УДК 519.21

А. Ю. Пилипенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
Ю. Е. Приходько (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ”, Киев)

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

We study the limit behavior of a sequence of Markov processes whose distributions outside any neighborhood of a “singular” point are attracted to a certain probability law. In any neighborhood of this point, the limit behavior can be irregular. As an example of application of the general result, we consider a symmetric random walk with unit jumps perturbed in the neighborhood of the origin. The invariance principle is established for the standard time and space scaling. The limit process is a skew Brownian motion.

Досліджується гранична поведінка послідовності марковських процесів, розподіл яких ззовні довільного околу певної „сингулярної” точки притягується до певного закону. В околі цієї точки поведінка може бути нерегулярною. Як приклад застосування загального результату досліджено симетричне випадкове блукання з одиничним кроком, збурене в околі нуля. При стандартному нормуванні часової та просторової змінних встановлено принцип інваріантності, де граничним процесом є косий броунівський рух.

1. Введение. В данной статье исследуется предельное поведение последовательности марковских процессов $\{X_n\}$, распределение которых вне любой окрестности некоторой выделенной „сингулярной” точки притягивается к известному закону. В окрестности же этой точки поведение может быть нерегулярным. Например, пусть $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $n \geqslant 0$, — стандартное случайное блуждание с нулевым средним скачка и конечной дисперсией $\sigma^2 = D\xi_k$. Известно, что распределения последовательностей $\left\{\dfrac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}},\ n \geqslant 1\right\}$ слабо сходятся в $D\big([0;T]\big)$ к броуновскому движению. Предположим теперь, что цепь Маркова $\{\tilde{S}_n\}$ имеет вне множества $[-m, m]$ такие же переходные вероятности, как и $\{S_n\}$, и произвольные переходные вероятности в этом множестве. Тогда последовательность $\left\{\dfrac{\tilde{S}_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}},\ n \geqslant 1\right\}$ вне произвольной окрестности нуля ведет себя так же, как $\left\{\dfrac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}},\ n \geqslant 1\right\}$ (отрезок $[-m/\sqrt{n}, m/\sqrt{n}]$ стягивается к нулю при $n \to \infty$). В этом случае предел $\left\{\dfrac{S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}},\ n \geqslant 1\right\}$ уже может и не быть броуновским движением. Так, в случае, когда $\{\tilde{S}_n\}$ — блуждание на $\mathbb{Z}$ с переходными вероятностями $\tilde{p}_{i,i\pm1} = 1/2$ при $i \neq 0$, и $p_{0,1} = p, p_{0,-1} = q = 1 - p$, Харрисоном и Шеппом [1] было доказано, что предельным процессом является косое броуновское движение, т. е. непрерывный марковский процесс с переходной плотностью

$$p_t(x, y) = \varphi_t(x - y) + \gamma \operatorname{sign}(y)\varphi_t\big(|x| + |y|\big), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

где $\varphi_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$ — плотность нормального распределения $N(0, t)$. Параметр проницаемости γ в данном случае равен $p - q$. Случай произвольного m и ограниченной целочисленной величины скачка рассматривался в [2 – 4], где предельным процессом также было косое броуновское движение. Если же прыжки из $[-m, m]$ не интегрируемы, то в пределе может получиться разрывный процесс, например броуновское движение с граничными условиями Вентцеля (см. [5]).

Еще одним примером построения и исследования подобных последовательностей могут служить диффузии на графах (см. [6, 7]). Их можно получать, например, как предел симметричных случайных блужданий на ребрах графа с дополнительными условиями в вершинах, или предельным переходом от более сложных схем, когда в пределе несколько узлов „стягиваются” в один [8].

Отметим также серию работ, связанную с построением броуновского движения в конусе с отражением от его границы (см. [9 – 11] и приведенную там библиографию). До момента попадания в вершину конуса отраженное броуновское движение можно определить как сильное решение некоторого стохастического дифференциального уравнения. Проблема определения процесса после попадания в вершину нетривиальна. Один из способов — построить его как предел при $\varepsilon \to 0+$ последовательности броуновских движений, отскакивающих от вершины конуса на вектор длины ε внутрь конуса в момент достижения вершины (естественно, при этом требуется доказать существование предела, единственность, охарактеризовать свойства и т. д.).

Еще один пример последовательности процессов с сингулярностью в окрестности фиксированной точки рассмотрен в работах [12, 13], где исследовалась последовательность диффузионных процессов

$$d\xi_\varepsilon(t) = b(\xi_\varepsilon(t))dt + \varepsilon\sigma(\xi_\varepsilon(t))dw(t),$$

стартующих из нуля. Здесь функция b непрерывна, а точка 0 является ее единственным нулем. При этом предполагалось, что предельное уравнение

$$d\xi(t) = b(\xi(t))dt \tag{1}$$

может не иметь свойства единственности решения при старте из нуля. При некоторых условиях на функции b, σ было доказано, что предельный процесс с некоторой вероятностью p является максимальным решением уравнения (1) и с вероятностью $1-p$ — минимальным решением уравнения (1).

В данной работе предлагается методика доказательства существования предела для последовательности процессов с иррегулярностями в окрестности некоторой фиксированной точки. При этом, вообще говоря, не предполагается, что исходная последовательность процессов $\{X_n\}$ является марковской. Соответствующий общий результат приведен в п. 2. Достаточные условия в случае, когда $\{X_n\}$ имеет некоторые моменты обновления, даны в п. 3 (теорема 2). Соответствующий метод проиллюстрирован в п. 4 для последовательности $\left\{\dfrac{\tilde S_{[nt]}}{\sigma\sqrt{n}},\ n \geqslant 1\right\}$, где $\{\tilde S_k, k \geq 0\}$ — цепь Маркова на $\mathbb{Z}$ с переходными вероятностями такими, что

$$p_{i,i\pm1} = 1/2 \quad \text{при} \quad |i| > m,$$

$$\sum_j p_{ij}|j| < \infty \quad \text{при} \quad |i| \leqslant m,$$

т. е. для $|i| \leqslant m$ математическое ожидание скачка конечно.

Пределом будет косое броуновское движение, параметр проницаемости которого будет вычислен явно. Отметим, что в отличие от [2–4] мы не предполагаем ограниченности скачков при $|i| \leqslant m$. Возможно, данный пример можно было бы исследовать с помощью полугрупповой или резольвентной техники. Наши рассуждения, с одной стороны, имеют более прозрачную вероятностную интерпретацию, а с другой — их можно применять и для возмущенных в окрестности некоторой точки x^* последовательностей непрерывных полумарковских процессов (соответствующее определение см. в [14]). Для наших рассуждений важно лишь то, что моменты входов и выходов из окрестностей сингулярной точки x^* являются обновляющими.

2. Общая предельная теорема. В этом пункте опишем общий метод исследования предельного поведения последовательности случайных процессов с иррегулярностями в окрестности фиксированной точки. Для этого будем „удалять” определенные части траектории из окрестности данной точки и исследовать последовательность с „вырезанным” временем.

Рассмотрим формальные построения.

Пусть (E,ρ) — локально компактное метрическое пространство. Через $C\big([0,\infty)\big) = C_E\big([0,\infty)\big)$ и $D\big([0,\infty)\big) = D_E\big([0,\infty)\big)$ обозначим пространства функций со значениями в E, имеющих непрерывные и, соответственно, càdlàg траектории.

Пусть $f \in D\big([0,\infty)\big)$, $\sigma = \{\sigma_n\}$ и $\tau = \{\tau_n\}$ — последовательности действительных чисел таких, что

$$0 \leqslant \tau_0 \leqslant \sigma_0 < \tau_1 < \sigma_1 < \tau_2 < \ldots, \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = +\infty, \qquad \lambda\big(\cup_k [\sigma_k, \tau_{k+1})\big) = +\infty, \tag{3}$$

где λ — мера Лебега.

Положим

$$L(t) = L_{\tau,\sigma}(t) := \int\limits_0^t 1\!\!1_{\cup_k[\sigma_k,\tau_{k+1})}(s)ds,$$

$$A(t) = A_{\tau,\sigma}(t) := L^{-1}(t) := \inf\{s \geqslant 0 | L(s) \geqslant t\}.$$

Определение 1. *Будем говорить, что функция*

$$f^{\tau,\sigma}(t) := f(A_{\tau,\sigma}(t)),\ t \geqslant 0,$$

получена из f *вырезанием времени* $\cup_k[\tau_k,\sigma_k)$.

***Замечание* 1.** Неформально данное преобразование означает, что участки $[\tau_k,\sigma_k)$ графика функции f вырезаются, затем оставшиеся участки сдвигаются вплотную влево.

Через $\omega_f(\delta) = \omega_f^T(\delta) := \sup_{\substack{s,t\in[0,T]\\|s-t|\leqslant\delta}} \rho(f(s),f(t))$ обозначим модуль непрерывности функции f на $[0,T]$.

Лемма 1. *Предположим, что*

$$(T+1) - L(T+1) = \int\limits_0^{T+1} 1\!\!1_{\cup_k[\tau_k,\sigma_k)}(s)ds \leqslant \delta \leqslant 1.$$

Тогда

$$\sup_{t\in[0,T]} \rho(f, f^{\tau,\sigma}) \leqslant \omega_f^{T+1}(\delta).$$

Доказательство следует из того, что при сделанных предположениях $|A(t)-t| \leqslant \delta,\ t \in [0,T]$.

***Замечание* 2.** Далее будем рассматривать только функции или процессы, имеющие либо непрерывные, либо càdlàg траектории.

Теорема 1. *Предположим, что последовательность случайных процессов* $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *для некоторого* $T > 0$ *удовлетворяет условию*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, n \geqslant n_0: \quad \mathrm{P}(\omega_{X_n}^{T+1}(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Допустим, что для любого $\alpha \in (0,1)$ *найдутся последовательности случайных величин*

$$\tau^{(n)} = \tau^{(n,\alpha)} = \big\{\tau_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\big\}, \qquad \sigma^{(n)} = \sigma^{(n,\alpha)} = \big\{\sigma_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\big\},$$

удовлетворяющие (2), (3) *для всех* $n \geqslant 1$, *и случайный процесс* $X^{(\alpha)}$ *такой, что*

$$\mathrm{P}(T + 1 - L_n^{(\alpha)}(T+1) \geqslant \alpha) \leqslant \alpha, \quad n \geqslant n_0(T,\alpha), \tag{5}$$

$$X_n^{(\alpha)} \Rightarrow X^{(\alpha)}, \quad n \to \infty, \quad \textit{в} \quad D([0,T]), \tag{6}$$

где

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \int\limits_0^t 1\!\!\mathrm{I}_{\cup_k[\sigma_k^{(n,\alpha)}, \tau_{k+1}^{(n,\alpha)})}(s)ds, \quad A_n^{(\alpha)}(t) = (L_n^{(\alpha)})^{-1}(t),$$

$X_n^{(\alpha)}(t) = X_n\big(A_n^{(\alpha)}(t)\big)$ *получено вырезанием времени из* X_n.

Тогда распределения последовательности $\{X_n, n \geqslant 1\}$ *слабо сходятся в* $D\big([0,T]\big)$ *при* $n \to \infty$. *Более того, распределения* $\{X^{(\alpha)}\}$ *слабо сходятся в* $D\big([0,T]\big)$ *при* $\alpha \to 0+$ *и пределы для* $\big\{X^{(\alpha)}\big\}$ *и* $\{X_n\}$ *совпадают по распределению.*

***Замечание* 3.** Из условия (4) следует, что предельный процесс имеет непрерывную модификацию.

Доказательство. По теореме Скорохода [15] для любого $\alpha > 0$ существуют копии случайных элементов $X^{(\alpha)}$ и $X_n^{(\alpha)}, n \geqslant 1$, заданные на одном вероятностном пространстве $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathrm{P}})$, такие, что

$$\widetilde{X}_n^{(\alpha)} \xrightarrow{\mathrm{P}} \widetilde{X}^{(\alpha)}, \quad n \to \infty, \quad \text{в} \quad D\big([0,T]\big). \tag{7}$$

Несложно видеть, что существуют расширение пространства $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathrm{P}})$ и случайные элементы $\{\widetilde{X}_n, \widetilde{\tau}_k^{(n,\alpha)}, \widetilde{\sigma}_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\}$ на нем такие, что

$$\Big\{\widetilde{X}_n^{(\alpha)}, \widetilde{X}_n, \widetilde{\tau}_k^{(n,\alpha)}, \widetilde{\sigma}_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\Big\} \stackrel{d}{=} \Big\{X_n^{(\alpha)}, X_n, \tau_k^{(n,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\Big\}$$

(см. рассуждения из [16], гл. 5).

Заметим, что $X_n^{(\alpha)}$ можно рассматривать как значение некоторой измеримой функции от набора $\Big\{X_n, \tau_k^{(n,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\Big\}$. Поэтому $\widetilde{X}_n^{(\alpha)}$ является почти наверное значением той же функции от $\Big\{\widetilde{X}_n, \widetilde{\tau}_k^{(n,\alpha)}, \widetilde{\sigma}_k^{(n,\alpha)}, k \geqslant 0\Big\}$, т. е. $\widetilde{X}_n^{(\alpha)}$ получено вырезанием времени $\cup_k[\widetilde{\tau}_k^{(n,\alpha)}, \widetilde{\sigma}_k^{(n,\alpha)})$ из $\widetilde{X}_n$.

Пусть d_0^T обозначает метрику в $D([0,T])$ (см., например, [17], §14). Отметим, что d_0^T мажорируется равномерной метрикой на $[0,T]$.

Тогда с учетом леммы 1 имеем оценку

$$\mathrm{P}\left(d_0^T\left(\widetilde{X}_n, \widetilde{X}^{(\alpha)}\right) \geqslant 2\varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{P}\left(d_0^T\left(\widetilde{X}_n, \widetilde{X}_n^{(\alpha)}\right) \geqslant \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(d_0^T\left(\widetilde{X}_n^{(\alpha)}, \widetilde{X}^{(\alpha)}\right) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} \rho\left(\widetilde{X}_n, \widetilde{X}_n^{(\alpha)}\right) \geqslant \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(d_0^T\left(\widetilde{X}_n^{(\alpha)}, \widetilde{X}^{(\alpha)}\right) \geqslant \varepsilon\right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{P}\left(T+1-\widetilde{L}_n^{(\alpha)}(T+1) \geqslant \alpha\right) + \mathrm{P}\left(\omega_{\widetilde{X}_n}^{T+1}(\alpha) \geqslant \varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(d_0^T(\widetilde{X}_n^{(\alpha)}, \widetilde{X}^{(\alpha)}) \geqslant \varepsilon\right). \qquad (8)$$

По заданному $\varepsilon > 0$ выберем $\alpha \in (0,\varepsilon)$ и n_0 так, чтобы (см. (4) и (7)) второе и третье слагаемые не превышали ε при $n \geqslant n_0$. Тогда, учитывая (5), убеждаемся, что правая часть (8) не превышает 3ε.

Следовательно, для всех $n,m \geqslant n_0$

$$\mathrm{P}\left(d_0^T\left(\widetilde{X}_n, \widetilde{X}_m\right) \geqslant 4\varepsilon\right) \leqslant \mathrm{P}\left(d_0^T\left(\widetilde{X}_n, \widetilde{X}^{(\alpha)}\right) \geqslant 2\varepsilon\right) + \mathrm{P}\left(d_0^T\left(\widetilde{X}_m, \widetilde{X}^{(\alpha)}\right) \geqslant 2\varepsilon\right) \leqslant 6\varepsilon.$$

Отсюда следует, что последовательность распределений случайных процессов $\{X_n, n \geqslant 1\}$ фундаментальна в метрике Леви – Прохорова (см. [18]) , а значит, сходится.

Сходимость $\{X^{(\alpha)}, \alpha > 0\}$ к тому же пределу при $\alpha \to 0+$ следует из аналогичных рассуждений и оценки (8).

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 4.** Ситуацию применимости данной теоремы можно представить следующим образом. Пусть $\{X_n\}$ — последовательность непрерывных однородных строго марковских процессов, τ — момент достижения некоторой фиксированной точки x_0. Допустим, что $\{X_n(\cdot\wedge\tau)\}$ сходится к $\{X(\cdot\wedge\tau)\}$, как только начальные распределения процессов сходятся. В качестве моментов $\tau_k^{(n,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha)}$ возьмем моменты последовательных входов и выходов, например, в шар $B(x_0,\alpha/2)$ и, соответственно, из шара $B(x_0,\alpha)$. Тогда условие (5) означает, что если α мало, то „вырезаемое время” мало равномерно по n. Например, это верно, если равномерно по n среднее время, проведенное в $B(x_0,\alpha)$, мало при $\alpha \to 0+$:

$$\forall T > 0: \quad \lim_{\alpha\to 0+} \sup_n \mathrm{E} \int_0^T 1\!\!1_{\rho(X_n(t),x_0)\leqslant\alpha} dt = 0. \qquad (9)$$

В конкретных случаях проверка (9) может быть достаточно простой (см., например, построение броуновского движения в конусе [9, 11]).

Условие на модуль непрерывности (4) аналогично условию, гарантирующему относительную компактность процессов в пространстве непрерывных функций. Несложно проверить, что если процесс X непрерывен и $X_n(\cdot\wedge\tau) \Rightarrow X(\cdot\wedge\tau)$, как только начальные распределения процессов сходятся, то (4) выполняется, например, если справедливо (9).

3. Условия сходимости процессов, полученных вырезанием времени. В данном пункте приводятся достаточные условия, гарантирующие сходимость (6). Теорема 2, сформулированная в конце пункта, является аналогом теоремы 1, полученной с учетом этих условий.

Будем предполагать, что моменты достижения некоторых точек для процессов $\{X_n\}$ являются моментами обновления. В этом случае распределение процесса с вырезанным временем можно получить с помощью построения, описанного далее.

Рассмотрим пространство

$$M = \left\{ \bar{t} = \{t_i, i \geqslant 1\} \in (0;\infty)^{\mathbb{N}} : \sum_i t_i = +\infty \right\}$$

с метрикой покоординатной сходимости $\rho_M(\bar{t}, \bar{s}) = \sum\limits_n 2^{-n}(|t_n - s_n| \wedge 1)$.

Пусть E — локально компактное метрическое пространство. Через F обозначим отображение, действующее из $C_E([0,\infty))^{\mathbb{N}} \times M$ в $D_E([0;\infty))$ по правилу

$$(\overline{f}, \bar{t}) = (f_1, f_2, \ldots; t_1, t_2, \ldots) \to F(\overline{f}, \bar{t}) = \sum_k f_k \left(\cdot + \sum_{i=1}^{k-1} t_i \right) 1\!\!\mathrm{I}_{\left[\sum_{i=1}^{k-1} t_i, \sum_{i=1}^{k} t_i\right)}.$$

На $C_E\big([0,\infty)\big)$ рассматривается метрика, соответствующая равномерной сходимости на компактах, метрика на $C_E\big([0,\infty)\big)^{\mathbb{N}}$ вводится аналогично ρ_M.

Несложно видеть, что функция F непрерывна на $C_E([0,\infty))^{\mathbb{N}} \times M$, поэтому если последовательность случайных элементов $\left\{(\overline{\xi}^{(n)}, \overline{\tau}^{(n)}), n \geq 0\right\}$ со значениями в $C_E\big([0,\infty)\big)^{\mathbb{N}} \times M$ такова, что

$$\left(\overline{\xi}^{(n)}, \overline{\tau}^{(n)}\right) \Rightarrow \left(\overline{\xi}^{(0)}, \overline{\tau}^{(0)}\right), \quad n \to \infty,$$

то

$$F\left(\overline{\xi}^{(n)}, \overline{\tau}^{(n)}\right) \Rightarrow F\left(\overline{\xi}^{(0)}, \overline{\tau}^{(0)}\right), \quad n \to \infty,$$

в пространстве $D_E([0;\infty))$.

***Замечание* 5.** Все вышеприведенное (а также результаты ниже) верно, если $\tau_k \in (0,\infty]$ являются расширенными случайными величинами. В соответствующие определения в этом случае необходимо внести естественные изменения или сделать оговорки. Например, о том, что определение $F(\overline{f}, \bar{t})$ не содержит слагаемых после номера k, при котором $\tau_k = +\infty$.

Пусть X — непрерывный однородный строго марковский процесс со значениями в E. Через Q_x обозначим распределение X при условии $X(0) = x$. Пусть $0 = \sigma_0 \leqslant \tau_1 < \sigma_1 < \tau_2 < \ldots$ — последовательность моментов остановки такая, что $\sum_k (\tau_{k+1} - \sigma_k) = +\infty$ почти наверное. Обозначим

$$\eta_k = \begin{cases} \tau_{k+1} - \sigma_k, & \text{если } \tau_1 > 0, \\ \tau_{k+2} - \sigma_{k+1}, & \text{если } \tau_1 = 0, \end{cases}$$

$$\xi_k(t) = \begin{cases} X((\sigma_k + t) \wedge \tau_{k+1}), & \text{если } \tau_1 > 0, \\ X((\sigma_{k+1} + t) \wedge \tau_{k+2}), & \text{если } \tau_1 = 0. \end{cases}$$

Пусть $X^{(\tau,\sigma)}$ — процесс, полученный из X вырезанием времени $\cup_k[\tau_k,\sigma_k)$. Заметим, что $X^{(\tau,\sigma)} = F(\overline{\xi},\overline{\eta})$.

Из строгой марковости процесса X следует, что последовательность случайных элементов $\{(\xi_k,\eta_k),\ k \geq 1\}$ является марковской цепью (пока что неоднородной) со значениями в $C_E([0,\infty)) \times (0,\infty)$. Поэтому для сходимости последовательности процессов, полученных вырезанием времени из строго марковского процесса, нам понадобятся результаты относительно слабой сходимости цепей Маркова (мы будем исследовать не произвольные, а специально выбранные последовательности моментов остановки $\{\tau_k,\sigma_k\}$).

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность непрерывных однородных строго марковских процессов со значениями в E, $Q_x^{(n)}$ — распределение X_n при условии $X_n(0) = x$. Предположим, что существует точка x^* такая, что для любого n процесс X_n бесконечно часто попадает в любой шар $B(x^*,\varepsilon)$ и бесконечно часто выходит из любого шара $B(x^*,\varepsilon)$ с $Q_x^{(n)}$-вероятностью 1, $x \in E$. Пусть $\alpha > 0$, $\alpha_1 \in (0,\alpha)$. Возьмем в качестве $\{\tau_k,\sigma_k\}_{k\geqslant 1}$ моменты последовательных входов в шар $B(x^*,\alpha_1)$ и выходов из шара $B(x^*,\alpha)$, соответственно. Положим $\sigma_0^n := 0$,

$$\tau_k^n = \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} := \inf\Big\{t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n,\alpha_1,\alpha)} : \rho(X_n(t),x^*) \leqslant \alpha_1\Big\}, \quad k \geqslant 1,$$
$$\sigma_k^n = \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} := \inf\Big\{t \geqslant \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} : \rho(X_n(t),x^*) \geqslant \alpha\Big\}, \quad k \geqslant 1. \tag{10}$$

Предположим, что для любого $n \geq 1$ и любого начального распределения выполняется условие

$$\sum_k (\tau_{k+1}^n - \sigma_k^n) = \infty \quad \text{п. н.} \tag{11}$$

Построим аналогично предыдущим рассуждениям последовательности

$$(\overline{\xi}^n,\overline{\eta}^n) = \Big\{\xi_1^n,\xi_2^n,\ldots;\eta_1^n,\eta_2^n,\ldots\Big\} = \Big\{(\xi_k^n,\eta_k^n), k \geq 1\Big\}.$$

В данном случае $\big\{(\xi_k^n,\eta_k^n), k \geq 1\big\}$ является однородной цепью Маркова со значениями в $C_E\big([0,\infty)\big) \times (0,\infty)$. Отметим, что ее переходная вероятность $P_n\big((f,t),A\big)$ зависит только от $f(t)$. В свою очередь,

$$P_n\big((f,t),A\big) = \int_E Q_u^{(n)}\Big((X_n(\cdot \wedge \tau_1^n),\tau_1^n) \in A\Big) Q_{f(t)}^{(n)}\Big(X_n(\sigma_1^n) \in du\Big). \tag{12}$$

Модифицировав немного доказательство о слабой сходимости цепей Маркова в [19], из соотношения (12) получаем такое утверждение.

Лемма 2. *Предположим, что* $\tilde{P}_0(x,\tilde{A})$, $x \in E$, $\tilde{A} \in \mathcal{B}(E)$ *и* $\bar{P}_0(x,\bar{A})$, $x \in E$, $\bar{A} \in \mathcal{B}\big(C_E([0,\infty)\big) \times [0,\infty))$, *— стохастические ядра, непрерывные по* x (*на пространстве мер рассматривается топология слабой сходимости*). *Допустим, что начальные распределения цепей Маркова* $X_n(0)$ *слабо сходятся к некоторой мере* μ_0 *и для любого* $x \in E$ *и любой последовательности* $\{x_n\}$, *сходящейся к* x :

A$_1$) $Q_{x_n}^{(n)}\left(X_n(\sigma_1^n) \in \cdot\right) \Rightarrow \tilde{P}_0(x,\cdot)$, $n \to \infty$,

A$_2$) $Q_{x_n}^{(n)}\left((X_n(\cdot\wedge\tau_1^n),\tau_1^n)\in\cdot\right)\Rightarrow\bar P_0(x,\cdot)$, $n\to\infty$.
Тогда последовательность однородных цепей Маркова $\left\{(\xi_k^n,\eta_k^n),k\ge 1\right\}$ *слабо сходится при* $n\to\infty$ *в пространстве* $\left(C_E([0,\infty)\right)\times(0,\infty))^{\mathbb N}$ *к однородной цепи Маркова* $\left\{(\xi_k^0,\eta_k^0),k\ge 1\right\}$ *с переходным ядром* (*ср. с* (12))

$$P_0\big((f,t),A\big)=\int\limits_E\bar P_0(u,A)\tilde P_0(f(t),du).$$

В частности, если X_0 — *марковский процесс такой, что*

$$\mu_0\overset{d}{=}X_0(0),\qquad Q_x^{(0)}\left((X_0(\cdot\wedge\tau_1^0),\tau_1^0)\in\cdot\right)=\bar P_0(x,\cdot),\tag{13}$$

$$Q_x^{(0)}\left(X_0(\sigma_1^0)\in\cdot\right)=\tilde P_0(x,\cdot)\tag{14}$$

и $\left\{(\xi_k^0,\eta_k^0),k\ge 1\right\}$ *построены по нему так же, как* $\left\{(\xi_k^n,\eta_k^n),k\ge 1\right\}$ *по процессу* X_n, *то*

$$\left(\overline{\xi}^{(n)},\overline{\tau}^{(n)}\right)\Rightarrow\left(\overline{\xi}^{(0)},\overline{\tau}^{(0)}\right),\quad n\to\infty.$$

Таким образом, имеет место сходимость процессов, полученных вырезанием времени:

$$X_n^{(\tau^n,\sigma^n)}\Rightarrow X_0^{(\tau^0,\sigma^0)},\quad n\to\infty,$$

в $D_E\big([0;\infty)\big)$.

Объединяя теорему 1 и указанные достаточные условия, получаем следующее общее утверждение о сходимости случайных процессов.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_n,\ n\geqslant 0\}$ — *последовательность непрерывных однородных строго марковских процессов в локально компактном метрическом пространстве* E. *Предположим, что для любого* $T>0$ *выполняется* (4), *а также для любого* $\alpha>0$ *найдется* $\alpha_1\in(0,\alpha)$ *такое, что для последовательностей* $\left\{(\tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)},\sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}),k\geqslant 1\right\}$, *определенных в* (10), *выполняется*:

1) (11);

2) (5) *или* (9);

3) *условия* A_1, A_2 *леммы* 2.

Тогда распределения $\{X_n\}$ *слабо сходятся при* $n\to\infty$ *в* $C\big([0,\infty)\big)$.

Если дополнительно выполняются (13), (14) *и*

$$\int\limits_0^\infty 1\!\!\mathrm{I}_{\{X_0(t)=x^*\}}dt=0\quad\textit{п. н.},\tag{15}$$

то $X_n\Rightarrow X_0$ *при* $n\to\infty$ *в* $C\big([0,\infty)\big)$.

***Замечание* 6.** Единственное, что необходимо упомянуть при доказательстве сходимости $X_n\Rightarrow X_0$ в $C([0,T])$ в теореме 2, — это следующий факт, вытекающий из (15):

$$X_0^{(\tau^{(0,\alpha_1,\alpha)},\sigma^{(0,\alpha_1,\alpha)})}\Rightarrow X_0,\quad\alpha\to 0+,$$

в $D\big([0,\infty)\big)$. Кроме того, поскольку все процессы $\{X_n\}$ непрерывны, из слабой сходимости $X_n\Rightarrow X_0$ в $D\big([0,T]\big)$ следует сходимость и в $C\big([0,T]\big)$.

***Замечание* 7.** Вместо свойства строгой марковости в теореме 2 можно требовать, чтобы моменты входа или выхода из шара были „обновляющими” для процессов. Например, если $E = \mathbb{R}$ и $\{X_n\}$ — непрерывные полумарковские процессы. Соответствующие определения см. в [14].

***Замечание* 8.** Аналогичное утверждение справедливо и для процессов, построенных по цепям Маркова, с естественными изменениями условий. Например, пусть $(X_0(t), t \geqslant 0)$ — непрерывный строго марковский процесс со значениями в $\mathbb{R}^d$, $(X^{(n)}(k), k \geqslant 0)$, $n \geqslant 1$, — цепи Маркова на $\mathbb{R}^d$. Положим $X_n\left(\dfrac{k}{n}\right) := \dfrac{1}{\sqrt{n}} X^{(n)}(k)$ и доопределим процесс $X_n(t)$ для всех $t \geqslant 0$ по линейности или ступенчатым образом. В этом случае справедливы аналоги леммы 2 и теоремы 2 со следующими изменениями.

Последовательности $\tau_k^{(n)}, \sigma_k^{(n)}$ при $n \geq 1$ в таком случае надо определять так:

$$\tau_k^{(n)} = \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} := \inf\left\{t \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}_+, t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n,\alpha_1,\alpha)} : |X_n(t) - x^*| \leqslant \alpha_1\right\}, \quad k \geqslant 1,$$

$$\sigma_k^{(n)} = \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} := \inf\left\{t \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}_+, t \geqslant \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} : |X_n(t) - x^*| \geqslant \alpha\right\}, \quad k \geqslant 1. \tag{16}$$

Если, кроме того, цепь Маркова $\{X^{(n)}(k),\ k \geq 1\}$ принимает значения из $\mathbb{Z}^d$, а не $\mathbb{R}^d$, то в лемме 2 необходимо брать не произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0, а такую, что $x_n \in \dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{Z}^d$.

***Замечание* 9.** По всей видимости, условие (4) является избыточным в теореме 2, где рассматриваются непрерывные строго марковские процессы. Однако от этого условия нельзя отказываться в случае процессов, порожденных цепями Маркова, так как теоретически X_n может далеко выскочить из шара $B(x^*, \alpha_1)$ за счет одного „большого” скачка.

4. Предельное поведение возмущенного случайного блуждания. Рассмотрим однородную марковскую цепь $(X(k),\ k \in \mathbb{Z}_+)$ на $\mathbb{Z}$ с переходными вероятностями $p_{i,j}$ такими, что для некоторого m

$$p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = 1/2 \quad \text{при} \quad |i| > m$$

и

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |j|\, p_{i,j} < \infty \quad \text{при} \quad |i| \leqslant m. \tag{17}$$

Мы будем говорить, что X — случайное блуждание со скачками из „мембраны” $[-m, m]$. Условие (17) означает, что скачки блуждания X из $[-m, m]$ интегрируемы.

Доопределим значения цепи $\big(X(k),\ k \in \mathbb{Z}_+\big)$ для всех $t \geqslant 0$ с помощью линейной интерполяции и положим

$$X_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} X(nt), \qquad t \geqslant 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В данном пункте мы докажем, что распределения последовательности $\{X_n\}$ слабо сходятся, и опишем ее предел.

Для формулировки основной теоремы введем следующие величины. Обозначим через

$$\tau := \inf\big\{k \geqslant 0 \colon |X(k)| > m\big\} \tag{18}$$

момент выхода из мембраны. Пусть $\xi^{(\pm)}$ — случайная величина, имеющая распределение $\big(X(\tau) - m\,\mathrm{sign}\,X(\tau)\big)$ при условии $X(0) = \pm m$.

Другими словами, величины $\xi^{(+)}$ и $\xi^{(-)}$ имеют такое же распределение, как величина отскока от мембраны в момент выхода из нее, при условии, что блуждание началось из правого или левого края мембраны соответственно.

Теорема 3. *Предположим, что все состояния цепи $\big(X(k), k \in \mathbb{Z}_+\big)$ сообщаются. Тогда последовательность случайных процессов $\{X_n\}$ сходится по распределению в $C\big([0,T]\big)$ к косому броуновскому движению W_γ, $W_\gamma(0) = 0$, с параметром*

$$\gamma = \frac{\mathrm{E}\xi^{(+)}\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) + \mathrm{E}\xi^{(-)}\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)}{\mathrm{E}|\xi^{(+)}|\mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0) + \mathrm{E}|\xi^{(-)}|\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)}, \tag{19}$$

т. е. к непрерывному марковскому процессу с переходной плотностью

$$p_t(x,y) = \varphi_t(x-y) + \gamma\,\mathrm{sign}(y)\varphi_t(|x| + |y|), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

где $\varphi_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/2t}$ — плотность нормального распределения $N(0,t)$.

***Замечание* 10.** Начальные распределения всех процессов X_n связаны соотношением $X_n(0) = X(0)/\sqrt{n}$. Можно было бы записать аналогичный результат и в схеме серий. Если $X_n(0) = x_n \in \dfrac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{Z}$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, то предельное косое броуновское движение стартовало бы из x.

***Замечание* 11.** Предел будет существовать, даже если опустить условие о том, что все состояния цепи $\big(X(k), k \in \mathbb{Z}_+\big)$ сообщаются. В таком случае в качестве предела может получиться другой процесс, например броуновское движение с прилипанием к нулю или смесь броуновских движений, отражающихся от нуля вверх или вниз. Список всех возможностей см. в [4]. Доказательство для тех случаев, когда не все состояния исходной цепи сообщаются, сводится к приведенному здесь с некоторыми очевидными упрощениями.

***Доказательство теоремы* 3.** Для доказательства применим теорему 2, точнее, ее модификацию для цепей Маркова (см. замечание 8).

Итак, пусть $\alpha > 0$ и $\alpha_1 \in (0, \alpha)$ произвольно и фиксировано. Положим $\sigma_0^{(n)} := 0$,

$$\begin{aligned}
\tau_k^{(n)} = \tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\left\{t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n)}, t \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}_+ \colon \big|X_n(t)\big| \leqslant \alpha_1\right\} = \\
&= \inf\left\{t \geqslant \sigma_{k-1}^{(n)}, t \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}_+ \colon \big|X(nt)\big| \leqslant \alpha_1\sqrt{n}\right\}, \\
\sigma_k^{(n)} = \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)} &:= \inf\left\{t \geqslant \tau_k^{(n)}, t \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}_+ \colon \big|X_n(t)\big| \geqslant \alpha\right\} = \\
&= \inf\left\{t \geqslant \tau_k^{(n)}, t \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}_+ \colon \big|X(nt)\big| \geqslant \alpha\sqrt{n}\right\}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Для каждого $n \geqslant 1$ рассмотрим процесс $X_n^{(\alpha)}$, построенный по процессу X_n с помощью вырезания времени $\cup_k [\tau_k^{(n,\alpha_1,\alpha)}, \sigma_k^{(n,\alpha_1,\alpha)})$.

В качестве X_0 в теореме 2 будем рассматривать косое броуновское движение W_γ. Отметим, что до попадания в точку 0 процесс W_γ ведет себя как броуновское движение (см., например, [1]). Поэтому истинность условий A_2 и (13), переформулированных для цепей Маркова, не вызывает сомнения. Условие (15) также выполняется, так как у косого броуновского движения существует переходная плотность.

4.1. Распределение в момент выхода из отрезка. Проверим условия A_1 и (14) для последовательности $\{X_n\}_{n\geqslant 0}$ с процессом W_γ в качестве X_0. Для начала найдем условное распределение $W_\gamma(\sigma_k^{(0)})$ при условии $W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = \alpha_1$. Это распределение сосредоточено в точках $\pm\alpha$. Массы соответствующих атомов равны вероятностям для процесса W_γ выйти из отрезка $[-\alpha, \alpha]$ через правый или левый конец, соответственно, при условии, что W_γ стартует из α_1. Затем аналогичным образом можно найти условное распределение при условии $W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = -\alpha_1$.

Как известно (см., например, [20]), функция шкалы для косого броуновского движения W_γ имеет вид

$$\psi(x) = \begin{cases} x/p, & x \geqslant 0, \\ x/q, & x < 0, \end{cases}$$

где $p = \dfrac{1+\gamma}{2}$, $q = \dfrac{1-\gamma}{2}$. Поэтому

$$\mathrm{P}\left(W_\gamma(\sigma_k^{(0)}) = +\alpha \;/\; W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = +\alpha_1\right) = \frac{\psi(\alpha_1) - \psi(-\alpha)}{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)},$$

$$\mathrm{P}\left(W_\gamma(\sigma_k^{(0)}) = +\alpha \;/\; W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = -\alpha_1\right) = \frac{\psi(-\alpha_1) - \psi(-\alpha)}{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)}.$$

Аналогично,

$$\mathrm{P}\left(W_\gamma(\sigma_k^{(0)}) = -\alpha \;/\; W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = +\alpha_1\right) = \frac{\psi(\alpha) - \psi(\alpha_1)}{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)},$$

$$\mathrm{P}\left(W_\gamma(\sigma_k^{(0)}) = -\alpha \;/\; W_\gamma(\tau_k^{(0)}) = -\alpha_1\right) = \frac{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha_1)}{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)}.$$

Рассмотрим теперь распределения $X_n(\sigma_k^{(n)})$. Обозначим $C_n = -[-\alpha\sqrt{n}]$.

Пусть $\rho_i^{(n)}$ обозначает вероятность для $(X(k))$ из точки $i \in \{-C_n, \ldots, +C_n\}$ попасть в точку $+C_n$, не попадая до того момента в $(-\infty, C_n] \cup (C_n, +\infty)$. Данные вероятности удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\rho_{C_n}^{(n)} = 1,$$

$$\rho_i^{(n)} = \rho_{-C_n}^{(n)} = 0, \quad |i| > C_n,$$

$$\rho_i^{(n)} = \frac{1}{2}\rho_{i-1}^{(n)} + \frac{1}{2}\rho_{i+1}^{(n)}, \quad m < |i| < C_n,$$

$$\rho_{\pm m}^{(n)} = \sum_{m<|j|\leqslant C_n} p_{\pm m,j}\rho_j^{(n)},$$

где $p_{\pm m,j} = \mathrm{P}\big(\xi^{(\pm)} = j - m\,\mathrm{sign}(j)\big)$.

Рассмотрим $\rho_i^{(n)}$ при $m \leqslant i \leqslant C_n$. Заметим, что точки

$$\big(m, \rho_m^{(n)}\big), \big(m{+}1, \rho_{m+1}^{(n)}\big), \ldots, \big(C_n, \rho_{C_n}^{(n)}\big)$$

лежат на одной прямой. Поэтому

$$\rho_{m+k}^{(n)} = \rho_m^{(n)} + \frac{k}{C_n'}\Big(1 - \rho_m^{(n)}\Big) = \rho_m^{(n)}\left(1 - \frac{k}{C_n'}\right) + \frac{k}{C_n'}, \quad k = \overline{0, C_n'},$$

где $C_n' = C_n - m$.

Аналогично,

$$\rho_{-m-k}^{(n)} = \rho_{-m}^{(n)}\left(1 - \frac{k}{C_n'}\right), \quad k = \overline{0, C_n'}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения для $\rho_{\pm m}^{(n)}$ и записывая полученную систему в терминах $\xi^{(+)}$ и $\xi^{(-)}$, получаем

$$\rho_m^{(n)}\big(C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0) + \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \vee 0)\big) =$$

$$= \rho_{-m}^{(n)}\big(C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0) + \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \wedge 0)\big) + \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \vee 0),$$

$$\rho_{-m}^{(n)}\big(C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0) + \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \wedge 0)\big) =$$

$$= \rho_m^{(n)}\big(C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0) - \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \vee 0)\big) + \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \vee 0),$$

где $\widetilde{\xi}_n^{(\pm)} := \xi^{(\pm)}1\!\!\mathrm{I}_{|\xi^{(\pm)}|\leqslant C_n'}$. Таким образом,

$$\rho_m^{(n)} = \frac{C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \vee 0) + C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \vee 0) + A_n}{C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0)\mathrm{E}|\widetilde{\xi}_n^{(-)}| + C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0)\mathrm{E}|\widetilde{\xi}_n^{(+)}| + A_n},$$

где $A_n = \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \wedge 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \vee 0) - \mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \vee 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \wedge 0)$.

Аналогично,

$$\rho_{-m}^{(n)} = \frac{C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} \vee 0) + C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0)\mathrm{E}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} \vee 0)}{C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(+)} < 0)\mathrm{E}|\widetilde{\xi}_n^{(-)}| + C_n\mathrm{P}(\widetilde{\xi}_n^{(-)} > 0)\mathrm{E}|\widetilde{\xi}_n^{(+)}| + A_n}.$$

Несложно убедиться, что для любого $\alpha > 0$

$$\mathrm{P}\big(\widetilde{\xi}_n^{(\pm)} \neq \xi^{(\pm)}\big) \leqslant \mathrm{P}\big(|\xi^{(\pm)}| > C_n]\big) \to 0, \quad n \to \infty,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \rho_m^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \rho_{-m}^{(n)} =$$

$$= p = \frac{\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)\mathrm{E}(\xi^{(-)} \vee 0) + \mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0)\mathrm{E}(\xi^{(+)} \vee 0)}{\mathrm{P}(\xi^{(+)} < 0)\mathrm{E}|\xi^{(-)}| + \mathrm{P}(\xi^{(-)} > 0)\mathrm{E}|\xi^{(+)}|}. \tag{21}$$

Из приведенных рассуждений следует, что для любого $\alpha > 0$ имеет место равномерная сходимость

$$\sup_{m \leqslant |i| \leqslant C_n} \left| \rho_i^{(n)} - \frac{\psi(i/n) - \psi(-\alpha)}{\psi(\alpha) - \psi(-\alpha)} \right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Аналогичные формулы справедливы и для вероятностей достижения точки $-\alpha$. В частности, из них видно, что вероятность выйти из отрезка $[-\alpha, \alpha]$ за счет „большого” скачка из мембраны стремится к нулю при $n \to \infty$.

Таким образом, условия A_1 и (13) выполняются.

4.2. Модуль непрерывности процессов X_n. Проверим условие (4) для процессов X_n. Достаточно показать, что

$$\forall\, T > 0\; \forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \exists\, n_0\; \forall\, n \geqslant n_0 \colon \mathrm{P}(\omega^T_{X_n}(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

где $\omega_f(\delta) = \omega_f^T(\delta)$ — модуль непрерывности функции f на $[0, T]$.

Сравним распределения модуля непрерывности процесса X_n с распределениями модуля непрерывности нормированного симметричного случайного блуждания с единичными скачками. Для этого построим определенным образом копии этих процессов на едином вероятностном пространстве.

Пусть $(S(k))$ — независимое от цепи X симметричное случайное блуждание с единичными скачками.

Пусть ξ_k — скачки из мембраны процесса X:

$$\xi_k = X(\tau_k) - m\,\mathrm{sign}(X(\tau_k)), \quad k \geqslant 1,$$

где τ_k — последовательные моменты выходов процесса X из отрезка $[-m, m]$.

Введем следующий вспомогательный процесс. Положим

$$\widetilde{X}(k) := S(k), \quad k = \overline{0, t_1},$$

где t_1 — первый момент попадания процесса $\widetilde{X}$ в точку 0.

Следующее приращение для $\widetilde{X}$ положим равным ξ_1:

$$\widetilde{X}(t_1 + 1) := \widetilde{X}(t_1) + \xi_1 = 0 + \xi_1 = \xi_1.$$

Далее, пусть приращения процесса $\widetilde{X}$ такие же, как и у S до момента t_2 — момента следующего попадания $\widetilde{X}$ в точку 0:

$$\widetilde{X}(k) := \widetilde{X}(t_1 + 1) + S(k - 1), \quad k = \overline{t_1 + 2, t_2}.$$

В точке $t_2 + 1$ добавим ξ_2:

$$\widetilde{X}(t_2 + 1) := \xi_2,$$

и т. д.

Имеет место представление

$$\widetilde{X}(k) = S(k - r(k)) + \sum_{j=1}^{r(k)} \xi_j,$$

где $r(k) = r_{\widetilde{X}}(k)$ — количество попаданий последовательности $(\widetilde{X}(l),\, l = \overline{0,k})$ в точку 0.

Обозначим

$$S_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \big(S\big([nt]\big) + \big(nt - [nt]\big)S\big([nt]+1\big)\big), \quad t \geqslant 0,$$

$$\widetilde{X}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(\widetilde{X}\big([nt]\big) + \big(nt - [nt]\big)\widetilde{X}\big([nt]+1\big)\Big), \quad t \geqslant 0.$$

Несложно заметить равенство распределений следующих случайных процессов:

$$\widetilde{X}_n(t) \overset{d}{=} X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}(t) - \frac{m}{\sqrt{n}} \operatorname{sign}(X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}(t)), \quad t \geqslant 0, \tag{22}$$

где $X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}$ — процесс, полученный из X_n вырезанием времени $\bigcup_{k\geqslant 1}[\tau_k, \widetilde{\tau}_k)$, $\widetilde{\tau}_0 = 0$,

$$\tau_k = \tau_k^{(n)} := \inf\left\{t \geqslant \widetilde{\tau}_{k-1}^{(n)},\ t \in \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{N} \colon \big|X_n(t)\big| \leqslant m/\sqrt{n}\right\}, \quad k \geqslant 1,$$

$$\widetilde{\tau}_k = \widetilde{\tau}_k^{(n)} := \inf\left\{t \geqslant \tau_k^{(n)},\ t \in \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbb{N} \colon \big|X_n(t)\big| \geqslant (m+1)/\sqrt{n}\right\}, \quad k \geqslant 1.$$

Из построения процесса с вырезанным временем следует, что

$$\omega_{X_n}(\delta) \leqslant \omega_{X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}}(\delta) + 2m/\sqrt{n}, \quad \delta > 0. \tag{23}$$

Сравним теперь модуль непрерывности для последовательностей $S(k)$ и $\widetilde{X}(k)$, а затем и для процессов $S_n(t)$ и $\widetilde{X}_n(t)$. Рассмотрим разность $\widetilde{X}(l) - \widetilde{X}(k)$, где l и $k > l$ — некоторые целые числа из отрезка $[0, nT]$, а $r(n) = r_{\widetilde{X}}(n)$ — количество попаданий последовательности $(\widetilde{X}(i), i = \overline{0,n})$ в точку 0.

Заметим, что для любых $p \in \mathbb{N}$ и $0 \leqslant k < l \leqslant nT$

$$\sup_{|l-k|\leqslant p} \big|\widetilde{X}(l) - \widetilde{X}(k)\big| \leqslant 2 \sup_{|l-k|\leqslant p} \big|S(l) - S(k)\big| + \sup_{j\leqslant r(nT)} |\xi_j|.$$

Действительно, если на каком-то отрезке времени не было заходов цепи Маркова $\widetilde{X}(j), j \in [k,l]$ в точку 0, то $|\widetilde{X}(l) - \widetilde{X}(k)|$ не превышает $\sup_{|j-i|\leqslant|l-k|} |S(j) - S(i)|$ по построению. В противном случае пусть $k_1 := \inf\{j \geq k \colon \widetilde{X}(j) = 0\}$, $l_1 := \sup\{j \leq l \colon \widetilde{X}(j) = 0\}$. Тогда

$$\big|\widetilde{X}(l) - \widetilde{X}(k)\big| \leqslant \big|\widetilde{X}(k_1) - \widetilde{X}(k)\big| + \big|\widetilde{X}(l_1) - \widetilde{X}(k_1)\big| + \big|\widetilde{X}(l_1+1) - \widetilde{X}(l_1)\big| +$$

$$+ \big|\widetilde{X}(l) - \widetilde{X}(l_1+1)\big| = \big|\widetilde{X}(k_1) - \widetilde{X}(k)\big| + \big|\widetilde{X}(l_1+1) - \widetilde{X}(l_1)\big| + \big|\widetilde{X}(l) - \widetilde{X}(l_1+1)\big| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{|j-i|\leqslant|l-k|} \big|S(j) - S(i)\big| + \sup_{j\leqslant r(nT)} |\xi_j|.$$

Таким образом, для любого положительного δ имеем

$$\omega_{\widetilde{X}_n}(\delta) \leqslant 2\omega_{S_n}(\delta) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{j \leqslant r(nT)} |\xi_j|. \tag{24}$$

Тогда для любого $\alpha > 0$

$$\mathrm{P}(\omega_{\widetilde{X}_n}(\delta) > \alpha) \leqslant \mathrm{P}(\omega_{S_n}(\delta) > \alpha/3) + \mathrm{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{j \leqslant r(nT)} |\xi_j| > \alpha/3\right). \tag{25}$$

Из слабой сходимости в $\mathrm{C}([0,T])$ последовательности S_n (теорема Донскера) в силу теоремы 8.2 из [17] следует, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha > 0\ \exists \delta > 0\ \exists n_1\ \forall n \geqslant n_1 : \mathrm{P}(\omega_{S_n}(\delta) > \alpha/3) < \varepsilon/2.$$

Для оценки второго слагаемого в (25) покажем, что для любого положительного δ

$$\mathrm{P}\left(\max_{j \leqslant r(n)} |\xi_j| > \delta\sqrt{n}\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для произвольного $x > 0$ оценим

$$\mathrm{P}\left(\max_{j \leqslant r(n)} |\xi_j| > \delta\sqrt{n}\right) \leqslant \mathrm{P}\left(r(n) > x\sqrt{n}\right) + \mathrm{P}\left(\max_{j \leqslant x\sqrt{n}} |\xi_j| > \delta\sqrt{n}\right). \tag{26}$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (26) рассмотрим блуждание $\widetilde{S}$ с единичными скачками, построенное специальным образом по траекториям процесса $\widetilde{X}$, а затем сравним количество попаданий в точку 0 для $\widetilde{S}$ и X (см. ниже). Идея заключается в том, что при бо́льших скачках из нуля времени на то, чтобы вернуться в точку 0, нужно больше, а количество возвращений будет, следовательно, меньше.

Формально соответствующее построение можно реализовать следующим образом. Положим

$$\widetilde{S}(k) := \widetilde{X}(k), \quad k = \overline{0, \widetilde{t}_1},$$

где $\widetilde{t}_1 := \inf\{k : \widetilde{S}(k) = 0\}$ — момент первого попадания процесса $\widetilde{S}$ в точку 0. Далее, положим

$$\widetilde{S}(\widetilde{t}_1 + 1) := \operatorname{sign}(\widetilde{X}(t_1 + 1)),$$

где t_1 — момент первого попадания процесса $\widetilde{X}$ в точку 0.

Пусть приращения процесса $\widetilde{S}$ вплоть до момента $\widetilde{t}_2$ второго попадания в точку 0 снова совпадают с соответствующими приращениями $\widetilde{X}$:

$$\widetilde{S}(\widetilde{t}_1 + 1 + k) := \widetilde{X}(t_1 + 1 + k) - \widetilde{X}(t_1 + 1), \quad k = \overline{1, \widetilde{t}_2 - \widetilde{t}_1 - 1},$$

и

$$\widetilde{S}(\widetilde{t}_2 + 1) := \operatorname{sign}(\widetilde{X}(t_2 + 1)).$$

Дальнейшие построения проводятся аналогично.

Тогда несложно заметить, что поскольку $\left|\widetilde{X}(t_i{+}1)\right| \geqslant 1 = \left|\widetilde{S}(\widetilde{t}_i{+}1)\right|$ и $\left|\widetilde{X}(k{+}1) - \widetilde{X}(k)\right| = 1$, $k \notin \{t_i\}$, то $\widetilde{t}_{i+1} - \widetilde{t}_i \leqslant t_{i+1} - t_i,\ i \geqslant 1$. Отсюда следует, что количество $r_{\widetilde{X}}$ попаданий процесса

$\widetilde{X}$ в точку 0 не превышает количества $r_{\widetilde{S}}$ попаданий процесса $\widetilde{S}$ в точку 0:

$$r_{\widetilde{X}}(k) \leqslant r_{\widetilde{S}}(k), \quad k \geqslant 0. \tag{27}$$

Заметим теперь, что $|\widetilde{S}(k)|$, $k = \overline{0,n}$, — модуль симметричного случайного блуждания. Поэтому количество попаданий в точку 0 для $\widetilde{S}$ (или $|\widetilde{S}|$) имеет такое же распределение, как и для обычного симметричного случайного блуждания S с единичными скачками.

Для распределений последнего известна асимптотика (см., например, [21]):

$$\forall x > 0\colon \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\Big(r_{\widetilde{S}}(n) \leqslant x\sqrt{n}\Big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}dz. \tag{28}$$

Из (27), (28) следует, что

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists x > 0\, \exists n_0\, \forall n \geqslant n_0\colon \mathrm{P}\big(r_{\widetilde{X}}(n) > x\sqrt{n}\,\big) \leqslant \mathrm{P}\big(r_{\widetilde{S}}(n) > x\sqrt{n}\,\big) < \varepsilon.$$

Оценим

$$\mathrm{P}\left(\max_{j\leqslant x\sqrt{n}} |\xi_j| > \delta\sqrt{n}\right) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{j\leqslant x\sqrt{n}} \{|\xi_j| > \delta\sqrt{n}\,\}\right) \leqslant \sum_{j\leqslant x\sqrt{n}} \mathrm{P}\big(|\xi_j| > \delta\sqrt{n}\big) \leqslant$$

$$\leqslant [x\sqrt{n}\,]\left\{\mathrm{P}\left(|\xi^{(+)}| > \delta\sqrt{n}\right) + \mathrm{P}\left(|\xi^{(-)}| > \delta\sqrt{n}\right)\right\} \to 0, \quad n\to\infty,$$

так как $\mathrm{E}\xi^{(\pm)} < \infty$ по предположению теоремы.

Итак, мы получили (26), откуда с учетом (25) следует, что

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall\alpha > 0\ \exists\delta > 0\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0\colon \mathrm{P}\big(\omega_{\widetilde{X}_n}(\delta) > \alpha\big) < \varepsilon. \tag{29}$$

Таким образом, поскольку (см. (22))

$$\mathrm{P}\big(\omega_{X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}}(\delta) > \alpha\big) \leqslant \mathrm{P}\big(\omega_{\widetilde{X}_n}(\delta) > \alpha - 2m/\sqrt{n}\big) \leqslant \mathrm{P}\big(\omega_{\widetilde{X}_n}(\delta) > \alpha/2\big)$$

при $n > 16m^2/\alpha^2$, в силу (23) имеем

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \exists\ n_0\ \forall\ n \geqslant n_0\colon \mathrm{P}(\omega_{X_n}(\delta) \geqslant \varepsilon) \leqslant \mathrm{P}(\omega_{X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}}(\delta) \geqslant \varepsilon/2) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, условие (4) выполняется.

4.3. Условие малости времени, проводимого в окрестности нуля. В данном подпункте установим соотношение

$$\forall T > 0\ \forall\delta > 0\colon \lim_{\alpha\to 0+} \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int\limits_0^T 1\!\!\mathrm{I}_{|X_n(t)|\leqslant\alpha}dt > \delta\right) = 0, \tag{30}$$

откуда, в частности, будет следовать, что последовательность процессов $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ удовлетворяет условию (5).

Аналогично рассуждениям из пп. 4.2 построим процессы $\widetilde{S}_n$, $\widetilde{X}_n$, $X_n^{(\tau,\widetilde{\tau})}$. Время, проведенное процессом $\widetilde{S}_n(t), t \in [0,T]$, в отрезке $[-\alpha,\alpha]$, не превышает аналогичного времени для $\widetilde{X}_n$. Поэтому для любых $T>0, \delta>0$

$$\lim_{\alpha\to 0+}\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int\limits_0^T \mathrm{1\!I}_{|\widetilde{X}_n(t)|\leqslant\alpha} dt > \delta\right) \leqslant \lim_{\alpha\to 0+}\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int\limits_0^T \mathrm{1\!I}_{|\widetilde{S}_n(t)|\leqslant\alpha} dt > \delta\right). \tag{31}$$

Поскольку $|\widetilde{S}_n(t)|, t\in[0,T]$, слабо сходится к отраженному броуновскому движению, то правая часть (31) равна нулю. Следовательно,

$$\lim_{\alpha\to 0+}\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int\limits_0^T \mathrm{1\!I}_{|X_n(t)|\in\left(\frac{m}{\sqrt{n}},\alpha\right]} dt > \delta\right) \leqslant \lim_{\alpha\to 0+}\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int\limits_0^T \mathrm{1\!I}_{|\widetilde{X}_n(t)|\leqslant\alpha} dt > \delta\right) = 0.$$

Таким образом, для доказательства (30), а следовательно, и теоремы 3 достаточно проверить, что

$$\forall T>0\ \forall\delta>0\colon \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int\limits_0^T \mathrm{1\!I}_{|X_n(t)|\leqslant\frac{m}{\sqrt{n}}} dt > \delta\right) = 0. \tag{32}$$

Пусть случайные величины $\zeta^{(+)}$, $\zeta^{(-)}$ имеют такое же распределение, как время, которое проводит X в мембране $\{-m,-m+1,\ldots,m\}$ при входе в нее через m или $-m$, соответственно. Обозначим через $r_X(k)$ количество заходов последовательности $(X(i), 0\leqslant i\leqslant k)$ в мембрану, и пусть $\zeta_j^{(+)}$, $\zeta_j^{(-)}$, $j\geqslant 0$, — независимые копии величин $\zeta^{(\pm)}$, также независимые от $\widetilde{S}$. Легко видеть, что для любых $x>0$, $k\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(r_X(k)>x) \leqslant \mathrm{P}(r_{\widetilde{S}}(k)>x),$$

$$\mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{r_X(k)} \mathrm{1\!I}_{|X(i)|\leqslant m} > x\right) \leqslant \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{r_{\widetilde{S}}(k)} (\zeta_i^{(+)}+\zeta_i^{(-)}) > x\right).$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\int_0^T \mathrm{1\!I}_{|X_n(t)|\leqslant\frac{m}{\sqrt{n}}} dt > \delta\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{r_{\widetilde{S}}([nT]+1)} \frac{\zeta_i^{(+)}+\zeta_i^{(-)}}{n} > \delta\right).$$

Аналогично рассуждениям из пп. 4.2 из последнего неравенства и (28) получаем (32).

Теорема 3 доказана.

1. *Harrison J. M., Shepp L. A.* On skew Brownian motion // Ann. Probab. – 1981. – **9**, № 2. – P. 309 – 313.
2. *Минлос Р. А., Жижина Е. А.* Предельный диффузионный процесс для неоднородного случайного блуждания на одномерной решетке // Успехи мат. наук. – 1997. – **52**, № 2. – С. 87 – 100.
3. *Яроцкий Д. А.* Принцип инвариантности для неоднородного случайного блуждания на решетке $\mathbb{Z}^1$ // Мат. заметки. – 1999. – **66**, № 3. – С. 459 – 472.
4. *Пилипенко А. Ю., Приходько Ю. Є.* Про граничну поведінку симетричних випадкових блукань з мембранами // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 2011. – Вип. 85. – С. 84 – 94.

5. *Pilipenko A. Yu., Prykhodko Yu. E.* Limit behavior of a simple random walk with non-integrable jump from a barrier // Theory Stochast. Processes. – 2014. – **19(35)**, № 1. – P. 52 – 61.
6. *Enriquez N., Kifer Y.* Markov chains on graphs and Brownian motion // J. Theor. Probab. – 2001. – **14**, № 2. – P. 495 – 510.
7. *Freidlin M. I., Wentzel A. D.* Diffusion processes on graphs and the averaging principle // Ann. Probab. – 1993. – **21**, № 4. – P. 2215 – 2245.
8. *Kulik A. M.* A limit theorem for diffusions on graphs with variable configuration // arXiv:math/0701632
9. *Varadhan S. R. S., Williams R. J.* Brownian motion in a wedge with oblique reflection // Communs Pure and Appl. Math. – 1985. – **38**. – P. 405 – 443.
10. *Kwon Y.* The submartingale problem for Brownian motion in a cone with nonconstant oblique reflection // Probab. Theory Relat. Fields. – 1992. – **92**, № 3. – P. 351 – 391.
11. *Kwon Y., Williams R. J.* Reflected Brownian motion in a cone with radially homogeneous reflection field // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – **327**, № 2. – P. 739 – 780.
12. *Bafico R., Baldi P.* Small random perturbations of Peano phenomena // Stochastics. – 1982. – **6**, № 3–4. – P. 279 – 292.
13. *Крыкун И. Г., Махно С. Я.* Явление Пеано для уравнений Ито // Укр. мат. вісн. – 2013. – **10**, № 1. – С. 87 – 109.
14. *Харламов Б. П.* Непрерывные полумарковские процессы. – М.: Наука, 2001. – 418 с.
15. *Скороход А. В.* Исследования по теории случайных процессов. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1961. – 216 с.
16. *Kallenberg O.* Foundations of modern probability. – Springer, 1997. – 523 p.
17. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 351 с.
18. *Ethier S., Kurtz T.* Markov processes. Characterization and convergence. – John Wiley & Sons, 1986. – 534 p.
19. *Karr A. F.* Weak convergence of a sequence of Markov chains // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1975/76. – **33**, № 1. – P. 41 – 48.
20. *Lejay A.* On the constructions of the skew Brownian motion // Probab. Surv. – 2006. – **3**. – P. 413 – 466.
21. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – Издание второе. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – 487 с.

Получено 27.03.14