УДК 517.9

А. А. Ковалевский, М. В. Войтович
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О ПОВЫШЕНИИ СУММИРУЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С УСИЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТЬЮ*

We consider the Dirichlet problem for a class of nonlinear fourth-order equations in divergence form characterized by a strengthened ellipticity condition on coefficients. The main result of the article shows how the summability of generalized solutions of the given problem improves in dependence on the change of the exponent of summability of the right-hand side of the given equation beginning with a critical value. At the same time, we define more precisely the exponent of summability that guarantees the boundedness of solutions.

Розглядається задача Діріхле для класу нелінійних дивергентних рівнянь четвертого порядку, що характеризуються умовою підсиленої еліптичності на коефіцієнти. Основний результат роботи показує, як саме підвищується сумовність узагальнених розв'язків даної задачі в залежності від зміни показника сумовності правої частини рівняння, починаючи з деякого критичного значення. При цьому уточнюється показник сумовності, що забезпечує обмеженість розв'язків.

1. Введение и формулировка основного результата. В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для нелинейных уравнений четвертого порядка, коэффициенты которых удовлетворяют условию усиленной эллиптичности. Классы уравнений высокого порядка с таким условием на коэффициенты и достаточно регулярными данными были введены И. В. Скрыпником в [1]. Как показано в статье [1], все обобщенные решения уравнений выделенных классов непрерывны по Гельдеру и, в частности, ограничены. Уравнения высоких порядков с усиленной эллиптичностью и L^1-данными (не укладывающимися в обычные рамки теории монотонных операторов [2]) впервые были исследованы в [3 – 5]. В этих работах на основе развития подхода, предложенного в [6], для соответствующей задачи Дирихле получены результаты о существовании и свойствах суммируемости энтропийных и W-решений, являющихся более слабыми, чем обобщенные решения. В случае правых частей уравнений из пространств, близких к L^1 (т. е. из L^m с m, большим единицы и меньшим некоторого m_0), свойства суммируемости энтропийных и W-решений той же задачи, что в [3, 4] и данной статье, описаны в [7]. Дальнейшее увеличение суммируемости правых частей рассматриваемых уравнений в шкале пространств Лебега приводит к обобщенным решениям. Основной результат настоящей работы показывает как именно повышается суммируемость обобщенных решений задачи Дирихле в зависимости от изменения показателя суммируемости правой части уравнения в интервале $(m_0, +\infty)$. При этом получено более слабое по сравнению с [1] условие на показатель суммируемости правой части, обеспечивающее ограниченность решений.

Перейдем к подробному описанию рассматриваемой задачи и установленного результата.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, Ω — ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Через Λ обозначим множество всех n-мерных мультииндексов α таких, что $|\alpha| = 1$ или $|\alpha| = 2$. Будем использовать еще такие обозначения: $\mathbb{R}^{n,2}$ — пространство всех отображений $\xi : \Lambda \to \mathbb{R}$; если $u \in W^{2,1}(\Omega)$, то $\nabla_2 u : \Omega \to \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ имеем $(\nabla_2 u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$.

* Выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № 01.07/00252).

Пусть $p \in (1, n/2)$ и $q \in (2p, n)$. Через $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u \in W^{1,q}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные второго порядка из $L^p(\Omega)$. Множество $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ есть банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ обозначим замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^{1,q}_{2,p}(\Omega)$.

Положим

$$q^* = \frac{nq}{n-q}.$$

Как известно (см., например, [8], гл. 7),

$$\overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega), \tag{1}$$

и существует положительная постоянная c, зависящая только от n и q, такая, что для любой функции $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}(\Omega)$

$$\left(\int_\Omega |u|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \le c \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega |D^\alpha u|^q dx \right)^{1/q}. \tag{2}$$

Далее, пусть $c_1, c_2, c_3 > 0$, g_1, g_2, g_3 — неотрицательные суммируемые функции на Ω и для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha : \Omega \times \mathbb{R}^{n,2} \to \mathbb{R}$ — функция Каратеодори. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ выполняются неравенства

$$\sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x,\xi)|^{q/(q-1)} \le c_1 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_1(x), \tag{3}$$

$$\sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x,\xi)|^{p/(p-1)} \le c_2 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_2(x), \tag{4}$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x,\xi)\xi_\alpha \ge c_3 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} - g_3(x). \tag{5}$$

Пусть

$$f \in L^{q^*/(q^*-1)}(\Omega). \tag{6}$$

Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\sum_{\alpha\in\Lambda} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = f \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{7}$$

$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0,\ 1, \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{8}$$

Заметим, что в силу неравенств (3) и (4) для любых функций $u, v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$ функция $A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha v$ суммируема на Ω. Кроме того, из (1) и (6) следует, что для любой функции $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ функция fv суммируема на Ω.

Определение. *Обобщенным решением задачи* (7), (8) *будем называть функцию* $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ *такую, что для любой функции* $v \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha(x,\nabla_2 u)D^\alpha v\right\}dx = \int\limits_{\Omega} f v\,dx. \tag{9}$$

Заметим, что если дополнительно к сделанным предположениям относительно коэффициентов и правой части уравнения (7) для почти всех $x\in\Omega$ и любых $\xi,\ \xi'\in\mathbb{R}^{n,2}$ имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}[A_\alpha(x,\xi)-A_\alpha(x,\xi')](\xi_\alpha-\xi'_\alpha)\ \geq\ 0,$$

то обобщенное решение задачи (7), (8) существует. Это следует из известных результатов теории монотонных операторов (см., например, [2], гл. 2).

В силу (1) любое обобщенное решение задачи (7), (8) принадлежит пространству $L^{q^*}(\Omega)$. Однако если функции g_2, g_3 и f обладают повышенной суммируемостью, то обобщенные решения рассматриваемой задачи имеют более высокую суммируемость, чем та, которая характеризуется показателем q^*. Соответствующую зависимость выражает следующий, основной в данной работе, результат.

Теорема. *Пусть* $m > q^*/(q^*-1)$, *функции* $g_2,\ g_3, f$ *принадлежат* $L^m(\Omega)$ *и* M — *мажоранта для* $\|g_2\|_{L^m(\Omega)}$, $\|g_3\|_{L^m(\Omega)}$ *и* $\|f\|_{L^m(\Omega)}$. *Кроме того, пусть* u — *обобщенное решение задачи* (7), (8). *Тогда справедливы следующие утверждения*:

i) *если* $m < n/q$ *и* $q^* < \lambda < nm(q-1)/(n-qm)$, *то* $u\in L^\lambda(\Omega)$ *и* $\|u\|_{L^\lambda(\Omega)}\leq C_1$, *где* C_1 — *положительное число, зависящее только от* $n,\ p,\ q$, $\operatorname{meas}\Omega$, $c,\ c_2,\ c_3,\ m,\ M$ *и* λ;

ii) *если* $m = n/q$, *то*

$$\int\limits_{\Omega}\exp\big(b|u|^{1/\sigma}\big)dx\ \leq\ C_2,$$

где $\sigma = 2+2np/(q-2p)$, *а* b *и* C_2 — *положительные числа, зависящие только от* $n,\ p,\ q$, $\operatorname{meas}\Omega$, $c,\ c_2,\ c_3$ *и* M;

iii) *если* $m > n/q$, *то* $u\in L^\infty(\Omega)$ *и* $\operatorname{vrai}\max\limits_{\Omega}|u|\leq C_3$, *где* C_3 — *положительное число, зависящее только от* $n,\ p,\ q$, $\operatorname{meas}\Omega$, $c,\ c_2,\ c_3$, m *и* M.

Доказательство теоремы будет дано в п. 3. Этому предпошлем несколько замечаний, а также ряд вспомогательных результатов.

Замечания. **1.** Из утверждения ii) теоремы следует, что если выполняются условия этой теоремы, $m = n/q$ и $\lambda > q^*$, то $u\in L^\lambda(\Omega)$ и $\|u\|_{L^\lambda(\Omega)}\leq$ $\leq C'_2$, где C'_2 — положительное число, зависящее только от $n,\ p,\ q$, $\operatorname{meas}\Omega$, $c,\ c_2,\ c_3$, M *и* λ.

2. Утверждения iii) и i) теоремы согласуются с соответствующими свойствами обобщенных решений уравнений второго порядка. В связи с этим см., например, [9] (гл. 1, 4) и [10]. Что касается утверждения ii), то, как видим, для обобщенного решения u рассматриваемой задачи оно дает суммируемость функции вида $\exp(b|u|^\lambda)$ с некоторым $\lambda\in(0,1)$, тогда как для обобщенных решений уравнений второго порядка имеет место суммируемость функций такого вида с $\lambda = 1$ [9].

3. Если $p\ \geq\ 2$, $t > n/q$, $m > n^2/(nq-n+q)$, g_1, g_2, $g_3\in L^t(\Omega)$ и $f\in L^m(\Omega)$, то ограниченность обобщенных решений задачи (7), (8) следует из [1]. Поскольку $n^2/(nq-n+q) > n/q$, утверждение iii) теоремы дает более слабое по сравнению с [1] условие относительно суммируемости правой части уравнения (7), при котором обобщенные решения задачи (7), (8) ограничены. Это условие $(m > n/q)$ совпадает с условием ограниченности обобщенных решений уравнений второго порядка [9]. Отметим еще, что ограниченность обобщенных решений уравнений высокого порядка с усиленной эллиптичностью в работе [1] была установлена с помощью некоторой модификации метода Мозера. Доказательство же теоремы связано с подходом, подобным методу Стампаккья, и использованием аналогов его известной леммы (см., например, [11, 12]). Эти аналоги рассматриваются в п. 2. Здесь же вкратце напомним, что метод Стампаккья изучения свойств интегрируемости обобщенных решений уравнений второго порядка заключается в подстановке в интегральное тождество, соответствующее решению u, в качестве пробных элементов функций $u - T_k(u)$, где T_k, $k > 0$, — стандартные срезки ($T_k(s) = s$, если $|s| \le k$, и $T_k(s) == k \operatorname{sign} s$, если $|s| > k$), затем с использованием структуры уравнения и условия на суммируемость его правой части установлении специальных соотношений между мерами множеств $\{|u| \ge k\}$ и $\{|u| \ge l\}$ при $l > k$ и, наконец, получении из этих соотношений оценок мер множеств вида $\{|u| \ge k\}$, позволяющих сделать вывод об определенной суммируемости решения u. Подобный подход в общих чертах можно реализовать и для уравнений высших порядков с усиленной эллиптичностью, что и сделано в настоящей работе относительно уравнений четвертого порядка. При этом вместо стандартных срезающих функций T_k используются подходящие срезки класса C^2. В рассматриваемом случае при получении необходимых оценок возникают более существенные трудности по сравнению со случаем уравнений второго порядка, так как соответствующее интегральное тождество содержит слагаемые, связанные с производными второго порядка пробных функций, и эти слагаемые должны быть правильно учтены при реализации указанного подхода.

2. Вспомогательные предложения. Г. Стампаккья принадлежит следующий результат (см. [12], лемма 4.1).

Лемма 1. *Пусть* φ — *невозрастающая неотрицательная функция на* $[k_0, +\infty)$ *такая, что из* $l > k \ge k_0$ *следует неравенство*

$$\varphi(l) \le \frac{C}{(l-k)^{\tau}}[\varphi(k)]^{\gamma} \tag{10}$$

с положительными постоянными C, τ *и* γ. *Тогда*:

i) *если* $\gamma > 1$, *то* $\varphi(k_0 + d) = 0$, *где число* d *определяется равенством*

$$d^{\tau} = C[\varphi(k_0)]^{\gamma-1} 2^{\tau\gamma/(\gamma-1)};$$

ii) *если* $\gamma = 1$, *то для любого* $k > k_0$

$$\varphi(k) \le \varphi(k_0)\exp\left\{1 - (Ce)^{-1/\tau}(k - k_0)\right\};$$

iii) *если* $\gamma < 1$ *и* $k_0 > 0$, *то для любого* $k > k_0$

$$\varphi(k) \le 2^{\tau/(1-\gamma)^2}\left\{C^{1/(1-\gamma)} + (2k_0)^{\tau/(1-\gamma)}\varphi(k_0)\right\}k^{-\tau/(1-\gamma)}.$$

Неполные варианты этой леммы содержатся в статье [11] (утверждения i) и iii)) и монографии [13] (утверждение i)).

Роль леммы 1 в упомянутом в замечании 3 методе Стампаккья состоит в том, что подстановка в интегральное тождество, соответствующее решению u уравнения второго порядка, в качестве пробных элементов функций $u - T_k(u)$, $k > 0$, приводит в конечном счете как раз к соотношению вида (10) с функцией φ, заданной равенством $\varphi(s) = \operatorname{meas}\{|u| \ge s\}$, $s \ge 0$, и числом γ, зависящим, в частности, от показателя суммируемости правой части уравнения. Поэтому применение леммы 1 в таком случае позволяет в зависимости от значения γ (а значит, в частности, от значения показателя суммируемости правой части уравнения) сделать вывод или об ограниченности решения u, или (с использованием некоторых дополнительных фактов) об определенной суммируемости этого решения.

Заметим, что обсуждаемый здесь метод первоначально был реализован для линейных уравнений второго порядка (см., например, работы [11, 12] и [13], гл. 2). Этот метод, включая лемму Стампаккья, применим и для нелинейных уравнений второго порядка (см., например, [14 – 16]).

В рассматриваемом в настоящей статье случае уравнений четвертого порядка подстановка в интегральное тождество, соответствующее обобщенному решению u, в качестве пробных элементов функций $u - h_k(u)$, где h_k, $k > 0$, — специальные гладкие срезки, приводит к соотношению значений функции φ (определенной равенством $\varphi(s) = \operatorname{meas}\{|u| \geq s\}$, $s \geq 0$), аналогичному неравенству (10), но справедливому в более узких рамках и в отличие от (10) содержащему в правой части дополнительный множитель, зависящий от k. Для анализа этого соотношения будут полезны следующие три леммы, аналогичные соответствующим частям леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* φ *— невозрастающая неотрицательная функция на* $[0, +\infty)$, $C > 0$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2$, $\gamma > 1$, $k_0 \geq 0$ *и для любых* k *и* l *таких, что* $k_0 < k < l < 2k$, *выполняется неравенство*

$$\varphi(l) \leq \frac{Ck^{\tau_1}}{(l-k)^{\tau_2}}[\varphi(k)]^{\gamma}. \tag{11}$$

Кроме того, пусть $d > k_0$ *и*

$$d^{\tau_2 - \tau_1} \geq 2^{\tau_1 + (2\gamma - 1)\tau_2/(\gamma - 1)} C[\varphi(k_0)]^{\gamma - 1}. \tag{12}$$

Тогда $\varphi(k_0 + d) = 0$.

Доказательство. Положим $a = \tau_2/(\gamma - 1)$, и пусть для любого $j \in \mathbb{N}$

$$k_j = k_0 + d - \frac{d}{2^j}. \tag{13}$$

Тогда для любого $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$k_0 < k_j < k_{j+1} < 2k_j, \qquad k_{j+1} - k_j = \frac{d}{2^{j+1}}.$$

Используя эти соотношения, (11), (12) и неравенство $k_0 < d$, индукцией по j устанавливаем, что для любого $j \in \mathbb{N}$

$$\varphi(k_j) \leq 2^{-a(j-1)}\varphi(k_0).$$

Отсюда и из (13), учитывая, что функция φ невозрастающая и неотрицательная, выводим, что $\varphi(k_0 + d) = 0$.

Лемма доказана.

Отметим, что приведенное доказательство леммы 2 повторяет с незначительными отличиями доказательство утверждения i) леммы 1.

Лемма 3. *Пусть* φ *— невозрастающая неотрицательная функция на* $[0, +\infty)$, $C > 0$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2$, $k_0 \geq 0$ *и для любых* k *и* l *таких, что* $k_0 < k < l < 2k$, *выполняется неравенство*

$$\varphi(l) \leq \frac{Ck^{\tau_1}}{(l-k)^{\tau_2}}\varphi(k). \tag{14}$$

Кроме того, пусть

$$\lambda_0 = \max\left\{1, \left[(Ce)^{1/\tau_2}(k_0+1)^{\tau_1/\tau_2}(\tau_2-\tau_1)/\tau_2\right]^{\tau_2/(\tau_2-\tau_1)}\right\} \tag{15}$$

и $s_0 \in \mathbb{N}$, *причем*

$$s_0 > \frac{2^{(\tau_2-\tau_1)/\tau_2}}{2^{(\tau_2-\tau_1)/\tau_2}-1}. \tag{16}$$

Тогда для любого $k \geq k_0 + \lambda_0 s_0^{\tau_2/(\tau_2-\tau_1)}$ *имеем*

$$\varphi(k) \leq \varphi(k_0)\exp\left\{s_0 + 1 - \left(\frac{k-k_0}{\lambda_0}\right)^{(\tau_2-\tau_1)/\tau_2}\right\}. \tag{17}$$

Доказательство. Положим $a = \tau_2/(\tau_2-\tau_1)$, и пусть для любого $j \in \mathbb{N}$

$$k_j = k_0 + \lambda_0 j^a. \tag{18}$$

В силу (16) и (18) для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq s_0$, имеем

$$k_0 < k_{j-1} < k_j < 2k_{j-1}, \qquad k_j - k_{j-1} \geq \lambda_0 a(j-1)^{a-1}.$$

Тогда, используя (14), (15) и (18), получаем, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq s_0$,

$$\varphi(k_j) \leq e^{-1}\varphi(k_{j-1}).$$

Отсюда индукцией по j выводим, что для любого $j \in \mathbb{N}$, $j \geq s_0$,

$$\varphi(k_j) \leq \varphi(k_0)e^{-(j-s_0)}. \tag{19}$$

Пусть теперь $k \geq k_0 + \lambda s_0^a$. Возьмем $j \in \mathbb{N}$ такое, что

$$j \leq \left(\frac{k-k_0}{\lambda_0}\right)^{1/a} < j + 1. \tag{20}$$

Очевидно, что $j \geq s_0$. В силу (18) и (20) имеем $k \geq k_j$. Следовательно, $\varphi(k) \leq \varphi(k_j)$. Отсюда и из (19), (20) вытекает неравенство (17).

Лемма доказана.

Отметим, что доказательство леммы 3 аналогично доказательству утверждения ii) леммы 1. Определение последовательности $\{k_j\}$ формулой (18) и оценка (17) по существу обобщают соответствующие определение последовательности из доказательства утверждения ii) леммы 1 и оценку, приведенную в формулировке этого утверждения.

Лемма 4. *Пусть* φ — *невозрастающая неотрицательная функция на* $[0,+\infty)$, $C > 0$, $\tau > 0$, $\gamma \in (0,1)$, $k_0 \geq 0$ *и для любого* $k > k_0$ *выполняется неравенство*

$$\varphi(2k) \leq Ck^{-\tau}[\varphi(k)]^{\gamma}. \tag{21}$$

Тогда для любого $k > k_0$ *имеем*

$$\varphi(k) \leq 2^{\tau/(1-\gamma)^2}\left\{C^{1/(1-\gamma)} + \varphi(k_0)(2k_0)^{\tau/(1-\gamma)}\right\}k^{-\tau/(1-\gamma)}. \tag{22}$$

Доказательство. Пусть φ_1 — функция на $[0,+\infty)$ такая, что для любого $s \in [0,+\infty)$

$$\varphi_1(s) \;=\; \varphi(s)\left(\frac{s^\tau}{C}\right)^{1/(1-\gamma)}.$$

В силу (21) и определения функции φ_1 для любого $k > k_0$ имеем

$$\varphi_1(2k) \;\le\; 2^{\tau/(1-\gamma)}[\varphi_1(k)]^\gamma.$$

Используя этот факт и метод индукции, устанавливаем, что для любых $k > k_0$ и $j \in \mathbb{N}$

$$\varphi_1(2^j k) \;\le\; 2^{\tau/(1-\gamma)^2}[1 + \varphi_1(k)]. \tag{23}$$

Пусть $k > k_0$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, k - k_0)$. Предположим сначала, что $k > 2(k_0 + \varepsilon)$. Тогда существует $j \in \mathbb{N}$ такое, что $k_0 < 2^{-j}k \le$ $\le 2(k_0 + \varepsilon)$. Отсюда и из (23) с учетом определения функции φ_1 выводим неравенство

$$\varphi_1(k) \;\le\; 2^{\tau/(1-\gamma)^2}\left[1 + \varphi(k_0)C^{-1/(1-\gamma)}(2k_0 + 2\varepsilon)^{\tau/(1-\gamma)}\right]. \tag{24}$$

Если $k \le 2(k_0 + \varepsilon)$, то, используя определение функции φ_1, опять приходим к неравенству (24). Переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$ и снова учитывая определение функции φ_1, получаем неравенство (22).

Лемма доказана.

Приведенное доказательство леммы 4 повторяет с незначительными отличиями доказательство утверждения iii) леммы 1. Эти отличия связаны с нашим предположением, что $k_0 \ge 0$, тогда как в формулировке утверждения iii) леммы 1 требуется условие $k_0 > 0$.

Перейдем к другим вспомогательным результатам.

Лемма 5. *Пусть u — измеримая функция на Ω, $C > 0$, $\tau > 0$ и для любого $k \in \mathbb{N}$*

$$\operatorname{meas}\{|u| \ge k\} \;\le\; Ck^{-\tau}.$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, \tau)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$ и

$$\int_\Omega |u|^\lambda dx \;\le\; 2^{\tau+(\tau+\lambda)/(\tau-\lambda)}C + \operatorname{meas}\Omega.$$

Доказательство этой леммы простое. По существу оно дано в [4]. Еще раньше подобного типа утверждения использовались, например, в [6].

Лемма 6. *Пусть u — измеримая функция на Ω, $C > 0$, $\tau > 0$, $\gamma \in (0,1)$, $k_0 \ge 0$, $l_0 \ge k_0 + 1$ и для любого $k \ge l_0$*

$$\operatorname{meas}\{|u| \ge k\} \;\le\; C\exp\left\{-\tau(k - k_0)^\gamma\right\}. \tag{25}$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, \tau)$ функция $\exp(\lambda|u|^\gamma)$ суммируема на Ω и

$$\int_\Omega \exp(\lambda|u|^\gamma)dx \;\le\; \left(\frac{C}{\tau - \lambda} + \operatorname{meas}\Omega\right)e^{\tau(l_0+1)}. \tag{26}$$

Доказательство. Положим $k_* = (l_0 - k_0)^\gamma$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$

$$G_k \;=\; \left\{k_0 + (k_* + k - 1)^{1/\gamma} \le |u| < k_0 + (k_* + k)^{1/\gamma}\right\}.$$

Ясно, что

$$\{|u| \geq l_0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k. \tag{27}$$

Кроме того, для любых $k,\ j \in \mathbb{N},\ k \neq j,$ имеем

$$G_k \cap G_j = \varnothing. \tag{28}$$

Заметим еще, что в силу (25) для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\operatorname{meas} G_k \leq C \exp\{-\tau(k_* + k - 1)\}. \tag{29}$$

Пусть теперь $\lambda \in (0, \tau)$. Используя определение множеств G_k и (29), устанавливаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{G_k} \exp(\lambda |u|^\gamma) dx \leq C \exp\left\{\tau(k_0^\gamma + 1) - (\tau - \lambda)k\right\}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{G_k} \exp(\lambda |u|^\gamma) dx \leq \frac{C}{\tau - \lambda} \exp\left\{\tau(k_0^\gamma + 1)\right\}.$$

Полученный результат и свойства (27), (28) позволяют заключить, что

$$\int\limits_{\{|u| \geq l_0\}} \exp(\lambda |u|^\gamma) dx \leq \frac{C}{\tau - \lambda} \exp\left\{\tau(k_0^\gamma + 1)\right\}. \tag{30}$$

Остается заметить, что

$$\int\limits_{\{|u| < l_0\}} \exp(\lambda |u|^\gamma) dx \leq e^{\tau l_0} \operatorname{meas} \Omega. \tag{31}$$

Из (30) и (31) выводим, что функция $\exp(\lambda |u|^\gamma)$ суммируема на Ω и имеет место неравенство (26).

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы. Пусть $m > q^*/(q^* - 1)$, функции g_2, g_3, f принадлежат $L^m(\Omega)$, M — мажоранта для $\|g_2\|_{L^m(\Omega)}$, $\|g_3\|_{L^m(\Omega)}$, $\|f\|_{L^m(\Omega)}$ и u — обобщенное решение задачи (7), (8).

Через $c_i,\ i = 4, 5, \ldots,$ будем обозначать положительные числа, зависящие только от $n,\ p,\ q,\ \operatorname{meas}\Omega,\ c,\ c_2,\ c_3,\ m$ и M.

Введем ряд вспомогательных чисел и функций. В силу предположения относительно числа m имеем $(m-1)/m - 1/q^* > 0$. Положим

$$m_1 = \left(\frac{m-1}{m} - \frac{1}{q^*}\right)^{-1}, \tag{32}$$

$$\gamma = q^* \min\left\{\frac{1}{m_1(q-1)},\ \frac{m-1}{mq}\right\}. \tag{33}$$

В силу (32) имеем

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{q^*} = 1. \tag{34}$$

Кроме того, из определения чисел m_1 и γ следует, что

$$\text{если} \quad m < \frac{n}{q}, \quad \text{то} \quad \gamma = \frac{1}{q-1}\left(\frac{m-1}{m}q^* - 1\right) < 1, \tag{35}$$

$$\text{если} \quad m = \frac{n}{q}, \quad \text{то} \quad \gamma = 1, \tag{36}$$

$$\text{если} \quad m > \frac{n}{q}, \quad \text{то} \quad \gamma > 1. \tag{37}$$

Положим

$$\Phi = \sum_{|\alpha|=1} \left| D^\alpha u \right|^q + \sum_{|\alpha|=2} \left| D^\alpha u \right|^p,$$

и пусть φ — функция на $[0, +\infty)$ такая, что для любого $s \in [0, +\infty)$

$$\varphi(s) = \operatorname{meas}\{|u| \geq s\}.$$

Заметим, что

$$\int_\Omega \Phi\, dx \leq c_4. \tag{38}$$

Действительно, поскольку u — обобщенное решение задачи (7), (8), в силу (9) имеем

$$\int_\Omega \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha u \right\} dx = \int_\Omega f u\, dx.$$

Отсюда и из (5) следует, что

$$c_3 \int_\Omega \Phi\, dx \leq \int_\Omega f u\, dx + \int_\Omega g_3\, dx.$$

Из этого неравенства, оценивая первое слагаемое в его правой части с помощью неравенств Гельдера, Юнга и (2), выводим оценку (38).

В силу (2) и (38) для любого $k > 0$ имеем $k^{q^*}\varphi(k) \leq c^{q^*} c_4^{q^*/q}$. Следовательно,

$$\varphi(k) < 1 \qquad \forall k \geq c(c_4 + 1). \tag{39}$$

Далее, положим

$$t = \frac{2qpm}{q - 2p} + 2, \tag{40}$$

и пусть ψ — функция на $(0, +\infty)$ такая, что для любого $s \in (0, +\infty)$

$$\psi(s) = s - s^t + \frac{t-1}{t+1} s^{t+1}.$$

Положим

$$k_0 = \max\left\{ c(c_4 + 1),\ 6n(t-2)(c_2 + n)/c_3 \right\} \tag{41}$$

и зафиксируем произвольное число $k \geq k_0$.

Пусть h_k — функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$h_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если} \quad |s| \leq k, \\ \left[\psi\left(\dfrac{|s| - k}{k}\right) + 1\right] k \operatorname{sign} s, & \text{если} \quad k < |s| < 2k, \\ \dfrac{2kt}{t+1} \operatorname{sign} s, & \text{если} \quad |s| \geq 2k. \end{cases}$$

Имеем $h_k \in C^2(\mathbb{R})$,

$$|h_k| < 2k \quad \text{на} \quad \mathbb{R}, \tag{42}$$

$$0 \le h_k' \le 1 \quad \text{на} \quad \mathbb{R}, \tag{43}$$

$$|h_k''| \le \frac{t}{k} \quad \text{на} \quad \mathbb{R}. \tag{44}$$

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon \in (0,1)$, $s \in \mathbb{R}$ и $k \le |s| \le k(1+\varepsilon)$, то

$$|h_k''(s)| \le \frac{t^2}{k}\varepsilon^{t-2};$$

б) если $\varepsilon \in (0,1)$, $s \in \mathbb{R}$ и $k(1+\varepsilon) \le |s| \le 2k$, то

$$|h_k''(s)| \le \frac{t}{k\varepsilon}(1 - h_k'(s));$$

в) если $k < l \le 2k$, $s \in \mathbb{R}$ и $|s| \ge l$, то

$$|s - h_k(s)| \ge \frac{2}{t+1}(l-k)\left(\frac{l-k}{k}\right)^{t-1}.$$

Действительно, пусть $\varepsilon \in (0,1)$, $s \in \mathbb{R}$ и $k \le |s| \le k(1+\varepsilon)$. Предположим, что $|s| \ne k$. Тогда в силу определения функций h_k и ψ имеем

$$|h_k''(s)| = \frac{1}{k}\left|\psi''\left(\frac{|s|-k}{k}\right)\right| = \frac{t}{k}(t-1)\left(\frac{|s|-k}{k}\right)^{t-2}\left(1-\frac{|s|-k}{k}\right).$$

Следовательно, $|h_k''(s)| \le \dfrac{t^2}{k}\varepsilon^{t-2}$. Очевидно, что это неравенство верно и в случае $|s| = k$. Тем самым справедливость утверждения а) установлена.

Пусть теперь $\varepsilon \in (0,1)$, $s \in \mathbb{R}$ и $k(1+\varepsilon) \le |s| \le 2k$. Используя определения функций h_k и ψ, получаем

$$|h_k''(s)| - \frac{t}{k\varepsilon}(1 - h_k'(s)) = \frac{1}{k}\left|\psi''\left(\frac{|s|-k}{k}\right)\right| - \frac{t}{k\varepsilon}\left(1-\psi'\left(\frac{|s|-k}{k}\right)\right) =$$

$$= \frac{t}{k}(t-1)\left(\frac{|s|-k}{k}\right)^{t-2}\left(1-\frac{|s|-k}{k}\right) -$$

$$- \frac{t}{k\varepsilon}\left\{t\left(\frac{|s|-k}{k}\right)^{t-1} - (t-1)\left(\frac{|s|-k}{k}\right)^{t}\right\} <$$

$$< \frac{t(t-1)}{k}\left(\frac{|s|-k}{k}\right)^{t-2}\left(1-\frac{|s|-k}{k}\right)\left(1-\frac{|s|-k}{k\varepsilon}\right) \le 0.$$

Следовательно, утверждение б) доказано.

Пусть, наконец, $k < l \le 2k$, $s \in \mathbb{R}$ и $|s| \ge l$. Предположим сначала, что $|s| < 2k$. Тогда в силу определения функции ψ имеем

$$|s| - \left[\psi\left(\frac{|s|-k}{k}\right)+1\right]k = k\left(\frac{|s|-k}{k}\right)^{t}\left(1-\frac{t-1}{t+1}\cdot\frac{|s|-k}{k}\right) \ge$$

$$\ge \frac{2k}{t+1}\left(\frac{l-k}{k}\right)^{t}.$$

Отсюда и из определения функции h_k следует, что

$$|s - h_k(s)| = |s| - \left[\psi\left(\frac{|s|-k}{k}\right)+1\right]k \geq \frac{2}{t+1}(l-k)\left(\frac{l-k}{k}\right)^{t-1}.$$

Пусть теперь $|s| \geq 2k$. Тогда в силу определения функции h_k имеем

$$|s - h_k(s)| = |s| - \frac{2kt}{t+1} \geq \frac{2k}{t+1} \geq \frac{2}{t+1}(l-k)\left(\frac{l-k}{k}\right)^{t-1}.$$

Таким образом, утверждение в) доказано.

Из утверждения в) вытекает следующее утверждение:

г) если $k < l \leq 2k$, то

$$\varphi(l) \leq \frac{t^{q^*}k^{(t-1)q^*}}{(l-k)^{tq^*}} \int_\Omega |u - h_k(u)|^{q^*}\, dx. \tag{45}$$

Дальнейшая задача состоит в том, чтобы подходящим образом оценить интеграл в правой части неравенства (45). Это даст возможность применить леммы 2 – 4 и в конечном счете получить утверждения теоремы.

Используя свойства (42) – (44), аналогично лемме 2.2 из [4] устанавливаем, что $h_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$ и справедливы утверждения:

д) для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 1$,

$$D^\alpha h_k(u) = h_k'(u) D^\alpha u \quad \text{п. в. на} \quad \Omega;$$

е) для любого n-мерного мультииндекса α, $|\alpha| = 2$,

$$\left|D^\alpha h_k(u) - h_k'(u) D^\alpha u\right| \leq |h_k''(u)| \sum_{|\beta|=1} \left|D^\beta u\right|^2 \quad \text{п. в. на} \quad \Omega.$$

Положим

$$I_k = \int_\Omega |f||u - h_k(u)|dx,$$

$$I_k' = \int_\Omega \left\{\sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \nabla_2 u)|\right\}\left\{\sum_{|\beta|=1} \left|D^\beta u\right|^2\right\}|h_k''(u)|dx.$$

Поскольку $u - h_k(u) \in \overset{\circ}{W}{}^{1,q}_{2,p}(\Omega)$, в силу (9) имеем

$$\int_\Omega \left\{\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha(u - h_k(u))\right\}dx = \int_\Omega f(u - h_k(u))\,dx.$$

Из этого равенства и утверждений д) и е) выводим

$$\int_\Omega \left\{\sum_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha u\right\}(1 - h_k'(u))\,dx \leq I_k + I_k'.$$

Отсюда, используя (5), (43) и то, что $h_k' = 1$ на $(-k, k)$, получаем

$$c_3 \int_\Omega \Phi(1 - h_k'(u))\,dx \leq \int_{\{|u|\geq k\}} g_3\,dx + I_k + I_k'. \tag{46}$$

Установим подходящие оценки для слагаемых в правой части этого неравенства. Ясно, что

$$\int\limits_{\{|u|\geq k\}} g_3\,dx \;\leq\; M[\varphi(k)]^{(m-1)/m}. \tag{47}$$

Оценим I_k. Прежде всего заметим, что в силу (2), утверждения д) и (43) имеет место неравенство

$$\left(\int\limits_{\Omega}|u-h_k(u)|^{q^*}dx\right)^{1/q^*} \;\leq\; c\left(\int\limits_{\Omega}\Phi(1-h_k'(u))\,dx\right)^{1/q}. \tag{48}$$

Используя тот факт, что $h_k(s)=s$ для $s\in(-k,k)$, а также (34), неравенство Гельдера и (48), получаем

$$I_k \;=\; \int\limits_{\{|u|\geq k\}}|f||u-h_k(u)|\,dx \;\leq$$

$$\leq\; (\operatorname{meas}\{|u|\geq k\})^{1/m_1}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int\limits_{\Omega}|u-h_k(u)|^{q^*}dx\right)^{1/q^*} \;\leq$$

$$\leq\; cM[\varphi(k)]^{1/m_1}\left(\int\limits_{\Omega}\Phi(1-h_k'(u))\,dx\right)^{1/q}.$$

Отсюда и из неравенства Юнга следует, что

$$I_k \;\leq\; \frac{c_3}{4}\int\limits_{\Omega}\Phi(1-h_k'(u))\,dx \;+\; c_5[\varphi(k)]^{q/(q-1)m_1}. \tag{49}$$

Перейдем к оценке интеграла I_k'. Это является наиболее существенным моментом в доказательстве теоремы. Предположим сначала, что $\varphi(k)>0$. Положим

$$\varepsilon \;=\; [\varphi(k)]^{1/(t-2)}. \tag{50}$$

Поскольку $k\geq k_0$, в силу (41) и (39) имеем $\varphi(k)<1$. Следовательно, $\varepsilon\in(0,1)$. Очевидно, что

$$\frac{p-1}{p}+\frac{2}{q}+\frac{q-2p}{qp} \;=\; 1.$$

Используя это равенство и неравенство Юнга, устанавливаем, что если α — n-мерный мультииндекс, $|\alpha|=2$, и β — n-мерный мультииндекс, $|\beta|=1$, то

$$|A_\alpha(x,\nabla_2 u)|\left|D^\beta u\right|^2 \;\leq\; \varepsilon^2|A_\alpha(x,\nabla_2 u)|^{p/(p-1)} \;+$$

$$+\;\varepsilon^2\left|D^\beta u\right|^q+\varepsilon^{2-2qp/(q-2p)} \quad \text{на} \quad \Omega.$$

Отсюда и из (4) выводим

$$I_k' \;\leq\; n(c_2+n)\varepsilon^2\int\limits_{\Omega}\Phi|h_k''(u)|\,dx \;+\; n\varepsilon^2\int\limits_{\Omega}g_2|h_k''(u)|\,dx \;+$$

$$+\; n^3\varepsilon^{2-2qp/(q-2p)}\int\limits_{\Omega}|h_k''(u)|\,dx\,. \tag{51}$$

В силу того, что $h_k''=0$ на $(-k,k)$, и (44) имеем

$$\int_\Omega g_2 |h_k''(u)| dx \leq \frac{Mt}{k} [\varphi(k)]^{(m-1)/m}, \tag{52}$$

$$\int_\Omega |h_k''(u)| dx \leq \frac{t}{k} \varphi(k). \tag{53}$$

Ясно также, что

$$\int_\Omega \Phi |h_k''(u)| dx = \int_{\{k \leq |u| < k(1+\varepsilon)\}} \Phi |h_k''(u)| dx + \int_{\{k(1+\varepsilon) \leq |u| \leq 2k\}} \Phi |h_k''(u)| dx. \tag{54}$$

Из утверждения а) и (38) следует, что

$$\int_{\{k \leq |u| < k(1+\varepsilon)\}} \Phi |h_k''(u)| dx \leq \frac{c_4 t^2}{k} \varepsilon^{t-2}, \tag{55}$$

а в силу утверждения б) имеем

$$\int_{\{k(1+\varepsilon) \leq |u| \leq 2k\}} \Phi |h_k''(u)| dx \leq \frac{t}{k\varepsilon} \int_\Omega \Phi (1 - h_k'(u)) dx. \tag{56}$$

Из (54) – (56) вытекает неравенство

$$\int_\Omega \Phi |h_k''(u)| dx \leq \frac{c_4 t^2}{k} \varepsilon^{t-2} + \frac{t}{k\varepsilon} \int_\Omega \Phi (1 - h_k'(u)) dx. \tag{57}$$

В свою очередь, из (51) – (53) и (57), учитывая (40), (41) и (50), получаем

$$I_k' \leq \frac{c_3}{2} \int_\Omega \Phi (1 - h_k'(u)) dx + c_6 [\varphi(k)]^{(m-1)/m}. \tag{58}$$

Это неравенство доказано в предположении, что $\varphi(k) > 0$. Однако, легко видеть, что оно имеет место и в случае $\varphi(k) = 0$.

Из (46), (47), (49) и (58) следует, что

$$c_3 \int_\Omega \Phi (1 - h_k'(u)) dx \leq 4(M + c_6) [\varphi(k)]^{(m-1)/m} + 4 c_5 [\varphi(k)]^{q/(q-1)m_1}. \tag{59}$$

Неравенства (48), (59) и равенство (33) позволяют заключить, что

$$\int_\Omega |u - h_k(u)|^{q^*} dx \leq c_7 [\varphi(k)]^\gamma.$$

Отсюда и из утверждения г) выводим, что справедливо следующее утверждение:

ж) если $k_0 \leq k < l \leq 2k$, то

$$\varphi(l) \leq \frac{c_8 k^{(t-1)q^*}}{(l-k)^{tq^*}} [\varphi(k)]^\gamma.$$

Используя это утверждение, а также (35) и леммы 4, 5, устанавливаем, что справедливо утверждение i) теоремы. В силу утверждения ж), (36) и лемм 3, 6 верно утверждение ii) теоремы. Наконец, из утверждения ж), (37) и леммы 2 выводим, что справедливо утверждение iii) теоремы.

Теорема доказана.

Замечания. **4.** Определение и свойства функций h_k, использованных в доказательстве теоремы, аналогичны определению и свойствам гладких срезок, введенных в [4].

5. Относительно других аналогов леммы Стампаккья и их использования при исследовании свойств решений некоторых эволюционных уравнений четвертого порядка см., например, [17, 18].

1. *Скрыпник И. В.* О квазилинейных эллиптических уравнениях высшего порядка с непрерывными обобщенными решениями // Дифференц. уравнения. – 1978. – **14**, № 6. – С. 1104 – 1118.
2. *Lions J. L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. – Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969. – 554 p.
3. *Kovalevsky A.* Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic fourth-order equations with L^1-data // Nonlinear Boundary Value Problems. – 1999. – **9**. – P. 46 – 54.
4. *Ковалевский А. А.* Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1-правыми частями // Изв. РАН. Сер. мат. – 2001. – **65**, № 2. – С. 27 – 80.
5. *Kovalevsky A.* Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic high-order equations with L^1-data // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – **12**. – С. 119 – 127.
6. *Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T. et al.* An L^1-theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola norm. super. Pisa, Cl. Sci. IV.Ser. – 1995. – **22**. – P. 241 – 273.
7. *Ковалевский А. А.* О суммируемости энтропийных решений задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка // Изв. РАН. Сер. мат. – 2003. – **67**, № 5. – С. 35 – 48.
8. *Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic partial differential equations of second order. – Berlin: Springer, 1983. – 513 p.
9. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
10. *Alvino A., Boccardo L., Ferone V. et al.* Existence results for nonlinear elliptic equations with degenerate coercivity // Ann. mat. pura ed appl. IV. Ser. – 2003. – **182**. – P. 53 – 79.
11. *Stampacchia G.* Regularisation des solutions de problemes aux limites elliptiques a donnees discontinues // Proc. Int. Symp. Linear Spaces (Jerusalem, 1960). – 1961. – P. 399 – 408.
12. *Stampacchia G.* Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus // Semin. math. super. n. 16 (ete 1965). – Montreal: Les Press. Univ. de Montreal, 1966. – 326 p.
13. *Киндерлерер Д., Стампаккья Г.* Введение в вариационные неравенства и их приложения. – М.: Мир, 1983. – 256 с.
14. *Boccardo L., Giachetti D.* Alcuni osservazioni sulla regolarità delle soluzioni di problemi fortemente non lineari e applicazioni // Ric. mat. – 1985. – **34**. – P. 309 – 323.
15. *Boccardo L., Marcellini P., Sbordone C.* L^∞-regularity for variational problems with sharp non standard growth conditions // Boll. Unione mat. ital. – 1990. – **4-A**. – P. 219 – 225.
16. *Stroffolini B.* Global boundedness of solutions of anisotropic variational problems // Ibid. – 1991. – **5-A**. – P. 345 – 352.
17. *Shishkov A. E., Taranets R. M.* On the thin-film equation with nonlinear convection in multidimensional domains // Ukr. Math. Bull. – 2004. – **1**, № 3. – P. 407 – 450.
18. *Giacomelli L., Shishkov A.* Propagation of support in one-dimensional convected thin-film flow // Indiana Univ. Math. J. – 2005. – **54**, № 4. – P. 1181 – 1215.

Получено 29.06.2006