ = \ \bar{u}_{i1}(x,t) \ + \ \bar{u}_{i2}(x,t), \quad i = \overline{0,1}, \tag{31}$$

де $\bar{u}_{i1}(x,t)$ реалізують асимптотику розв'язків, наведену в лемах 1 і 2, а $\bar{u}_{i2}(x,t)$ є неперервними функціями у своїх областях визначення. Перші доданки подаються пружними загаювальними потенціалами простого і подвійного шару з густинами, що реалізують асимптотику, встановлену лемами 1, 2, згідно з методикою, детально описаною в роботі [3].

Функції $\bar{u}_{i2}(x,t)$ беремо, дотримуючись теорем 1 – 3, у вигляді суми пружних загаювальних потенціалів

$$\bar{u}_{i2}(x,t) \ = \ \bar{V}_i(x,t) + \bar{W}_i(x,t) + \bar{U}_i(x,t), \tag{32}$$

де

$$\bar{V}_i(x,t) \ = \ \int_0^t d\tau \iint_S \Gamma_{1i}(x,y,t-\tau) \bar{\varphi}_{1i}(y,\tau)\, ds_y,$$

$$\overline{W_i}(x,t) = \int_0^t d\tau \iint_S \Gamma_{2i}(x,y,t-\tau)\overline{\varphi}_{2i}(y,\tau)\,ds_y,$$

$$\overline{U_i}(x,t) = -0{,}5\int_0^t d\tau \iiint_{V_i} \Gamma_{1i}(x,y,t-\tau)\bar{f}_i(y,\tau)\,dv_y + \overline{U}_{i0}(x,t),$$

де $\overline{\varphi}_{1i}(y,\tau)$, $\overline{\varphi}_{2i}(y,\tau)$ — невідомі густини, $\overline{U}_{00}(x,t)$ — задана функція на нескінченності, яка задовольняє однорідне рівняння Ламе, $\overline{U}_{10}(x,t) \equiv 0$.

Підставимо (31), (32) в умови (3) і виконаємо дії з узагальненими функціями згідно з [15]. Внаслідок довільності густин покладемо

$$\overline{\varphi}_{10}(x,t) = \overline{\varphi}_{11}(x,t), \qquad \overline{\varphi}_{20}(x,t) = \overline{\varphi}_{21}(x,t). \tag{33}$$

В результаті отримаємо систему функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi}_{20}(x,t) + P[\overline{\varphi}_{10}(x,t), \overline{\varphi}_{20}(x,t)] = 0{,}5\,\overline{g}(x,t), \\ &\overline{\varphi}_{10}(x,t) + Q[\overline{\varphi}_{10}(x,t), \overline{\varphi}_{20}(x,t)] = -0{,}5\,\overline{h}(x,t), \end{aligned} \tag{34}$$

де

$$\begin{aligned} P[\overline{\varphi}_{10}(x,t), \overline{\varphi}_{20}(x,t)] = 0{,}5 \iint_S \Bigg\{ \sum_{i=0}^{1} \Bigg[\sum_{p=1}^{2} \left\| U_{ikj}^{(p)}(y,x) \right\| \overline{\varphi}_{10}\left(y, t - \frac{r}{c_{pi}} \right) + \\ + \left\| U_{ikj}^{(3)}(y,x) \right\| \int_{1/c_{1i}}^{1/c_{2i}} \theta \overline{\varphi}_{10}(y, t - r\theta)\, d\theta \Bigg] + \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \Bigg[-\sum_{q=1}^{2} \left\| T_{ikj}^{(q)}(y,x) \right\| \overline{\varphi}_{20}\left(y, t - \frac{r}{c_{qi}} \right) + \\ + \sum_{s=4}^{5} \left\| T_{ikj}^{(s)}(y,x) \right\| \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi}_{20}\left(y, t - \frac{r}{c_{s-3,i}} \right) + \left\| T_{ikj}^{(3)}(y,x) \right\| \int_{1/c_{1i}}^{1/c_{2i}} \theta\, \overline{\varphi}_{20}(y, t - r\theta)\, d\theta \Bigg] \Bigg\} ds_y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q[\overline{\varphi}_{10}(x,t), \overline{\varphi}_{20}(x,t)] = -0{,}5 \iint_S \Bigg\{ \sum_{i=0}^{1} \Bigg[\sum_{q=1}^{2} \left\| P_{ikj}^{(q)}(y,x) \right\| \overline{\varphi}_{10}\left(y, t - \frac{r}{c_{qi}} \right) - \\ - \sum_{s=4}^{5} \left\| P_{ikj}^{(s)}(y,x) \right\| \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi}_{10}\left(y, t - \frac{r}{c_{s-3,i}} \right) + \left\| P_{ikj}^{(3)}(y,x) \right\| \int_{1/c_{1i}}^{1/c_{2i}} \theta \overline{\varphi}_{10}(y, t - r\theta)\, d\theta \Bigg] + \\ + \sum_{i=0}^{1} (-1)^i \Bigg[\sum_{q=1}^{2} \left\| G_{ikj}^{(q)}(y,x) \right\| \overline{\varphi}_{20}\left(y, t - \frac{r}{c_{qi}} \right) - \sum_{q=3}^{4} \left\| G_{ikj}^{(q)}(y,x) \right\| \frac{\partial}{\partial t} \overline{\varphi}_{20}\left(y, t - \frac{r}{c_{5-q,i}} \right) + \\ + \left\| G_{ikj}^{(7)}(y,x) \right\| \int_{1/c_{1i}}^{1/c_{2i}} \theta\, \overline{\varphi}_{20}(y, t - r\theta)\, d\theta \Bigg] \Bigg\} ds_y, \end{aligned}$$

$$\overline{g}(x,t) = -\left[\overline{u}_{01}^{-}(x,t) + \overline{U}_0^{-}(x,t) \right] + \left[\overline{u}_{11}^{+}(x,t) + \overline{U}_1^{+}(x,t) \right],$$

$$\overline{h}(x,t) = -N_{x1}^{+}\left[\overline{u}_{11}(x,t) + \overline{U}_1(x,t) \right] - N_{x0}^{-}\left[\overline{u}_{01}(x,t) + \overline{U}_0(x,t) \right].$$

Праві частини рівнянь (34) є неперервними функціями на S, оскільки реалізуються умови (3). Рівняння (34) мають характер інтегро-диференціальних рівнянь за змінною t [22, с. 105] і сингулярних інтегральних рівнянь за змінними $x = (x_1, x_2, x_3)$ [23].

Для розв'язання системи (34) застосуємо метод послідовних наближень [11, 22]:

$$\overline{\varphi}_{20}^{(0)}(x,t) = 0{,}5\overline{g}(x,t), \qquad \overline{\varphi}_{10}^{(0)}(x,t) = -0{,}5\overline{h}(x,t), \tag{35}$$

$$\overline{\varphi}_{20}^{(n)}(x,t) = -P\Big[\overline{\varphi}_{10}^{(n-1)}(x,t), \overline{\varphi}_{20}^{(n-1)}(x,t)\Big] + 0{,}5\overline{g}(x,t),$$

$$\overline{\varphi}_{10}^{(n)}(x,t) = -Q\Big[\overline{\varphi}_{10}^{(n-1)}(x,t), \overline{\varphi}_{20}^{(n-1)}(x,t)\Big] - 0{,}5\overline{h}(x,t), \tag{36}$$

$$\overline{\varphi}_{20}(x,t) = \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_{20}^{(n)}(x,t), \qquad \overline{\varphi}_{10}(x,t) = \lim_{n\to\infty} \overline{\varphi}_{10}^{(n)}(x,t). \tag{37}$$

Збіжність границь (37) є еквівалентною збіжності рядів

$$\begin{aligned} &\overline{\varphi}_{10}^{(0)}(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\overline{\varphi}_{10}^{(n)}(x,t) - \overline{\varphi}_{10}^{(n-1)}(x,t)\Big], \\ &\overline{\varphi}_{20}^{(0)}(x,t) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\overline{\varphi}_{20}^{(n)}(x,t) - \overline{\varphi}_{20}^{(n-1)}(x,t)\Big]. \end{aligned} \tag{38}$$

Переходячи до скалярних компонент рядів (38) при врахуванні умов (29), (30), отримуємо, що вони мажоруються рядами $\sum_{n=1}^{\infty} Lq_{1k}^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} Lq_{2k}^n$, тобто ряди (38) збігаються абсолютно і рівномірно в точках гладкості поверхні S. Виконуючи граничний перехід в (36) при $n\to\infty$, переконуємося, що (35) – (37) є розв'язком системи рівнянь (34).

Нехай система (34) має два розв'язки: $\overline{\varphi}_{10}^{(a)}(x,t)$, $\overline{\varphi}_{20}^{(a)}(x,t)$ і $\overline{\varphi}_{10}^{(b)}(x,t)$, $\overline{\varphi}_{20}^{(b)}(x,t)$. Тоді підставляючи їх в (34) та віднімаючи рівності, отримуємо

$$\begin{aligned} &\overline{u}_2(x,t) + P[\overline{u}_1(x,t), \overline{u}_2(x,t)] = 0, \\ &\overline{u}_1(x,t) + Q[\overline{u}_1(x,t), \overline{u}_2(x,t)] = 0, \end{aligned} \tag{39}$$

де

$$\overline{u}_1(x,t) = \{u_{11}(x,t), u_{12}(x,t), u_{13}(x,t)\} = \overline{\varphi}_{10}^{(a)}(x,t) - \overline{\varphi}_{10}^{(b)}(x,t),$$

$$\overline{u}_2(x,t) = \{u_{21}(x,t), u_{22}(x,t), u_{23}(x,t)\} = \overline{\varphi}_{20}^{(a)}(x,t) - \overline{\varphi}_{20}^{(b)}(x,t).$$

Розв'язки системи (34) є обмеженими на S при $t\in[0,\infty)$ і тому $\left|u_{gk}(x,t)\right| < L$, $g=\overline{1,2}$, $k=\overline{1,3}$. Тоді з (39) випливає, що $L \le \left|q_{gk}\right| L$, а отже, $\left|q_{gk}\right| \ge 1$, що суперечить умові (30), якщо $\overline{u}_g(x,t)\ne 0$. Таким чином, $\overline{u}_g(x,t)\equiv 0$ і $\overline{\varphi}_{g0}^{(a)}(x,t) \equiv$ $\equiv \overline{\varphi}_{g0}^{(b)}(x,t)$, тобто розв'язок задачі є єдиним.

Теорему доведено.

1. *Денисюк И. Т.* Решение одной задачи сопряжения для составной области с угловыми точками на линиях раздела // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 6. – С. 17 – 24.
2. *Денисюк И. Т.* Одна задача сопряжения аналитических функций в аффинно преобразованных областях с кусочно-гладкими границами // Там же. – 2000. – № 2. – С. 70 – 74.
3. *Денисюк И. Т.* Задача сопряжения гармонических функций в трехмерных областях с негладкими границами // Там же. – 2002. – № 4. – С. 29 – 35.
4. *Денисюк И. Т.* Термоупругость изотропной пластинки с угловыми включениями // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 2. – С. 148 – 155.
5. *Денисюк И. Т.* Одна модель тонких упругих включений в изотропной пластинке // Там же. – 2000. – № 4. – С. 140 – 148.
6. *Денисюк И. Т.* Напряженное состояние вблизи особой линии поверхности раздела сред // Там же. – 1995. – № 5. – С. 64 – 70.

7. *Денисюк И. Т.* Напряжения вблизи конической точки поверхности раздела сред // Там же. – 2001. – № 3. – С. 68 – 77.
8. *Денисюк И. Т.* Особенность напряжений анизотропной пластинки с угловым вырезом // Прикл. механика. – 1996. – № 1. – С. 48 – 52.
9. *Денисюк И. Т.* Напряжения анизотропной пластинки с угловыми включениями // Там же. – 1999. – № 2. – С. 76 – 84.
10. *Поручиков В. Б.* Методы динамической теории упругости. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
11. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976. – 662 с.
12. *Новацкий В.* Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
13. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
14. *Хуторянский Н. М.* О методе обобщенных запаздывающих потенциалов и интегральных уравнений в нестационарных динамических задачах теории упругости // Прикл. пробл. прочности и пластичности. – 1978. – Вып. 9. – С. 8 – 18.
15. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 318 с.
16. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 608 с.
17. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – М.: Наука, 1981. – 688 с.
18. *Положий Г. М.* Уравнения математической физики. – М.: Высш. шк., 1964. – 560 с.
19. *Денисюк І. Т.* Термонапруження біля вершини кутового многогранного включення // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 3. – С. 41 – 47.
20. *Денисюк І. Т.* Сингулярні напруження в ізотропній матриці з пружним клином // Там же. – 1992. – № 4. – С. 76 – 81.
21. *Денисюк І. Т.* Напруження біля конічних та пірамідальних включень // Там же. – 2000. – № 3. – С. 16 – 20.
22. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
23. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1962. – 252 с.

Одержано 24.12.2002,
після доопрацювання — 09.08.2004