УДК 517.925.4

З. М. Шеремета (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів),
М. М. Шеремета (Львів. нац. ун-т)

ВЛАСТИВОСТІ ЦІЛИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

The close-to-convexity and l-index boundedness of entire solutions of the differential equations $z^2w'' + \beta zw' + (\gamma z^2 - \beta)w = 0$ and $zw'' + \beta w' + \gamma zw = 0$ are investigated.

Досліджено близькість до опуклості та обмеженість l-індексу цілих розв'язків диференціальних рівнянь $z^2w'' + \beta zw' + (\gamma z^2 - \beta)w = 0$ і $zw'' + \beta w' + \gamma zw = 0$.

1. Вступ. Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ функція f називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ — опукла область. Відомо [1, с. 203], що умова $\mathrm{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0$, $z \in \mathbb{D}$, є необхідною і достатньою для опуклості f. Функція f називається [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ така, що $\mathrm{Re}\big(f'(z)/\Phi'(z)\big) > 0$, $z \in \mathbb{D}$. Близька до опуклої функція f характеризується тим, що зовнішність G області $f(\mathbb{D})$ можна заповнити променями L, що виходять з ∂G і повністю лежать в G. Кожна близька до опуклої функція є однолистою в $\mathbb{D}$, і тому $f'(0) \neq 0$.

Для додатної неперервної на $[0, +\infty)$ функції l ціла функція f називається функцією обмеженого l-індексу [2, с. 5], якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{C}$

$$\frac{\big|f^{(n)}(z)\big|}{n!l^n(|z|)} \leq \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k\big(|z|\big)} : 0 \leq k \leq N\right\}. \tag{1}$$

Найменше з таких чисел N називають l-індексом і позначають через $N(f, l)$. Якщо $G \subset \mathbb{C}$ та існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що нерівність (1) виконується для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in G$, то f називатимемо функцією обмеженого l-індексу на (або в) G, а l-індекс позначатимемо через $N(f, l; G)$. Зауважимо, що якщо $l(x) \equiv 1$, то з (1) отримуємо означення цілої функції обмеженого індексу, введене Б. Лепсоном [3] для вивчення властивостей цілих розв'язків лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами і використане У. Хейманом [4] для дослідження розподілу значень таких розв'язків.

Ще у 1940 р. Р. Боас [5] довів, що якщо щонайбільше скінченна кількість похідних цілої функції f експоненціального типу $\leq \ln 2$ є однолистими в $\mathbb{D}$, то f — многочлен. С. Шах і С. Трімбле [5 – 8] розповсюдили цей результат на цілі функції з усіма однолистими похідними в $\mathbb{D}$ або з деякою послідовністю похідних, що є однолистими в $\mathbb{D}$. Їх дослідження продовжено в працях [9 – 12].

Близькості до опуклості всіх похідних цілої функції присвячено значно менше праць, а відомою є лише стаття С. Шаха [13], в якій вказано умови на дійсні коефіцієнти β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 диференціального рівняння

$$z^2\omega'' + (\beta_0 z^2 + \beta_1 z)\omega' + (\gamma_0 z^2 + \gamma_1 z + \gamma_2)\omega = 0, \tag{2}$$

за яких існує цілий розв'язок f такий, що або всі його похідні, або парні похідні, або непарні похідні є функціями, близькими до опуклих в $\mathbb{D}$. Неважко показати, що ціла функція $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ є розв'язком диференціального рівняння (2) тоді і тільки тоді, коли $\gamma_2 f_0 = 0$, $(\beta_1 + \gamma_2) f_1 + \gamma_1 f_0 = 0$ і

$$\big(n(n+\beta_1-1)+\gamma_2\big) f_n + \big(\beta_0(n-1)+\gamma_1\big) f_{n-1} + \gamma_0 f_{n-2} = 0, \quad n \ge 2. \tag{3}$$

С. Шах [13] розглядав лише ті випадки, коли двочленна рекурентна формула (3) для коефіцієнтів f_n зводиться до одночленної рекурентної формули, і використовував критерій Александера, який стверджує, що аналітична в $\mathbb{D}$ функція $a(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ є близькою до опуклої, якщо $1 \ge 2a_n \ge 3a_3 \ge \ldots$. Зокрема, він довів такі теореми.

Теорема А. *Якщо* $\beta \ge 0$ *і* $-2 < \gamma < 0$, *то диференціальне рівняння*

$$zw'' + \beta w' + \gamma z w = 0 \tag{4}$$

має цілий розв'язок

$$f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} z^{2k} \tag{5}$$

такий, що всі непарні похідні f', f''', $\ldots$ *є функціями, близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$, *і*

$$\ln M_f(r) = \big(1+o(1)\big)\sqrt{|\gamma|}\, r, \quad r \to \infty. \tag{6}$$

Теорема Б. *Якщо ж* $\beta \ge 0$ *і* $-2 < \gamma < 0$, *то диференціальне рівняння*

$$z^2 w'' + \beta z w' + (\gamma z^2 - \beta) w = 0 \tag{7}$$

має цілий розв'язок

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k+1} z^{2k+1} \tag{8}$$

такий, що всі парні похідні f, f'', $\ldots$ *є функціями, близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$, *і справджується асимптотична рівність* (6).

Близькість до опуклості цілого розв'язку рівняння (2) у випадку двочленної рекурентної формули досліджено в [14] за умови, що параметри β_0, β_1, γ_0, γ_1, γ_2 є дійсними, і в [15] за умови, що вони є комплексними. Нарешті, зауважимо, що у всіх наведених працях обмеженість l-індексу цілого розв'язку не досліджувалась.

Тут ми розглянемо випадок, коли коефіцієнти β і γ можуть бути комплексними, і доведемо дві наступні теореми.

Теорема 1. *Якщо* $|\beta| < 1$ *і* $0 < |\gamma| \le 1$, *то диференціальне рівняння* (4) *має цілий розв'язок* (5) *такий, що має місце асимптотична рівність* (6), *всі непарні похідні* f', f''', $\ldots$ *є функціями, близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$, *і кожна похідна* $f^{(\nu)}$, $\nu \ge 0$, *є обмеженого* l_ν*-індексу з* $l_\nu(x) \equiv \nu + 2$ *і* $N(f^{(\nu)}, l_\nu) \le 11$, *причому* $N(f^{(\nu)}, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \le 11$ *і* $N(f^{(\nu)}, \nu+2; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \le 2$, $\nu \ge 0$.

Теорема 2. *Якщо* $|\beta| < 1$ *і* $0 < |\gamma| \leq 1$, *то диференціальне рівняння* (7) *має цілий розв'язок* (8) *такий, що має місце асимптотична рівність* (6), *всі парні похідні* f, f'', $\ldots$ *є функціями, близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$, *і кожна похідна* $f^{(\nu)}$, $\nu \geq 0$, *є обмеженого* l_ν*-індексу з* $l_\nu(x) \equiv \nu + 3$ *і* $N(f^{(\nu)}, l_\nu) \leq 11$, *причому* $N(f^{(\nu)}, 3; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq 11$ *і* $N(f^{(\nu)}, \nu+3; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leq 2$, $\nu \geq 0$.

2. Допоміжні твердження. Наступну лему доведено в [15].

Лема 1. *Якщо* $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| < 1$, *то функція* $a(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *є близькою до опуклої.*

Лема 2. *Якщо* $\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq \alpha < 1$, *то функція* $a(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *є обмеженого* l*-індексу в* $\overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ *з* $l(x) \equiv 2$ *і* $N(a, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq [2\alpha/(1-\alpha)] + 1$.

Справді, для $|z| \leq 1$

$$|a'(z)| = \left|1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| = 1 - \alpha > 0 \tag{9}$$

і

$$|a'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| = 1 + \alpha. \tag{10}$$

З іншого боку, за формулою Коші для $|z| \leq 1/2$ і $m \geq 1$ маємо

$$\left|a^{(m+1)}(z)\right| = \left| \frac{m!}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - z| = 1/2} \frac{a'(\tau) d\tau}{(\tau - z)^{m+1}} \right| \leq$$

$$\leq m! 2^m \max\left\{|a'(z)| : |z| \leq 1\right\}. \tag{11}$$

З (9)–(11) випливає, що для $z \in \overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ і $m \geq 2\alpha/(1-\alpha)$

$$\frac{|a^{(m+1)}(z)|}{(m+1)! 2^{m+1}} \leq \frac{\max\{|a'(z)| : |z| \leq 1\}}{2(m+1)} \leq \frac{1+\alpha}{2(m+1)} \leq$$

$$\leq \frac{1+\alpha}{(m+1)(1-\alpha)} \frac{|a'(z)|}{2} \leq \frac{|a'(z)|}{2} \leq \max\left\{\frac{|a'(z)|}{2}, |a(z)|\right\},$$

тобто функція a є обмеженого l-індексу в $\overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ з $l(x) \equiv 2$ і $N(a, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq \left[2\alpha/(1-\alpha)\right] + 1$.

Наведемо ще декілька зауважень, які випливають з означення обмеженості l-індексу.

***Зауваження* 1.** Якщо f — ціла функція обмеженого l-індексу в G і $a = \mathrm{const} \neq 0$, то функція $F(z) = af(z)$ обмеженого l-індексу в G і $N(F, l; G) = N(f, l; G)$.

***Зауваження* 2.** Якщо f' є функцією обмеженого l-індексу в G, то f є функцією обмеженого l-індексу і $N(f, l; G) \leq N(f', l; G) + 1$.

Справді, для $n \geq N = N(f', l; G)$

$$\frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)! l^{n+1}(|z|)} = \frac{1}{(n+1) l(|z|)} \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{n! l^n(|z|)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)l(|z|)} \max\left\{ \frac{|f^{(k+1)}(z)|}{k! l^k(|z|)} : 0 \leq k \leq N \right\} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)l(|z|)} \max\left\{ \frac{|f^{(k+1)}(z)|}{(k+1)! l^{k+1}(|z|)} (k+1) l(|z|) : 0 \leq k \leq N \right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{ \frac{|f^{(k+1)}(z)|}{(k+1)! l^{k+1}(|z|)} : 0 \leq k \leq N \right\} \leq \max\left\{ \frac{|f^{(j)}(z)|}{j! l^j(|z|)} : 0 \leq j \leq N+1 \right\}.$$

***Зауваження* 3.** Якщо $l_1(x) \leq l_2(x)$ і f є функцією обмеженого l_1-індексу N в G, то f є функцією обмеженого l_2-індексу $\leq N$ в G.

Справді, для $n \geq N$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n! l_2^n(|z|)} = \frac{|f^{(n)}(z)|}{n! l_1^n(|z|)} \frac{l_1^n(|z|)}{l_2^n(|z|)} \leq \frac{l_1^n(|z|)}{l_2^n(|z|)} \max\left\{ \frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l_1^k(|z|)} : 0 \leq k \leq N \right\} \leq$$

$$\leq \left(\frac{l_1(|z|)}{l_2(|z|)} \right)^{n-N} \max\left\{ \frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l_2^k(|z|)} : 0 \leq k \leq N \right\} \leq$$

$$\leq \max\left\{ \frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l_2^k(|z|)} : 0 \leq k \leq N \right\}.$$

3. Доведення теореми 1. У роботі [13] показано, що для цілого розв'язку (5) рівняння (4)

$$f_{2k} = -\frac{\gamma}{2k(2k+\beta-1)} f_{2(k-1)}, \quad k \geq 1, \tag{12}$$

звідки

$$f_{2k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{-\gamma}{2j(2j+\beta-1)}, \quad k \geq 1. \tag{13}$$

Неважко перевірити (наприклад, методом математичної індукції), що для функції (5) і $\nu \geq 0$

$$f^{(2\nu+1)}(z) =$$

$$= (2\nu+2)! f_{2\nu+2} z + \sum_{k=2}^{\infty} (2k+2\nu)(2k+2\nu-1) \ldots (2k+1) 2k f_{2k+2\nu} z^{2k-1}.$$

Звідси випливає, що $f^{(2\nu+1)}$ є близькою до опуклої тоді і тільки тоді, коли такою є функція

$$F_\nu(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k+2\nu)(2k+2\nu-1)\ldots(2k+1)2k}{(2\nu+2)!} \frac{f_{2k+2\nu}}{f_{2\nu+2}} z^{2k-1} =$$

$$= z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k+2\nu)!}{(2k-1)!(2\nu+2)!} \left(\prod_{j=\nu+2}^{\nu+k} \frac{-\gamma}{2j(2j+\beta-1)} \right) z^{2k-1} =$$

$$= z + \sum_{k=2}^{\infty} F_{\nu,k} z^{2k-1}.$$

З умови $|\beta| < 1$ випливає, що $|2j+\beta-1| \geq 2(j-1)$ для $j \geq 1$, а методом математичної індукції неважко показати, що для всіх $\nu \geq 0$ і $k \geq 1$

$$\frac{(2k+2\nu)!(\nu+1)!\nu!}{(2k-1)!(2\nu+2)!(\nu+k)!(\nu+k-1)!} \leq \frac{1}{((k-1)!)^2}.$$

Тому

$$\sum_{k=2}^{\infty}(2k-1)|F_{\nu,k}| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+2\nu)!}{(2k-1)!(2\nu+2)!} \left(\frac{|\gamma|}{4}\right)^{k-1} \prod_{j=\nu+2}^{\nu+k} \frac{1}{j(j-1)} =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-1)(2k+2\nu)!(\nu+1)!\nu!}{(2k-1)!(2\nu+2)!(\nu+k)!(\nu+k-1)!} \left(\frac{|\gamma|}{4}\right)^{k-1} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k!)^2} \left(\frac{|\gamma|}{4}\right)^{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{4^k (k!)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{64} + \frac{7}{2304} + \ldots <$$

$$\leq \frac{3}{4} + \frac{5}{64} + \frac{8}{2304} = \frac{479}{576} < 1, \tag{14}$$

тобто за лемою 1 всі функції F_ν і, отже, $f^{(2\nu+1)}$ є близькими до опуклих.

З (14) випливає також, що для функції F_ν виконується умова леми 2 з $\alpha = 479/576$. Оскільки $\left[2\alpha/(1-\alpha)\right] = [958/97] = 9$, то за лемою 2 згідно із зауваженням 1 $N(f^{(2\nu+1)}, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) = N(F_\nu, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq 10$, а згідно із зауваженням 2 $N(f^{(2\nu)}, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq 11$.

Перейдемо до оцінок l-індексу в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}$. Підставляючи (5) в (4), для $|z| \geq 1/2$ за умов $|\beta| < 1$ і $|\gamma| \leq 1$ маємо

$$\frac{|f''(z)|}{2!2^2} \leq \frac{|\beta|}{4|z|} \frac{|f'(z)|}{1!2} + \frac{|\gamma|}{8}|f(z)| \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) \max\left\{\frac{|f'(z)|}{2},\, |f(z)|\right\} <$$

$$< \max\left\{\frac{|f'(z)|}{2},\, |f(z)|\right\}. \tag{15}$$

Підставимо (5) в (4) і продиференціюємо $m \geq 1$ разів. Тоді

$$zf^{(m+2)}(z) + (m+\beta)f^{(m+1)}(z) + \gamma z f^{(m)}(z) + \gamma m f^{(m-1)}(z) \equiv 0, \tag{16}$$

звідки для $|z| \geq 1/2$ отримуємо

$$\frac{|f^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!2^{m+2}} \leq \frac{2(m+1)}{2(m+2)}\frac{|f^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!2^{m+1}} + \frac{1}{4(m+2)(m+1)}\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!2^m} +$$

$$+\frac{2m}{8(m+2)(m+1)m}\frac{|f^{(m-1)}(z)|}{(m-1)!2^{m-1}} \leq$$

$$\leq \left(\frac{m+1}{m+2} + \frac{1}{2(m+2)(m+1)}\right)\max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : m-1 \leq k \leq m+1\right\} <$$

$$< \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : m-1 \leq k \leq m+1\right\}. \tag{17}$$

Звідси для $n \geq 3$ і $|z| \geq 1/2$ одержуємо

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!2^n} \leq \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!2^k} : 0 \leq k \leq n-1\right\}. \tag{18}$$

З (18) при $n = 3$ маємо

$$\frac{|f'''(z)|}{3!2^3} \leq \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!2^j} : 0 \leq j \leq 2\right\},$$

а при $n > 3$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!2^n} \leq \max\left\{\frac{|f^{(n-1)}(z)|}{(n-1)!2^{n-1}}, \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!2^j} : 0 \leq j \leq n-2\right\}\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!2^j} : 0 \leq j \leq n-2\right\} = \ldots = \max\left\{\frac{|f^{(j)}(z)|}{j!2^j} : 0 \leq j \leq 2\right\}.$$

Використавши (15), цей процес можна продовжити і отримати нерівність

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!2^n} \leq \max\left\{\frac{|f'(z)|}{2}, |f(z)|\right\}$$

для всіх $|z| \geq 1/2$ і $n \geq 0$, тобто $N(f, 2; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leq 1$.

Для $\nu \geq 1$ і $n \geq 0$ перепишемо тотожність (16) у вигляді

$$zf^{(\nu+n+3)}(z) + (\nu+n+1+\beta)f^{(\nu+n+2)}(z) +$$

$$+\gamma z f^{(\nu+n+1)}(z) + \gamma(\nu+n+1)f^{(\nu+n)}(z) \equiv 0,$$

звідки для $|z| \geq 1/2$ дістанемо

$$\frac{|f^{(\nu+n+3)}(z)|}{(n+3)!(\nu+2)^{n+3}} \leq \frac{2(\nu+n+2)}{(n+3)(\nu+2)}\frac{|f^{(\nu+n+2)}(z)|}{(n+2)!(\nu+2)^{n+2}} +$$

$$+\frac{1}{(n+3)(n+2)(\nu+2)^2}\frac{|f^{(\nu+n+1)}(z)|}{(n+1)!(\nu+2)^{n+1}} +$$

$$+\frac{2(\nu+n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)(\nu+2)^3}\frac{|f^{(\nu+n)}(z)|}{n!(\nu+2)^n} \leq$$

$$\leq Q(\nu,n)\max\left\{\frac{|f^{(\nu+j)}(z)|}{j!(\nu+2)^j}:\, n\leq j\leq n+2\right\},$$

де, як неважко перевірити,

$$Q(\nu,n)=\frac{2(\nu+n+2)}{(n+3)(\nu+2)}+\frac{1}{(n+3)(n+2)(\nu+2)^2}+$$
$$+\frac{2(\nu+n+1)}{(n+3)(n+2)(n+1)(\nu+2)^3}<1$$

для всіх $\nu\geq 1$ і $n\geq 0$. Тому для $\nu\geq 1$ і $n\geq 0$ маємо

$$\frac{\left|f^{(\nu+n+3)}(z)\right|}{(n+3)!(\nu+2)^{n+3}}\leq\max\left\{\frac{|f^{(\nu+j)}(z)|}{j!(\nu+2)^j}:\, n\leq j\leq n+2\right\},$$

тобто

$$\frac{\left|f^{(\nu+n)}(z)\right|}{n!(\nu+2)^n}\leq\max\left\{\frac{|f^{(\nu+j)}(z)|}{j!(\nu+2)^j}:\, n-3\leq j\leq n-1\right\}$$

для всіх $\nu\geq 1$ і $n\geq 3$. Звідси, як і вище, випливає, що $f^{(\nu)}$ є функцією обмеженого l-індексу в $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/2}$ з $l(x)\equiv\nu+2$ і $N(f^{(\nu)},\nu+2;\,\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}_{1/2})\leq 2$.

Залишилось довести асимптотичну рівність (6). Нехай $\mu_a(r)=\max\{|a_n|r^n:\, n\geq 0\}$ — максимальний член цілої функції $a(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$, а $\nu_a(r)=\max\{n\colon |a_n|r^n=\mu_a(r)\}$ — його центральний індекс.

Оскільки $|\beta|<1$, то з (11) маємо

$$\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{|\gamma|}{4}\right)^k\leq|f_{2k}|\leq\frac{1}{k!(k-1)!}\left(\frac{|\gamma|}{4}\right)^k. \tag{19}$$

Неважко переконатися, що для центральних індексів рядів $f_1(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{z^k}{(k!)^2}$ і $f_2(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{z^k}{k!(k-1)!}$ виконуються асимптотичні рівності $\nu_{f_j}(r)=(1+o(1))\sqrt{r}$, $r\to+\infty$. Використовуючи рівність $\ln\mu_a(r)=\ln\mu_a(r_0)+\int_{r_0}^{r}\nu_r(x)d\ln x$, для максимальних членів цих рядів отримуємо $\ln\mu_{f_j}(r)=2(1+o(1))\sqrt{r}$, $x\to+\infty$, а за теоремою Бореля $\ln f_j(r)=2(1+o(1))\sqrt{r}$, $x\to+\infty$. Тому з (19) одержуємо асимптотичну рівність $\ln M_f(r)=2(1+o(1))\sqrt{|\gamma|r^2/4^2}=(1+o(1))\sqrt{|\gamma|}\,r$, $r\to+\infty$.

Теорему 1 доведено.

4. Доведення теореми 2. У роботі [13] показано, що

$$f_{2k+1}=-\frac{\gamma}{2k(2k+1+\beta)}f_{2k-1},\quad k\geq 1, \tag{20}$$

звідки випливає

$$f_{2k+1}=\prod_{j=1}^{k}\frac{-\gamma}{2j(2j+1+\beta)},\quad k\geq 1. \tag{21}$$

Звідси, як і вище, отримуємо асимптотичну рівність (6).

Неважко перевірити, що для функції (8) і $\nu \geq 1$

$$f^{(2\nu)}(z) = (2\nu+1)! f_{2\nu+1} z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} (2k+2\nu+1)(2k+2\nu)\ldots(2k+2) f_{2k+2\nu+1} z^{2k+1}.$$

Звідси випливає, що $f^{(2\nu)}$ є близькою до опуклої, якщо такою є функція

$$F_{\nu}^{*}(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+2\nu+1)!}{(2k+1)!(2\nu+1)!} \left(\prod_{j=\nu+1}^{\nu+k} \frac{-\gamma}{2j(2j+1+\beta)} \right) z^{2k+1} =$$

$$= z + \sum_{k=1}^{\infty} F_{\nu,k}^{*} z^{2k+1}.$$

Оскільки для всіх $\nu \geq$ і $k \geq 1$

$$\frac{(2k+2\nu+1)!(\nu!)^2}{(2k+1)!(2\nu+1)!((\nu+k)!)^2} \leq \frac{1}{(k!)^2},$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)|F_{\nu,k}^{*}| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)(2k+2\nu+1)!}{(2k+1)!(2\nu+1)!} \left(\prod_{j=\nu+1}^{\nu+k} \frac{|\gamma|}{2j(2j+1-|\beta|)} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)(2k+2\nu+1)!}{(2k+1)!(2\nu+1)!} \left(\frac{|\gamma|}{4} \right)^{k} \prod_{j=\nu+1}^{\nu+k} \frac{1}{j^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1)(2k+2\nu+1)!(\nu!)^2}{(2k+1)!(2\nu+1)!((\nu+k)!)^2} \left(\frac{|\gamma|}{4} \right)^{k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k!)^2} \left(\frac{1}{4} \right)^{k} \leq \frac{479}{576}.$$

Тому, як і при доведенні теореми 1, використовуючи леми 1 і 2, бачимо, що всі парні похідні f, f'', $f^{(iv)}, \ldots$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$ і обмеженого l-індексу в $\overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ з $l(x) \equiv 2$ і $N(f^{(2\nu)}, 2; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq 10$. Згідно із зауваженнями 2 і 3 всі похідні є обмеженого l-індексу в $\overline{\mathbb{D}}_{1/2}$ з $l(x) \equiv 3$ і $N(f^{(j)}, 3; \overline{\mathbb{D}}_{1/2}) \leq 11$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Дослідимо обмеженість l-індексу функції (8) в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}$. Безпосередньо з (7) для $|z| \geq 1/2$ маємо

$$\frac{|f''(z)|}{2!3^2} \leq \frac{2|\beta|}{6} \frac{|f'(z)|}{1!3} + \frac{|\gamma|+4|\beta|}{18} |f(z)| \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{18} \right) \max\left\{ \frac{|f'(z)|}{1!5}, |f(z)| \right\} <$$

$$< \max\left\{ \frac{|f'(z)|}{1!5}, |f(z)| \right\}. \qquad (22)$$

Підставляючи (8) в (7) і диференціюючи, отримуємо

$$zf'''(z) + (2+\beta)f''(z) + \gamma z f'(z) + 2\gamma f(z) \equiv 0, \tag{23}$$

звідки для $|z| \geq 1/2$

$$\begin{aligned} \frac{|f'''(z)|}{3!3^3} &\leq \frac{2(2+|\beta|)}{9}\frac{|f''(z)|}{2!3^2} + \frac{|\gamma|}{54}\frac{|f'(z)|}{1!3} + \frac{4|\gamma|}{162}|f(z)| \leq \\ &\leq \left(\frac{6}{9} + \frac{1}{54} + \frac{4}{162}\right)\max\left\{\frac{|f''(z)|}{2!3^2}, \frac{|f'(z)|}{1!3}, |f(z)|\right\} < \\ &< \max\left\{\frac{|f''(z)|}{2!3^2}, \frac{|f'(z)|}{1!3}, |f(z)|\right\}. \end{aligned} \tag{24}$$

Нарешті продиференціюємо тотожність (23) $m \geq 1$ разів. Тоді

$$zf^{(m+3)}(z) + (m+2+\beta)f^{(m+2)}(z) + \gamma z f^{(m+1)}(z) + \gamma(m+2)f^{(m)}(z) \equiv 0, \tag{25}$$

звідки для $|z| \geq 1/2$ отримуємо

$$\begin{aligned} &\frac{|f^{(m+3)}(z)|}{(m+3)!3^{m+3}} \leq \\ &\leq \frac{2(2+m+|\beta|)}{3(m+3)}\frac{|f^{(m+2)}(z)|}{(m+2)!3^{m+2}} + \frac{|\gamma|}{9(m+3)(m+2)}\frac{|f^{(m+1)}(z)|}{(m+1)!3^{m+1}} + \\ &+ \frac{2|\gamma|(m+2)}{27(m+3)(m+2)(m+1)}\frac{|f^{(m)}(z)|}{m!3^m} \leq \\ &\leq \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9(m+3)(m+2)} + \frac{2}{27(m+3)(m+1)}\right)\times \\ &\times \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!3^k} : m \leq k \leq m+2\right\} < \\ &< \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k!3^k} : m \leq k \leq m+2\right\}. \end{aligned}$$

Звідси, а також з (24) і (22) випливає обмеженість l_0-індексу функції (8) в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2})$ з $l_0(x) \equiv 3$ і $N(f, l_0; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leq 1$.

Для $\nu \geq 1$ і $n \geq 0$ перепишемо тотожність (25) у вигляді

$$\begin{aligned} &zf^{(\nu+n+3)}(z) + (\nu+n+2+\beta)f^{(\nu+n+2)}(z) + \\ &+ \gamma z f^{(\nu+n+1)}(z) + \gamma(\nu+n+2)f^{(\nu+n)}(z) \equiv 0, \end{aligned}$$

звідки для $|z| \geq 1/2$ маємо

$$\frac{|f^{(\nu+n+3)}(z)|}{(n+3)!(\nu+3)^{n+3}} \leq Q(n,\nu)\max\left\{\frac{|f^{(\nu+j)}(z)|}{j!(\nu+3)^j} : n \leq j \leq n+2\right\},$$

де, як неважко перевірити,

$$Q(\nu,n) = \frac{2(\nu+n+3)}{(n+3)(\nu+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+2)(\nu+3)^2} +$$

$$+ \frac{2(\nu+n+2)}{(n+3)(n+2)(n+1)(\nu+5)^3} < 1,$$

тобто для всіх $\nu \geq 1$, $n \geq 0$ і $|z| \geq 1/2$

$$\frac{|f^{(\nu+n+3)}(z)|}{(n+3)!(\nu+3)^{n+3}} \leq$$

$$\leq \max\left\{\frac{|f^{(\nu+j)}(z)|}{j!(\nu+3)^j} : n \leq j \leq n+2\right\}.$$

Звідси випливає, що $N(f^{(\nu)}, l_\nu; \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_{1/2}) \leq 2$ з $l(x) \equiv \nu + 3$.

Теорему 2 доведено.

***Зауваження* 4.** Умова $|\beta| < 1$ у теоремі 1 є природною, тому що у випадку $\beta = -1$ і $k = 1$ формула (12) є беззмістовною. Умову $|\beta| < 1$ у теоремі 2 накладено для простоти викладок. Її можна замінити умовою $|\beta| < 3$, бо у випадку $\beta = -3$ і $k = 1$ формула (20) втрачає зміст. Але тоді для застосування викладеної методики потрібно, щоб $|\gamma| < 4(3 - |\beta|)$, і l-індекс залежатиме від $1/(3 - |\beta|)$. Ця обставина збільшить об'єм статті. Водночас, використовуючи схему доведення теореми 2, відповідний результат отримати неважко.

Далі, якщо $\gamma = 0$, то загальний розв'язок рівняння (4) має вигляд $w = c_1 z^{1-\beta} + c_2$, а загальним розв'язком рівняння (7) є $w = c_1 z^{-\beta} + c_2 z$, тобто і рівняння (4), і рівняння (7) не мають цілих трансцендентних розв'язків. Отже, умова $|\gamma| > 0$ є істотною в теоремах 1 і 2.

Нарешті, умова $|\gamma| \leq 1$ виникла внаслідок застосованого методу. Щодо близькості до опуклості всіх похідних, то цю умову можна замінити, наприклад, слабшою умовою $|\gamma| \leq 16/15$, але не можна замінити умовою $|\gamma| \leq q^2$, $q > \pi/2$, на що вказує диференціальне рівняння $w'' + q^2 w = 0$ (яке є окремим випадком як рівняння (4), так і рівняння (7) з $\beta = 0$ і $\gamma = q^2$). Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд $w = c_1 \cos qz + c_2 \sin qz$, причому розв'язок $w = \cos qz$ рівняння (4) зображується рядом (5), а розв'язок $w = (1/q) \sin qz$ рівняння (7) — рядом (8). Всі похідні, про які йдеться у теоремах 1 і 2, мають вигляд $w = \sin qz$, є однолистими в крузі $\{z\colon\ |z| < \pi/(2q)\}$, але не є однолистими в замкненому крузі $\{z\colon\ |z| \leq \pi/(2q)\}$. Тому якщо $q > \pi/2$, то ці похідні не є однолистими і, отже, близькими до опуклих в $\mathbb{D}$.

Для додатної неперервної на $[0, +\infty)$ функції l цілу функцію f називають [2, с. 49] функцією обмеженого l-розподілу значень, якщо існує $p \in \mathbb{N}$ таке, що для кожного $z_0 \in \mathbb{C}$ і всіх $w \in \mathbb{C}$ рівняння $f(z) = w$ має в крузі $\{z : |z - z_0| \leq 1/l(|z_0|)\}$ щонайбільше p коренів.

Відомо [2, с. 49], що якщо функція l задовольняє умову $l(x + O(1/l(x))) = O(l(x))$, $x \to +\infty$, то ціла функція f є функцією обмеженого l-розподілу значень тоді і тільки тоді, коли f' є похідною обмеженого l-індексу. Звідси випливає, що за умови теореми 1 (чи теореми 2) кожна похідна $f^{(\nu)}$, $\nu \geq 0$, функції (5) (відповідно функції (8)) є похідною обмеженого l_ν-розподілу значень з $l_\nu(x) \equiv \nu+3$ (відповідно $l_\nu(x) \equiv \nu + 4$).

1. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 628 с.
2. *Sheremeta M. M.* Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publ., 1999. – 141 p.
3. *Lepson B.* Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index // Proc. Symp. Pure Math. – Providence, Phode Island: Amer. Math. Soc., 1968. – **2**. – P. 298 – 307.
4. *Hayman W. K.* Differential inequalities and local valency // Pacif. J. Math. – 1973. – **44**. – P. 117 – 137.
5. *Boas R. P.* Univalent derivatives of entire functions // Duke Math. J. – 1940. – **6**. – P. 719 – 721.
6. *Shah S. M., Trimble S. Y.* Entire functions with some derivatives univalent // Can. J. Math. – 1974. – **24**. – P. 207 – 213.
7. *Shah S. M., Trimble S. Y.* Univalence of derivatives of functions defined by gap power series // J. London Math. Soc. (2). – 1975. – **9**. – P. 501 – 512.
8. *Shah S. M., Trimble S. Y.* Univalence of derivatives of functions defined by gap power series. II // J. Math. Anal. and Appl. – 1976. – **56**. – P. 28 – 40.
9. *Шеремета М. Н.* О целых функциях с однолистными в круге производными // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 3. – С. 400 – 406.
10. *Шеремета М. Н.* Спростування однієї гіпотези Шаха про однолисті функції // Мат. студ. – 1993. – Вип. 2. – С. 46 – 48.
11. *Гольдберг А. А., Шеремета М. Н.* Об аналитическом продолжении на всю плоскость аналитических в единичном круге функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1993. – Вып. 58. – С. 21 – 30.
12. *Шеремета М. М.* Про аналітичні в крузі функції з однолистими похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 58 – 65.
13. *Shah S. M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II // J. Math. Anal. and Appl. – 1989. – **142**. – P. 422 – 430.
14. *Шеремета З. М.* О свойствах целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 2000. – **36**, № 8. – С. 1 – 6.
15. *Шеремета З. М., Шеремета М. Н.* Близость к выпуклости целых решений одного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 4. – С. 477 – 481.

Одержано 14.02.2005