УДК 517.9

В. Д. Кошманенко, Г. В. Тугай (Ін-т математики НАН України, Київ)

МАТРИЦІ ЯКОБІ, АСОЦІЙОВАНІ З ОБЕРНЕНОЮ ЗАДАЧЕЮ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ В ТЕОРІЇ СИНГУЛЯРНИХ ЗБУРЕНЬ САМОСПРЯЖЕНИХ ОПЕРАТОРІВ*

The connection between the inverse eigenvalue problem and the Jacobi matrices is established in the framework of the theory of singular perturbations of unbounded self-adjoint operators.

У рамках теорії сингулярних збурень необмежених самоспряжених операторів встановлено зв'язок між оберненою задачею на власні значення та матрицями Якобі.

1. Вступ. Нехай $A \geq 1$ — необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $\operatorname{dom} A \equiv \mathcal{D}(A)$ в комплексному сепарабельному просторі Гільберта $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$.

Оператор $\tilde{A} \neq A$ називається [1 – 4] (чисто) сингулярно збуреним відносно A (пишемо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$), якщо множина

$$\mathcal{D} = \{\varphi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(\tilde{A}) : A\varphi = \tilde{A}\varphi\}$$

є щільною в $\mathcal{H}$. Зрозуміло, що A і $\tilde{A}$ мають спільний симетричний оператор

$$\dot{A} = A \upharpoonright \mathcal{D} = \tilde{A} \upharpoonright \mathcal{D}$$

із нетривіальними індексами дефекту $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = \dim \operatorname{Ker} (\dot{A} \pm i)^* \neq 0$.

Відомо [5 – 9], що наступний варіант оберненої задачі на власні значення є розв'язним. А саме, для довільної послідовності чисел E_j, $j = 1, 2, \ldots$, та послідовності векторів ψ_j з умовою $(\operatorname{span}\{\psi_j\})^{\mathrm{cl}} \cap \operatorname{dom}(A) = \{0\}$ (cl — замикання) існує послідовність сингулярно збурених операторів A_n, $n = 1, 2, \ldots$, що задовольняють рівняння на власні значення: $A_n \psi_j = E_j \psi_j$, $j \leq n$.

У цій статті будемо досліджувати так звані слабко сингулярно збурені оператори $\tilde{A}$ з класу $\mathcal{P}_{ws}(A)$ [10]. Це означає, що образ різниці резольвент операторів A, $\tilde{A}$ належить області визначення оператора $A^{1/2}$:

$$\operatorname{ran}[(\tilde{A} - z)^{-1} - (A - z)^{-1}] \subset \mathcal{D}(A^{1/2}).$$

У цьому випадку є два варіанти зображення для збуреного оператора $\tilde{A}$. Якщо $\tilde{A}$ не є розширенням за Фрідріхсом оператора $\dot{A}$, то його можна подати у вигляді узагальненої суми: $\tilde{A} = A \dotplus T$, де оператор T діє в A-шкалі $\mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1$ гільбертових просторів [11], $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$, при цьому $\operatorname{rank} T \cap \mathcal{H} = \{0\}$. Тут $\mathcal{H}_1 = \mathcal{D}(A^{1/2})$ в нормі $\|\varphi\|_1 := \|A^{1/2}\varphi\|$, а $\mathcal{H}_{-1}$ — дуальний простір до $\mathcal{H}_1$ відносно $\mathcal{H}$. У будь-якому випадку оператор $\tilde{A}$ визначається формулою Крейна для резольвент

$$(\tilde{A} - z)^{-1} = (A - z)^{-1} + B^{-1}(z), \qquad \operatorname{Im} z \neq 0,$$

де операторна функція $B(z)$ задовольняє певну тотожність (див., наприклад, [12, 13]) і, головне, $\operatorname{rank} B^{-1}(z) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) \setminus \mathcal{D}(A)$. Зокрема, резольвентне зобра-

* Частково підтримано DFG 436 UKR 113/67, 113/78 та INTAS 00-257 проектами.

ження для $\tilde{A}$ будемо використовувати у випадку, коли $\tilde{A} = A_\infty$ є розширенням за Фрідріхсом симетричного оператора $\dot{A}$. При цьому множина $\mathcal{D}$ утворює правильний підпростір в $\mathcal{H}_1$, тобто не є щільною в $\mathcal{H}_1$, і $A_\infty \neq A$.

Пишемо $\tilde{A} \in \mathcal{P}^n_{ws}(A)$, якщо різниця резольвент $(\tilde{A}-z)^{-1}-(A-z)^{-1}$, $\operatorname{Im} z > 0$, є оператором рангу $n \leq \infty$.

Нехай $E_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots$, — деяка послідовність дійсних чисел, а $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \backslash \mathcal{D}(A)$ — довільна послідовність векторів, ортонормованих в $\mathcal{H}$, така, що виконується умова

$$\operatorname{span}\{\psi_j,\ j \geq 1\}^{\mathrm{cl}} \bigcap \mathcal{D}(A) = \{0\}, \tag{1}$$

де cl позначає замикання в $\mathcal{H}$. З результатів робіт [5, 6] (див. також [8, 9]) випливає, що для кожного скінченного n існує єдиний сингулярно збурений самоспряжений оператор $A_n \in \mathcal{P}^n_{ws}(A)$, що розв'язує задачу на власні значення,

$$A_n \psi_j = E_j \psi_j, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Більш того, при необтяжливих умовах існує сингулярно збурений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{n=\infty}_s(A)$, який розв'язує задачу на власні значення для усіх E_j і при цьому послідовність A_n збігається до нього в сильному резольвентному сенсі.

Як правило, оператори A_n мають вигляд $A_n = A \tilde{+} T_n$ і будуються індуктивно з використанням на кожному кроці сингулярного збурення рангу 1. Винятком є випадок, коли на якомусь кроці оператор A_n є розширенням за Фрідріхсом деякого симетричного оператора. Тоді A_n визначається формулою Крейна для резольвент. А саме, резольвента оператора A_n записується через резольвенту A_{n-1} та пару $E_n \in \mathbf{R}$, $\psi_n \in \mathcal{H}$ у вигляді

$$(A_n - z)^{-1} = (A_{n-1} - z)^{-1} + B_n^{-1}(z)(\cdot, \eta_n(\bar{z}))\eta_n(z), \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \tag{3}$$

де

$$B_n(z) = (E_n - z)(\psi_n, \eta_n(\bar{z})), \qquad \eta_n(z) = (A_{n-1} - E_n)(A_{n-1} - z)^{-1}\psi_n.$$

У роботі [5] уперше було помічено, що рекурентна процедура побудови A_n природним чином породжує послідовність асоційованих матриць Якобі

$$J_n = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 & \\ & a_2 & b_3 & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \\ & 0 & & \bullet & \bullet & a_{n-1} \\ & & & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Ці матриці узгоджені в тому сенсі, що на n-му кроці матриця J_n містить у собі матрицю J_{n-1} як частину. При $n \to \infty$ ми одержуємо матрицю Якобі J нескінченного рангу, яку називаємо асоційованою з оберненою задачею на власні значення для заданих $E_j \in \mathbf{R}$, $\psi_j \in \mathcal{H}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Матричні елементи a_n, b_n якобієвих матриць виражаються рекурентним чином через оператори A_j, вектори ψ_j та власні значення E_j, $j \le n$, а саме,

$$\begin{aligned} b_1 &= \langle \psi_1, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle - E_1, \\ a_1 &= \left| \langle \psi_1, \mathbf{A}_0 \psi_2 \rangle \right|, \\ b_2 &= \langle \psi_2, \mathbf{A}_0 \psi_2 \rangle - E_2, \\ a_2 &= \left| \langle \psi_2, \mathbf{A}_1 \psi_3 \rangle \right|, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n &= \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-2} \psi_n \rangle - E_n, \\ a_n &= \left| \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-1} \psi_{n+1} \rangle \right|, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

де $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — дуальний скалярний добуток між $\mathcal{H}_1$ та $\mathcal{H}_{-1}$, а $\mathbf{A}_j$ — замикання оператора $A_j : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$, $A_0 = A$.

У цій роботі показано, що за допомогою довільної матриці Якобі J, заданої в деякому ортонормованому базисі $\{\varphi_j\}$, що утворює підпростір $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_1(A)$, $\mathcal{N} \bigcap \operatorname{dom}(A) = \{0\}$, можна неєдиним чином відновити послідовності ψ_j і E_j такі, що при розв'язанні за ними оберненої задачі на власні значення (2) виникає послідовність сингулярно збурених операторів $A_n \in \mathcal{P}_{ws}^n(A)$, з якими асоційовані матриці Якобі J_n, які є правильними частинами матриці J і збігаються до неї в сенсі сильної граф-границі. Процедура відновлення ψ_j і E_j є конструктивною, але не однозначною.

2. Побудова матриці Якобі, асоційованої з сингулярно збуреним оператором. Нехай задано: необмежений самоспряжений оператор $A \ge 1$ в $\mathcal{H}$, послідовність від'ємних чисел E_j, $j = 1, 2, \ldots$, та послідовність $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$ ортонормованих в $\mathcal{H}$ векторів, яка задовольняє умову (1). Покажемо, що для заданої послідовності від'ємних чисел $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ та послідовності векторів $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ існує послідовність сингулярно збурених операторів скінченного рангу $A_n \in \mathcal{P}_{ws}^n(A)$, що розв'язують задачу на власні значення (2). При цьому з кожним оператором A_n буде асоційовано якобієву матрицю вигляду (4).

Опишемо послідовно процедуру побудови такої матриці.

На першому кроці, $n = 1$, за заданими E_1 та ψ_1 визначаємо сингулярно збурений оператор формулою

$$A_1 = A_0 \tilde{+} \alpha_1 \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_1, \quad A_0 \equiv A, \tag{5}$$

де

$$\omega_1 := (\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1 \in \mathcal{H}_{-1}, \quad \alpha_1 := -\frac{1}{\langle \psi_1, \omega_1 \rangle} = -\frac{1}{\langle \psi_1, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle - E_1},$$

$\mathbf{A}_0$ — замикання ізометричного відображення $A : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_{-1}$, а $\tilde{+}$ позначає так звану узагальнену суму операторів (див., наприклад, [14]), або суму у сенсі квадратичних форм [15, 16]. Безпосередня перевірка показує, що оператор A_1 розв'язує задачу $A_1 \psi_1 = E_1 \psi_1$. Визначимо перший матричний елемент, поклавши

$$b_1 := a_{11}^0 - E_1, \quad a_{11}^0 := \langle \psi_1, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle. \tag{6}$$

Очевидно, що $b_1 > 0$, оскільки оператор A є додатним, а число E_1 — від'ємним. Зазначимо, що як сингулярне збурення рангу один $\alpha_1\langle\cdot, \omega_1\rangle\omega_1$, так і матричний елемент b_1 якобієвої матриці J_0, яку ми будуємо, єдином чином визначаються оператором A та заданою парою E_1, ψ_1 (докладне доведення цього факту можна знайти в роботах [5, 6, 9]).

Зауважимо, що число b_1 ми асоціюємо з оператором A_1, хоча в формулі (6) фігурує оператор $\mathbf{A}_0$. Це пов'язано з тим, що насправді елемент b_1 визначається по E_1 та ψ_1, які однозначно фіксують оператор A_1.

На другому кроці, $n = 2$, використовуємо оператор A_1, число E_2 та вектор ψ_2, який ортогональний до ψ_1, і визначаємо сингулярно збурений оператор A_2 за формулою

$$A_2 = A_1 \tilde{+} \alpha_2\langle\cdot, \omega_2\rangle\omega_2, \tag{7}$$

де

$$\omega_2 = (\mathbf{A}_1 - E_2)\psi_2 \in \mathcal{H}_{-1}, \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{\langle\psi_2, \omega_2\rangle} = -\frac{1}{\langle\psi_2, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle - E_2}.$$

Безпосередня перевірка показує, що оператор A_2 розв'язує задачу з двома власними значеннями: $A_2\psi_1 = E_1\psi_1$, $A_2\psi_2 = E_2\psi_2$. Покладаємо

$$b_2 = a_{22}^0 - E_2, \qquad a_1 = \left|a_{21}^0\right|, \tag{8}$$

де $a_{22}^0 := \langle\psi_2, \mathbf{A}_0\psi_2\rangle$, $a_{21}^0 := \langle\psi_2, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle$. Отже,

$$\alpha_2 = -\frac{1}{b_2 - \dfrac{a_1^2}{b_1}}.$$

Знову варто зауважити, що елементи b_2, a_1 ми асоціюємо з оператором A_2, тому що ці елементи, як і оператор A_2, фіксуються парою E_2, ψ_2. До того ж коефіцієнт α_2, який визначає оператор A_2, також виражається через елементи b_2, b_1, a_1.

Аналогічно, на третьому кроці, $n = 3$, для довільного від'ємного числа E_3 та вектора $\psi_3 \notin \mathcal{D}(A)$ такого, що $\psi_1 \perp \psi_2 \perp \psi_3 \perp \psi_1$, визначаємо

$$A_3 = A_2 \tilde{+} \alpha_3\langle\cdot, \omega_3\rangle\omega_3, \tag{9}$$

де

$$\omega_3 = (\mathbf{A}_2 - E_3)\psi_3, \qquad \alpha_3 = -\frac{1}{\langle\psi_3, \omega_3\rangle} = -\frac{1}{\langle\psi_3, \mathbf{A}_2\psi_3\rangle - E_3}.$$

Покладаємо

$$b_3 = a_{33}^1 - E_3, \qquad a_2 = \left|a_{32}^1\right|, \tag{10}$$

де $a_{33}^1 := \langle\psi_3, \mathbf{A}_1\psi_3\rangle$, $a_{32}^1 := \langle\psi_3, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle$. Отже,

$$\alpha_3 = -\frac{1}{\langle\psi_3, \mathbf{A}_1\psi_3\rangle - E_3 - \dfrac{|\langle\psi_3, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle|^2}{b_1 - \dfrac{a_0^2}{b_0}}} = -\frac{1}{b_3 - \dfrac{a_2^2}{b_2 - \dfrac{a_1^2}{b_1}}}.$$

Для довільного $n \geq 1$ маємо

$$A_n = A_{n-1} \tilde{+} \alpha_n \langle \cdot, \omega_n \rangle \omega_n, \qquad \omega_n := (\mathbf{A}_{n-1} - E_n)\psi_n, \tag{11}$$

де

$$\alpha_n = -\frac{1}{\langle \psi_n, \omega_n \rangle} = -\cfrac{1}{a_{n,n}^{n-2} - E_n - \cfrac{\left|a_{n,n-1}^{n-2}\right|^2}{a_{n-1,n-1}^{n-3} - E_{n-1} - \ldots - \cfrac{\left|a_{21}^{0}\right|^2}{a_{11}^{0} - E_1}}},$$

тобто

$$\alpha_n = -\cfrac{1}{b_n - \cfrac{a_{n-1}^2}{b_{n-1} - \ldots - \cfrac{a_2^2}{b_2 - \cfrac{a_1^2}{b_1}}}}, \tag{12}$$

$$b_n := a_{n,n}^{n-2} - E_n, \qquad a_{n-1} := \left|a_{n,n-1}^{n-2}\right|. \tag{13}$$

Тут

$$a_{n,n}^{n-2} := \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-2}\psi_n \rangle, \qquad a_{n,n-1}^{n-2} = \langle \psi_n, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1} \rangle.$$

Таким чином, якщо всі числа $E_j < 0$, $j = 1, 2, \ldots$, і вектори ψ_j задовольняють умову (1), то існує послідовність сингулярно збурених операторів A_n, які розв'язують задачу на власні значення (2) і з якими можна конструктивно асоціювати послідовність матриць Якобі J_n. Умова (1) гарантує, що всі оператори A_n є сингулярно збуреними відносно A. При цьому кожен A_n належить $\mathcal{P}_{ws}^n(A)$, тому що всі вектори ψ_j належать $\mathcal{H}_1(A)\setminus\mathcal{D}(A)$.

Розглянемо випадок, коли E_j є послідовністю довільних дійсних чисел, не обов'язково від'ємних. Тоді може трапитись, що вже на першому кроці $b_1 = a_1^0 - E_1 = 0$, або $b_2 - \frac{a_1^2}{b_1} = 0$, або на будь-якому k-му кроці

$$b_k - \cfrac{a_{k-1}^2}{b_{k-1} - \ldots - \cfrac{a_2^2}{b_2 - \cfrac{a_1^2}{b_1}}} = 0. \tag{14}$$

Це приводить до того, що коефіцієнт α_1, або α_2, або α_k буде дорівнювати нескінченності і узагальнена сума $A_k = A_{k-1} \tilde{+} \alpha_k \langle \cdot, \omega_k \rangle \omega_k$ втрачає сенс. Але, як показано в роботах [1, 17, 18], сингулярне збурення рангу один $\tilde{A} = A \tilde{+} \alpha \langle \cdot, \omega \rangle \omega$ з нескінченною константою зв'язку, $\alpha = \infty$, має коректний сенс. А саме, під оператором $\tilde{A}$ слід розуміти розширення за Фрідріхсом симетричного оператора $\dot{A} = A \restriction \{ f \in \mathcal{D}(A) : \langle f, \omega \rangle = 0 \}$. Саме так ми і будемо діяти у зазначених вище випадках. Ми визначаємо A_k як розширення за Фрідріхсом симетричного оператора $\dot{A}_{k-1}$, одержаного звуженням A_{k-1} на множину $\mathcal{D}(\dot{A}_{k-1}) =$

$= \{ f \in \mathcal{D}(A_{k-1}) : \langle f, \omega_k \rangle = 0 \}$. Тоді оператор A_k задається за допомогою формули Крейна для резольвент:

$$(A_k - z)^{-1} = (A_{k-1} - z)^{-1} + B_k^{-1}(z)(\cdot, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z), \tag{15}$$

де

$$B_k(z) = (E_k - z)(\psi_k, \eta_k(\bar{z})), \qquad \eta_k(z) = (A_{k-1} - E_k)(A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k.$$

Перевіримо, що і в цьому випадку A_k розв'язує задачу на власне значення з вектором ψ_k:

$$(A_k - z)^{-1}\psi_k = (A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k + B_k^{-1}(z)(\psi_k, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z) =$$

$$= (A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k + (E_k - z)^{-1}\eta_k(z) = (A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k +$$

$$+ \frac{1}{E_k - z}(A_{k-1} - E_k)(A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k = (A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k + \frac{1}{E_k - z}\psi_k -$$

$$- \frac{1}{E_k - z}(E_k - z)(A_{k-1} - z)^{-1}\psi_k = \frac{1}{E_k - z}\psi_k.$$

Отже,

$$(A_k - z)^{-1}\psi_k = \frac{1}{E_k - z}\psi_k.$$

Покажемо, що A_k розв'язує задачу на власні значення з усіма векторами ψ_j, $j = 1, \ldots, k-1$:

$$(A_{k+1} - z)^{-1}\psi_j = (A_k - z)^{-1}\psi_j + b_{k+1}^{-1}(\psi_j, \eta_{k+1})\eta_{k+1} =$$

$$= \frac{1}{E_j - z}\psi_j + \frac{(\psi_j, \eta_{k+1})}{(E_j - z)(\psi_{k+1}, \eta_{k+1})}\eta_{k+1} = \frac{1}{E_j - z}\psi_j +$$

$$+ \frac{(\psi_j, \psi_{k+1} + (\bar{z} - E_{k+1})(A_k - \bar{z})^{-1}\psi_{k+1})}{(E_{k+1} - z)(\psi_{k+1}, \eta_{k+1})}\eta_{k+1} =$$

$$= \frac{1}{E_j - z}\psi_j + \frac{(\psi_j, (\bar{z} - E_{k+1})(A_k - \bar{z})^{-1}\psi_{k+1})}{(E_{k+1} - z)(\psi_{k+1}, \eta_{k+1})}\eta_{k+1} =$$

$$= \frac{1}{E_j - z}\psi_j - \frac{((A_k - z)^{-1}\psi_j, \psi_{k+1})}{(\psi_{k+1}, \eta_{k+1})}\eta_{k+1} =$$

$$= \frac{1}{E_j - z}\psi_j - \frac{\left(\frac{1}{E_j - z}\psi_j, \psi_{k+1}\right)}{(\psi_{k+1}, \eta_{k+1})}\eta_{k+1} = \frac{1}{E_j - z}\psi_j.$$

Далі визначаємо наступну пару матричних елементів якобієвої матриці за тим же правилом, що і раніше: вони знаходяться за формулами

$$b_k = \langle \psi_k, \mathbf{A}_{k-2}\psi_k \rangle - E_k, \qquad a_{k-1} = \left| \langle \psi_k, \mathbf{A}_{k-2}\psi_{k-1} \rangle \right|.$$

Зазначимо, що у випадку (14) виникає питання: як будувати наступний оператор A_{k+1}? Справа в тому, що за формулою (12) коефіцієнт α_{k+1} дорівнює нулю:

$$\alpha_{k+1} = -\cfrac{1}{b_{k+1} - \cfrac{a_k^2}{b_k - \ldots - \cfrac{a_2^2}{b_2 - \cfrac{a_1^2}{b_1}}}} = -\cfrac{1}{b_{k+1} - \cfrac{a_k^2}{0}} = 0,$$

оскільки ми формально використали зображення для A_k у вигляді адитивної суми, $A_k = A_{k-1} \tilde{+} \alpha_k \langle \cdot, \omega \rangle \omega$ з $\alpha_k = \infty$, що не є коректним, адже оператор A_k визначався резольвентною формулою. Тому насправді коефіцієнт α_{k+1} повинен визначатися цілком коректною формулою

$$\alpha_{k+1} = -\frac{1}{\langle \psi_{k+1}, \omega_{k+1} \rangle}.$$

Якщо α_{k+1} — скінченне число, то A_{k+1} визначається узагальненою сумою. Звичайно, може статися, що $\langle \psi_{k+1}, \omega_{k+1} \rangle = 0$, а це приводить до рівності $\alpha_{k+1} = \infty$. Тоді ми знову використовуємо формулу для резольвент при визначенні оператора A_{k+1}.

Таким чином, доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Для заданого необмеженого самоспряженого оператора* $A \geq 1$ *у гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$, *довільної послідовності дійсних чисел* $E_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots$, *та послідовності ортонормованих в* $\mathcal{H}$ *векторів* $\psi_j \in \mathcal{H}_1(A) \setminus \mathcal{D}(A)$, *для яких виконується умова* (1), *рекурентна процедура розв'язання оберненої задачі на власні значення* (2) *за допомогою формул* (5), (7), (9), (11) (*або* (15) *у випадку, коли на якомусь кроці виконується рівність* (14)) *породжує послідовність сингулярно збурених операторів* $A_n \in \mathcal{P}_{ws}^n(A)$, *які у свою чергу асоційовані з послідовністю узгоджених між собою матриць Якобі* J_n, *що збігаються до матриці*

$$J = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & & \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 \\ & a_2 & b_3 & \bullet & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet \\ & 0 & & \bullet & \bullet \end{pmatrix} \tag{16}$$

в сенсі сильної граф-границі. Матричні елементи матриці J *виражаються через задану послідовність чисел* E_j, $j = 1, 2, \ldots$, *вектори* ψ_j *та оператори* A_n *згідно з формулами* (6), (8), (10), (13).

Зазначимо, що рекурентна формула (12) для коефіцієнта α_n виконується лише до моменту, поки не трапляється випадок (14). При цьому ланцюговий дріб у (12) переривається і з наступного кроку починається новий, який продовжується до нескінченності, або знову переривається, якщо трапляється випадок (14).

3. Від матриці Якобі до збуреного оператора. Нехай, як і раніше, $A \equiv A_0 \geq 1$ — необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Починаючи з довільної матриці Якобі J вигляду (16), ми хочемо відновити послідовності чисел E_j та векторів ψ_j, $j = 1, 2, \ldots$, які за процедурою, викладеною в попередньому пункті, приводили до якобієвої матриці (16). У цьому пункті покажемо як це можна здійснити, хоча процес відновлення не є однозначним без додаткових умов.

Виходячи з оператора A та матриці Якобі J, будуємо послідовність сингулярно збурених відносно A операторів A_n, які розв'язують обернену задачу на власні значення (2) і визначають узгоджену послідовність якобієвих матриць J_n, що збігаються до J в певному сенсі (див. нижче теорему 2).

Теорема 2. *Нехай задано напівобмежений самоспряжений оператор* $A \equiv \equiv A_0 \geq 1$ *в* $\mathcal{H}$ *та матрицю Якобі* J *в деякому ортонормованому базисі* $\{\varphi_j,\ j = 1, 2, \ldots\}$ *підпростору* $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$. *Припустимо, що* $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}_1$, $\mathcal{N} \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}$.

Тоді існують послідовності чисел $\{E_j\}$ *та векторів* $\{\psi_j \in \mathcal{H}_1 \setminus \mathcal{D}(A)\}$, $j = = 1, 2, \ldots$, *які задовольняють умову*

$$\operatorname{span}\{\psi_j,\ j \geq 1\}^{\mathrm{cl}} \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}$$

і є такими, що при послідовному розв'язанні за ними оберненої задачі на власні значення

$$A_n \psi_n = E_n \psi_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

в класі операторів $A_n \in \mathcal{P}^n_{ws}(A)$ *виникає послідовність асоційованих матриць Якобі* J_n *рангу* n, *для якої* J *є сильною граф-границею* ($J = \operatorname{st.gr\text{-}lim} J_n$ *згідно з позначеннями з* [19]).

Доведення є конструктивним. Оператори A_n будуються послідовно збуреннями рангу один, як і в попередньому пункті. З цією метою знаходимо вектори ψ_j та числа E_j, використовуючи матричні елементи якобієвої матриці.

Позначимо $J_1 = b_1$. Нехай $\det J_1 = b_1 \neq 0$. Вектор ψ_1 та число E_1 визначаємо формулами

$$\begin{aligned} \psi_1 &= x_{10}\varphi_0 + x_{11}\varphi_1, \qquad x_{10}^2 + x_{11}^2 = 1, \\ E_1 &= \langle \psi_1, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle - b_1. \end{aligned} \tag{17}$$

Оператор A_1 є звуженням на $\mathcal{H}$ оператора

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 + \alpha_1 \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_1,$$

де

$$\omega_1 = (\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1 \in \mathcal{H}_{-1}, \qquad \alpha_1 = -\frac{1}{\langle \psi_1, (\mathbf{A}_0 - E_1)\psi_1 \rangle}.$$

Очевидно, він розв'язує задачу $A_1 \psi_1 = E_1 \psi_1$. З цим оператором ми асоціюємо J_1.

Нехай J_2 — матриця Якобі рангу 2, яка є частиною заданої матриці J і складається з елементів b_1, b_2, a_1. Припустимо, що $\det J_2 = b_1 b_2 - a_1^2 \neq 0$. Вектор ψ_2 шукаємо у вигляді

$$\psi_2 = x_{20}\varphi_0 + x_{21}\psi_1 + x_{22}\varphi_2,$$

де коефіцієнти x_{2k}, $k = 0, 1, 2$, знаходяться з системи рівнянь

$$\begin{aligned} (\psi_2, \psi_1) &= 0, \\ \|\psi_2\| &= 1, \\ |\langle \psi_2, \mathbf{A}_0 \psi_1 \rangle| &= a_1. \end{aligned} \tag{18}$$

Цю систему можна записати у вигляді

$$x_{21} + x_{20}(\psi_1, \varphi_0) = 0,$$
$$x_{20}^2 + x_{21}^2 + x_{22}^2 + 2x_{20}x_{21}(\psi_1, \varphi_0) = 1,$$
$$x_{20}\langle\varphi_0, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle + x_{21}\langle\psi_1, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle + x_{22}\langle\varphi_2, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle = z_1, \qquad |z_1| = a_1,$$

де згідно з (17) $(\psi_1, \varphi_0) = x_{10}$. Позначимо

$$c_{10} = \langle\varphi_0, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle, \qquad a_{11}^0 = \langle\psi_1, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle, \qquad c_{12} = \langle\varphi_2, \mathbf{A}_0\psi_1\rangle.$$

Тоді розв'язки системи (18) записуються у вигляді

$$x_{20} = \frac{z_1(c_{10} - x_{10}a_{11}^0) \pm c_{12}\sqrt{(c_{12}^2 - z_1^2)(1 - x_{10}^2) + (c_{10} - x_{10}a_{11}^0)^2}}{c_{12}^2(1 - x_{10}^2) + (x_{10}a_{11}^0 - c_{10})^2},$$

$$x_{21} = -x_{10}x_{20},$$

$$x_{22} = \frac{1}{c_{12}}\left(z_1 + x_{20}(x_{10}a_{11}^0 - c_{10})\right).$$

Отже, знайшовши ψ_2, покладемо $E_2 = \langle\psi_2, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle - b_2$ і визначимо оператор $A_2 = A_1 \tilde{+} \alpha_2\langle\cdot, \omega_2\rangle\omega_2$, де

$$\omega_2 = (\mathbf{A}_1 - E_2)\psi_2 \in \mathcal{H}_{-1}, \qquad \alpha_2 = -\frac{1}{\langle\psi_2, (\mathbf{A}_1 - E_2)\psi_2\rangle}.$$

Зрозуміло, що A_2 розв'язує задачу на власні значення. При цьому, будуючи якобієву матрицю, асоційовану з A_2, ми отримуємо матрицю J_2, яку щойно використали для побудови цього оператора.

Аналогічно виділяємо з J матрицю J_3 рангу 3. Припускаємо, що $\det J_3 \neq 0$. Для побудови оператора A_3 спочатку шукаємо вектор ψ_3 у вигляді

$$\psi_3 = x_{30}\varphi_0 + x_{31}\psi_1 + x_{32}\psi_2 + x_{33}\varphi_3.$$

Звичайні вимоги приводять до системи рівнянь на коефіцієнти x_{3k}

$$\begin{aligned} (\psi_1, \psi_3) &= 0, \\ (\psi_2, \psi_3) &= 0, \\ \|\psi_3\|^2 &= 1, \\ |\langle\psi_3, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle| &= a_2, \end{aligned} \tag{19}$$

де два перші рівняння — умови ортонормованості системи векторів ψ_n. Позначимо $c_{20} = \langle\varphi_0, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle$, $a_{12}^1 = \langle\psi_1, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle$, $a_{22}^1 = \langle\psi_2, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle$, $c_{23} = \langle\varphi_3, \mathbf{A}_1\psi_2\rangle$. Перепишемо систему (19) у вигляді

$$\begin{aligned} &x_{30}x_{10} + x_{31} = 0, \\ &x_{30}x_{20} + x_{21} = 0, \\ &x_{30}^2 + x_{31}^2 + x_{32}^2 + x_{33}^2 + 2x_{30}x_{31}x_{10} + 2x_{30}x_{32}x_{20} = 1, \\ &x_{30}c_{20} + x_{31}a_{12}^1 + x_{32}a_{22}^1 + x_{33}c_{23} = z_2, \qquad |z_2| = a_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Тоді шукані коефіцієнти x_{3k} мають вигляд

$$x_{30} = \frac{z_2(c_{20}-x_{10}a_{12}^1-x_{20}a_{22}^1) \pm c_{23}\sqrt{(c_{23}^2-z_2^2)(1-x_{10}^2-x_{20}^2)+(c_{20}-x_{10}a_{12}^1-x_{20}a_{22}^1)^2}}{c_{23}^2(1-x_{10}^2-x_{20}^2)+(x_{10}a_{12}^1+x_{20}a_{22}^1-c_{20})^2},$$

$$x_{31} = -x_{10}x_{30},$$

$$x_{32} = -x_{20}x_{30},$$

$$x_{33} = \frac{1}{c_{23}}\left(z_2 + x_{30}(x_{10}a_{12}^1 + x_{20}a_{22}^1 - c_{20})\right).$$

Покладемо

$$E_3 = \langle \psi_3, \mathbf{A}_2\psi_3\rangle - b_3$$

і визначимо оператор

$$A_3 = A_2 \tilde{+} \alpha_3\langle\cdot, \omega_3\rangle\omega_3,$$

де

$$\omega_3 = (\mathbf{A}_2 - E_3)\psi_3 \in \mathcal{H}_{-1}, \qquad \alpha_3 = -\frac{1}{\langle\psi_3, (\mathbf{A}_2 - E_3)\psi_3\rangle}.$$

За побудовою оператор A_3 розв'язує відповідну задачу на власні значення. При цьому, будуючи згідно з викладеним у п. 2 якобієву матрицю, асоційовану з A_3, ми отримуємо матрицю J_3, з якої починали тут.

Так само діємо на довільному n-му кроці. Припускаємо, що $\det J_n \neq 0$. Для побудови оператора A_n знайдемо ψ_n та E_n. Вектор ψ_n шукаємо у вигляді

$$\psi_n = x_{n0}\varphi_0 + \sum_{k=1}^{n-1} x_{nk}\psi_k + x_{nn}\varphi_n.$$

Складаємо систему рівнянь для знаходження x_{nk}:

$$\begin{aligned} &(\psi_n, \psi_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1, \\ &\|\psi_n\| = 1, \\ &|\langle\psi_n, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle| = a_{n-1}, \end{aligned} \tag{21}$$

де перші n рівнянь — умови ортонормованості системи векторів ψ_j. Переписуємо систему (21) у вигляді

$$\begin{aligned} &x_{nk} + x_{n0}(\varphi_0, \psi_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1, \\ &\sum_{k=0}^{n} x_{nk}^2 + 2x_{n0}\sum_{k=1}^{n-1} x_{nk}\langle\varphi_0, \psi_k\rangle = 1, \\ &x_{n0}\langle\varphi_0, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle + \sum_{k=1}^{n-1} x_{nk}\langle\psi_k, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle + x_{nn}\langle\varphi_n, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle = z_{n-1}. \\ &|z_{n-1}| = a_{n-1}, \end{aligned} \tag{22}$$

Позначимо $a_{k,n-1}^{n-2} = \langle\psi_k, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle$, $k = 1, \ldots, n-1$, $c_{0,n-1} = \langle\varphi_0, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle$, $c_{n,n-1} = \langle\varphi_n, \mathbf{A}_{n-2}\psi_{n-1}\rangle$. Тоді розв'язки системи (22) мають вигляд

$$x_{n0} = \frac{1}{c_{n,n-1}^2\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}x_{k0}^2\right)+\left(c_{0,n-1}^2-\sum_{k=1}^{n-1}x_{k0}a_{k,n-1}^{n-2}\right)^2}\left(z_{n-1}\left(c_{0,n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}x_{k0}a_{k,n-1}^{n-2}\right)\pm\right.$$

$$\left.\pm\; c_{n,n-1}\sqrt{(c_{n,n-1}^2-z_{n-1}^2)\left(1-\sum_{k=1}^{n-1}x_{k0}^2\right)+\left(c_{0,n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}x_{k0}a_{k,n-1}^{n-2}\right)^2}\right),$$

$$x_{nk} = -x_{n0}a_{k,n-1}^{n-2}, \qquad k = 1,\ldots,n-1,$$

$$x_{nn} = \frac{1}{c_{n,n-1}}\left(z_{n-1}-x_{n0}\left(c_{0,n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}x_{k0}a_{k,n-1}^{n-2}\right)\right).$$

Покладемо

$$E_n = \langle\psi_n, \mathbf{A}_{n-1}\psi_n\rangle - b_n.$$

Тоді оператор A_n будуємо як збурення рангу 1 оператора A_{n-1}, отриманого на попередньому кроці:

$$A_n = A_{n-1} \tilde{+}\, \alpha_n\langle\cdot,\omega_n\rangle\omega_n,$$

де

$$\omega_n = (\mathbf{A}_{n-1}-E_n)\psi_n, \qquad \alpha_n = -\frac{1}{\langle\psi_n,(\mathbf{A}_{n-1}-E_n)\psi_n\rangle}.$$

При цьому A_n розв'язує задачу на власні значення з числами $E_j,\ j\le n,$ а матриця Якобі, асоційована з A_n, збігається з J_n. Очевидно, що $J = \text{st.gr-lim}\, J_n,\ n\to\to\infty$ (докладніше див. [19]).

Якщо при деякому k виявиться, що $\det J_k = 0$, то це еквівалентно співвідношенню

$$b_k - \cfrac{a_{k-2}^2}{b_{k-1}-\ldots-\cfrac{a_2^2}{b_2-\cfrac{a_1^2}{b_1}}} = 0,$$

що у свою чергу приводить до $\alpha_k=\infty$. В такому разі оператор A_k визначаємо як розширення за Фрідріхсом симетричного оператора $\dot{A}_{k-1} := A_{k-1}\big|\{f\in\in\mathcal{D}(A_{k-1}):\langle f,\omega_k\rangle=0\}$. Тоді система рівнянь для знаходження вектора ψ_k, зображеного лінійною комбінацією

$$\psi_k = x_{0,k}\varphi_0 + \sum_{j=1}^{k-1}x_{k,j}\psi_j + x_{k,k}\varphi_k,$$

має вигляд

$$(\psi_k,\psi_j) = 0, \qquad j = 1,\ldots,k-1,$$

$$\|\psi_k\| = 1,$$

$$\left|\langle\psi_k, \mathbf{A}_{k-2}\psi_{k-1}\rangle\right| = a_{k-1},$$

де перші k рівнянь — умови отонормованості системи векторів ψ_j. Знайшовши вектор ψ_k, визначимо число E_k і оператор A_k таким же способом, як і вище. З цим оператором буде асоційована матриця J_k.

Теорему 2 доведено.

На завершення зазначимо, що якобієва матриця як об'єкт дослідження, звичайно, виникає в проблемі моментів (див., наприклад, оглядові статті [20, 21]). Тут уперше матриці Якобі відіграють роль збурення самоспряженого оператора. Це відкриває новий спосіб побудови сингулярно збурених операторів у випадку, коли збурення задається мірою, зосередженою на довільно складній множині (фракталі). Потрібно за такою мірою побудувати якобієву матрицю (згідно з теорією проблеми моментів), а потім використати її для введення збуреного оператора, як було описано вище.

1. *Albeverio S., Koshmanenko V.* Singular rank one perturbations of self-adjoint operators and Krein theory of self-adjoint extensions // Potent. Anal. – 1999. – **11**. – P. 279 – 287.
2. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators. – Cambridge: Univ. Press, 2000. – 265 p.
3. *Koshmanenko V. D.* Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 11. – С. 1559 – 1566.
4. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 176 с.
5. *Koshmanenko V.* A variant of the inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory // Methods Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 1. – P. 49 – 69.
6. *Дудкін М. Є., Кошманенко В. Д.* Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1269 – 1276.
7. *Кошманенко В. Д., Тугай Г. В.* Про структуру резольвенти сингулярно збуреного оператора, що розв'язує задачу на власні значення // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 9. – С. 1292 – 1297.
8. *Albeverio S., Konstantinov A., Koshmanenko V.* On inverse spectral theory for singularly perturbed operator: point spectrum // Inverse Problems. – 2005. – **21**. – P. 1871 – 1878.
9. *Albeverio S., Dudkin M., Konstantinov A., Koshmanenko V.* On the point spectrum of $\mathcal{H}_{-2}$ singular perturbations // Math. Nachr. – 2005. – **280**, № 1 – 2. – P. 1 – 8.
10. *Nizhnik L.* The singular rank-one perturbations of self-adjoint operators // Methods Funct. Anal. and Top. – 2001. – **7**, № 3. – P. 54 – 66.
11. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
12. *Koshmanenko V.* Singular operator as a parameter of self-adjoint extensions // Proc. Krein Conf. (Odessa, 1997). Operator Theory. Adv. and Appl. – 2000. – **118**. – P. 205 – 223.
13. *Posilicano A.* A Krein-like formula for singular perturbations of self-adjoint operators and applications // J. Func. Anal. – 2001. – **183**. – P. 109 – 147.
14. *Каратаева Т. В., Кошманенко В. Д.* Обобщенная сумма операторов // Мат. заметки. – 1999. – **66**, № 5. – С. 671 – 681.
15. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
16. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I // Мат. сб. – 1947. – **20(62)**, № 3. – С. 431 – 495.
17. *Gesztesy F., Simon B.* Rank-one perturbations at infinite coupling // J. Funct. Anal. – 1995. – **128**. – P. 245 – 252.
18. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные возмущения с бесконечной константой связи // Функцион. анализ и его прил. – 1999. – **33**, № 2. – С. 81 – 84.
19. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. I. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977. – 357 с.
20. *Simon B.* The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator // Adv. Math. – 1998. – **137**. – P. 82 – 203.
21. *Berezansky Yu. M.* Some generalizations of the classical moment problem // Integral Equat. Operator Theory. – 2002. – **44**. – P. 255 – 289.

Одержано 24.11.2005,
після доопрацювання — 23.02.2006