УДК 517.5

Т. В. Ломако

(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк; Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ *

We study the boundary behavior of regular solutions of the degenerate Beltrami equations with integral-type constraints imposed on the coefficient.

Досліджується поведінка на межі регулярних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з обмеженнями інтегрального типу на коефіцієнт.

1. Введение. В данной статье продолжается изучение свойств классов регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа, начатое в работах [1, 2]. Отметим, что исследования в данном направлении имеют приложения к теории экстремальных задач и уравнениям математической физики (см. [2, 3]). В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия асимптотической однородности в точке и на этой основе исследовано граничное поведение указанных отображений. Аналоги этих результатов для квазиконформных отображений можно найти в работах [4 – 6] (см. также работы [7, 8]).

Пусть D — область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. *Уравнениями Бельтрами* называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z \tag{1}$$

с измеримым коэффициентом $\mu\colon D \to \mathbb{C}$, удовлетворяющим условию $|\mu(z)| < 1$ почти всюду (п.в.); $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x+iy$, f_x и f_y — частные производные отображения f по x и y соответственно. Функция $K_\mu(z) = (1+|\mu(z)|)/(1-|\mu(z)|)$ называется *дилатационным отношением* уравнения (1). *Регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D называется гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}$ с $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 > 0$ п.в., который удовлетворяет (1) п.в. в D. Уравнение (1) называется *вырожденным*, если $K_\mu \notin L^\infty$. Отметим, что недавно был доказан ряд новых теорем существования для вырожденных уравнений Бельтрами (см., например, монографию [9] и обзор [10]).

Далее $dm(z)$ соответствует мере Лебега в $\mathbb{C}$, а через $dS(z) = \left(1+|z|^2\right)^{-2} dm(z)$ обозначается *элемент сферической площади* в $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В дальнейшем *непрерывность* функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ понимается относительно топологии $\overline{\mathbb{R}^+} := [0, \infty]$. Функция $\Phi\colon \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ называется *строго выпуклой*, если она является выпуклой, неубывающей и $\lim_{t\to\infty} \Phi(t)/t = \infty$ (см. [11, с. 37]). Далее $B(0, r) := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < r\}$, $\mathbb{D} := B(0, 1)$.

2. Об асимптотической однородности. Пусть $0 \in D$. Следуя работе [5], отображение $f : D \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, будем называть *асимптотически однородным в точке* 0, если

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}^*}} \frac{f(z\zeta)}{f(z)} = \zeta \qquad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}\,. \tag{2}$$

* Выполнена при поддержке гранта FP7-People-2011-IRSES Project number 295164 (EUMLS: EU-Ukrainian Mathematicians for Life Sciences).

Если семейство функций $f_\eta(z) = f(z+\eta) - f(\eta)$ удовлетворяет условию (2) равномерно относительно параметра η из некоторого заданного множества, то такое семейство называется *равномерно асимптотически однородным* на этом множестве.

Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — регулярное решение уравнения Бельтрами (1), $f(0) = 0$ и

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{1}{|B(0,\,r)|} \int\limits_{B(0,\,r)} \Phi\left(K_\mu(z)\right)\, dm(z) < \infty \tag{3}$$

для строго выпуклой функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ такой, что

$$\int\limits_{\sigma}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{4}$$

при некотором $\sigma > \Phi(0)$. В теореме 6.1 работы [2] утверждается, что асимптотическая однородность в нуле указанных отображений f эквивалентна условиям

$$f(z) = A(|z|)(z + o(|z|))\,, \tag{5}$$

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{A(t\rho)}{A(\rho)} = 1 \qquad\qquad \forall t > 0\,, \tag{6}$$

где $o(|z|)/|z| \to 0$ при $|z| \to 0$. Отметим, что дифференцируемость отображения f в смысле (5), (6) восходит к П. П. Белинскому [12, с. 41]. Кроме того, асимптотически однородное в нуле отображение f сохраняет:

1) инфинитезимальные окружности

$$\lim_{r\to 0} \frac{\max_{|z|=r} |f(z)|}{\min_{|z|=r} |f(z)|} = 1;$$

2) углы между лучами, исходящими из начала в направлении соответствующих точек,

$$\lim_{z\to 0} \left[\arg f(z\,\zeta) - \arg f(z)\right] = \arg \zeta;$$

3) модули инфинитезимальных колец

$$\lim_{|z|\to 0} \frac{|f(z\,\zeta)|}{|f(z)|} = |\zeta|$$

для любого $\zeta \in \mathbb{C}^*$.

Следующий результат раскрывает геометрическую природу введенного понятия.

Пусть M — произвольное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с $z = 0$ в качестве точки накопления. Полагаем

$$\varphi_M(\rho) = \frac{\inf_{|m|\geq\rho,\, m\in M} |m|}{\sup_{|m|\leq\rho,\, m\in M} |m|}\ .$$

Теорема 1. *Пусть* $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(0)=0$, — *регулярное решение уравнения Бельтрами* (1) *с условием* (3) *на коэффициент* μ *и* M — *подмножество* $\mathbb{C}$, *для которого*

$$\overline{\lim_{\rho\to 0}}\,\varphi_M(\rho)<\infty\,. \tag{7}$$

Если существует предел

$$\lim_{\substack{m\to 0\\ m\in M}}\frac{f(\zeta m)}{f(m)}=\zeta \qquad\qquad \forall\,\zeta\in\mathbb{C}\,, \tag{8}$$

то f *является асимптотически однородным в нуле.*

Доказательство. По условию (8) имеем, что

$$\lim_{\substack{m\to 0\\ m\in M}}F(\zeta,\,m)=\zeta \qquad\qquad \forall\,\zeta\in\mathbb{C}\,, \tag{9}$$

где функции $F(\zeta,z)=f(\zeta z)/f(z)$, $\zeta\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}^*$, являются по переменной ζ регулярными решениями уравнения Бельтрами (1) с комплексным коэффициентом $\mu(\zeta,\,z)=\dfrac{\overline{z}}{z}\mu(z\zeta)$ и дилатационным отношением $K_\mu(\zeta,\,z)=K_\mu(z\zeta)$ в $\mathbb{C}$. Таким образом,

$$I_{z,\,r}:=\int\limits_{B(0,\,r)}\Phi\left(K_\mu(\zeta,\,z)\right)\,dS(\zeta)\le\frac{1}{|z|^2}\int\limits_{B(0,\,|z|r)}\Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\,dm(\zeta)$$

и по условию (3) $I_{z,r}\le M_{z,r}<\infty$ для малых $z\in\mathbb{C}^*$. Заметим также, что $F(0,z)=0$, $F(1,z)=1$. Поэтому отображения $F(\zeta,z)$, $z\in\mathbb{C}^*$, образуют нормальное семейство относительно $\zeta\in\mathbb{C}$ по теореме 2 в [1]. Итак, $F(\zeta,z)$, $z\in\mathbb{C}^*$, — равностепенно непрерывное семейство относительно $\zeta\in\mathbb{C}$ по предложению 1 в [13] (см. также предложение 7.1 в [14]) и условие (9) влечет локально равномерную сходимость в (9) относительно $\zeta\in\mathbb{C}$ по теореме 1 из [13] (см. также теорему 7.1 в [14]).

Предположим, что условие (2) не выполнено для f. Тогда найдутся $\zeta\in\mathbb{C}$, $\varepsilon>0$ и последовательность $z_n\to 0$, $z_n\in\mathbb{C}^*$, $n=1,2,...$, такие, что

$$|F(\zeta,\,z_n)-\zeta|\ge\varepsilon\,. \tag{10}$$

С другой стороны, по условию (7) найдется последовательность $m_n\in M$ для $n>N$ такая, что

$$0<\delta\le|\tau_n|\le 1<\infty\,,$$

где

$$\tau_n=\frac{z_n}{m_n}\,,\quad \delta=\frac{1}{2\overline{\lim\limits_{\rho\to 0}}\,\varphi_M(\rho)}\,.$$

Действительно, выберем элемент $l_1\in M$ такой, что для всех $n>N$ $|z_n|\le|l_1|$ и для некоторых $n>N$ $\delta|l_1|\le|z_n|\le|l_1|$. Согласно (7) можно выбрать элемент $l_2\in M$ такой, что $\delta|l_1|\le|l_2|\le$ $\le|l_1|$. Полагаем $m_n:=l_1$ для всех $n>N$ таких, что $|l_2|<|z_n|\le|l_1|$. Далее продолжаем по аналогии выбор следующего элемента для $l_2\in M$ и так далее.

Заметим, что

$$F(\zeta,\,z_n)=\frac{F(\zeta\tau_n,\,m_n)}{F(\tau_n,\,m_n)}\,.$$

В силу равномерной сходимости в (9) относительно параметра ζ на любом компакте $F(\zeta\tau_n, m_n) \sim \zeta\tau_n$ и $F(\tau_n, m_n) \sim \tau_n$. Поскольку же $|\tau_n| \geq \delta > 0$, то $F(\zeta, z_n) \sim \zeta$ при $z_n \to 0$. Последнее противоречит (10) и, следовательно, сделанное выше предположение неверно.

Теорема доказана.

Отметим, что для выполнения заключения теоремы 1 условие (7) на множество M является не только достаточным, но и необходимым (см., например, предложение 2.1 в [5]).

Для дальнейших исследований нам понадобится лемма о равномерной асимптотической однородности семейства регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа на коэффициент. Эта лемма является обобщением теоремы 6.1 из работы [2] и леммы из работы [4].

Лемма 1. *Пусть $f_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $j \in J$, — семейство регулярных решений уравнения Бельтрами с коэффициентами μ_j, $f_j(0) = 0$, и*

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{1}{|B(0, r)|} \sup_{j\in J} \int\limits_{B(0,r)} \Phi\left(K_{\mu_j}(z)\right) \, dm(z) \leq c < \infty \qquad (11)$$

для строго выпуклой функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, удовлетворяющей условию (4). *Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

1) *существует предел*

$$\lim_{z\to 0} \frac{f_j(z\zeta)}{f_j(z)} = \zeta \qquad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}, \qquad (12)$$

равномерный относительно параметра $j \in J$;

2) *существует предел* (12), *равномерный относительно $(\zeta, j) \in K \times J$ для любого компакта $K \subset \mathbb{C}$*;

3) *все функции семейства f_j могут быть представлены в виде*

$$f_j(z) = A_j(\rho)(1 + o_j(\rho)), \qquad (13)$$

где $o_j(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$ и

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{A_j(t\rho)}{A_j(\rho)} = 1 \qquad \forall\, t > 0 \qquad (14)$$

равномерно относительно $j \in J$;

4) *существует предел*

$$\lim_{z\to 0} \left\{ \frac{f_j(z')}{f_j(z)} - \frac{z'}{z} \right\} = 0, \qquad (15)$$

равномерный относительно параметра $j \in J$ при $|z'| \leq \delta|z|$, $\delta > 0$, и $z \in \mathbb{C}^*$.

Доказательство. Придерживаемся схемы 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1). Полагаем $f_{z,j}(\zeta) \equiv \equiv f_j(\zeta\, z)/f_j(z)$, $z \in \mathbb{C}^*$, $f_{0,j}(\zeta) \equiv \zeta$ для всех $\zeta \in \mathbb{C}$, $j \in J$.

1) $\Rightarrow$ 2). Обозначим

$$r(g, h) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{|g(z_m) - h(z_m)|}{1 + |g(z_m) - h(z_m)|}\,,$$

где $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ — счетное всюду плотное подмножество $\mathbb{C}$. Согласно (12) получаем

$$r(f_{z,j},\, f_{0,j}) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{|f_{z,j}(\zeta_m) - f_{0,j}(\zeta_m)|}{1 + |f_{z,j}(\zeta_m) - f_{0,j}(\zeta_m)|} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{|\frac{f_j(\zeta_m z)}{f_j(z)} - \zeta_m|}{1 + |\frac{f_j(\zeta_m z)}{f_j(z)} - \zeta_m|} \le \sum_{m=1}^{N} 2^{-m}\varepsilon + \sum_{m=N+1}^{\infty} 2^{-m} \le \varepsilon + 2^{-N}$$

для $\varepsilon > 0$ и достаточно большого $N \in \mathbb{N}$. В силу выбора ε и N получаем, что $r(f_{z,j},\, f_{0,j}) \to 0$ при $z \to 0$ равномерно относительно $j \in J$.

По условию $f_{z,j}$ является регулярным решением уравнения Бельтрами (1) с $\mu_{z,j}(\zeta) = \dfrac{\overline{z}}{z}\mu_j(z\zeta)$ и $K_{\mu_{z,j}}(\zeta) = K_{\mu_j}(z\zeta)$ в $\mathbb{C}$. Таким образом,

$$I_{z,j,R} := \int\limits_{B(0,\,R)} \Phi\left(K_{\mu_{z,j}}(\zeta)\right)\, dS(\zeta) \;\le\; \frac{R^2}{|z|^2R^2} \int\limits_{B(0,\,|z|R)} \Phi\left(K_{\mu_j}(\zeta)\right)\, dm(\zeta)$$

и по условию (11) $I_{z,j,R} \le \pi R^2 C < \infty$ для малых $z \in \mathbb{C}^*$, где $C = c + 1$ и величина c в (11) не зависит от $j \in J$. Заметим также, что $f_{z,j}(0) = 0$, $f_{z,j}(1) = 1$. Поэтому $f_{z,j}$, $z \in \mathbb{C}^*$, образуют нормальное семейство (см. теорему 2 в [1]). Итак, $\{f_{z,j}\}$, $z \in \mathbb{C}^*$, — равностепенно непрерывное семейство по предложению 1 из [13] (см. также предложение 7.1 в [14]) и согласно условию (12) $f_{z,j} \to f_{0,j}$ локально равномерно в $\mathbb{C}$ по теореме 1 из [13] (см. также теорему 7.1 в [14]). Заметим, что семейство отображений $\{f_{0,j}\}$ также равностепенно непрерывно по предложению 7.2 из [14]. Отметим, что пространство всех непрерывных функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ можно метризовать с помощью метрики

$$\rho(g,\, h) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\rho_m(g,\, h)}{1 + \rho_m(g,\, h)}\,,$$

где

$$\rho_m(g,\, h) = \max_{|z| \le m} |g(z) - h(z)|\,,$$

которая порождает локально равномерную сходимость в $\mathbb{C}$ [15, с. 243].

Покажем, что $\rho(f_{z,j},\, f_{0,j}) \to 0$ при $z \to 0$ равномерно относительно $j \in J$.

Предположим, что наше утверждение не верно. Тогда найдутся число $\varepsilon > 0$ и последовательности $z_n \to 0$, $z_n \in \mathbb{C}^*$, $j_n \in J$, такие, что $\rho(g_n,\, h_n) \ge \varepsilon$, где $g_n = f_{z_n,j_n}$, $h_n = f_{0,j_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, в нормальных подклассах $\{f_{z,j}\}$ сходимость $r(g_n,\, h_n) \to 0$ влечет $\rho(g_n,\, h_n) \to 0$ при $n \to \infty$ (см., например, предложение 7.2 в [14]). Действительно, в силу равностепенной непрерывности без ограничения общности можно считать, что $g_n \to g_0$ и $h_n \to h_0$ при $n \to \infty$ локально равномерно в $\mathbb{C}$. Но тогда $\rho(g_n, g_0) \to 0$ и $\rho(h_n, h_0) \to 0$ при $n \to \infty$, а по неравенству треугольника

$$\rho(g_n, h_n) \le \rho(g_n, g_0) + \rho(g_0, h_0) + \rho(h_0, h_n).$$

Таким образом, $\rho(g_n, h_n) \to 0$ при $n \to \infty$, если $g_0 = h_0$. Однако опять по неравенству треугольника

$$r(g_0, h_0) \le r(g_0, g_n) + r(g_n, h_n) + r(h_n, h_0).$$

Поэтому $r(g_n, h_n) \to 0$ влечет $\rho(g_n, h_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Последнее противоречит сделанному выше предположению.

2) $\Rightarrow$ 3). Выбирая $z = \rho > 0$, $\zeta = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, и $w = \zeta z = \rho\, e^{i\vartheta}$, получаем $f_j(w) = = f_j(\rho)(\zeta + \alpha_j(\rho))$, где $\alpha_j(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$ равномерно относительно $j \in J$. Таким образом,

$$f_j(w) = \frac{f_j(\rho)}{\rho}(w + o_j(\rho)),$$

где $o_j(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$ равномерно относительно $j \in J$, т. е. для функции f_j имеет место (13) с $A_j(\rho) = f_j(\rho)/\rho$. Кроме того, из (12) с учетом $z = \rho > 0$ и $\zeta = t > 0$ следует, что предел (14) является равномерным относительно $j \in J$.

3) $\Rightarrow$ 4). Из (13) и (14) следует, что $f_{t,j}(\zeta) \to f_{0,j}(\zeta) \equiv \zeta$ при $t \to 0$, $t > 0$, для любого фиксированного $\zeta \in \mathbb{C}$ равномерно относительно $j \in J$.

Отметим, что по условию $f_{\tau,j}$, $\tau > 0$, является регулярным решением уравнения Бельтрами (1) с $\mu_{\tau,j}(\zeta) = \mu_j(\tau\zeta)$ и $K_{\mu_{\tau,j}}(\zeta) = K_{\mu_j}(\tau\zeta)$ в $\mathbb{C}$. Таким образом,

$$I_{\tau,j,R} := \int\limits_{B(0,\,R)} \Phi\left(K_{\mu_{\tau,j}}(\zeta)\right)\, dS(\zeta) \le \frac{R^2}{\tau^2 R^2} \int\limits_{B(0,\,\tau R)} \Phi\left(K_{\mu_j}(z)\right)\, dm(z)$$

и по условию (11) $I_{\tau,j,R} \le \pi R^2 C < \infty$ для малых $\tau > 0$, где $C = c + 1$ и величина c в (11) не зависит от $j \in J$. Далее, проводя рассуждения, аналогичные таковым в первой части доказательства, заключаем, что $f_{t,j}(\zeta) \to f_{0,j}(\zeta) \equiv \zeta$ при $t \to 0$, $t > 0$, равномерно относительно $(\zeta,\, j) \in K \times J$.

Заметим, что

$$f_{z,j}(\zeta) = \frac{f_{|z|,j}(\zeta z/|z|)}{f_{|z|,j}(z/|z|)} = \frac{f_j(z')}{f_j(z)}$$

при $\zeta = z'/z$.

Покажем, что $f_{z,j}(\zeta) - \zeta \to 0$ при $z \to 0$, $z \in \mathbb{C}^*$, равномерно относительно $(\zeta,\, j) \in D_\delta \times J$, где $D_\delta = \{\zeta \in \mathbb{C} \colon |\zeta| \le \delta\}$ для любого $\delta > 0$.

Предположим, что наше утверждение не верно. Тогда найдутся число $\varepsilon > 0$ и последовательности $\zeta_n \in D_\delta$, $z_n \to 0$, $z_n \in \mathbb{C}^*$, $j_n \in J$, такие, что $|f_{z_n,j_n}(\zeta_n) - \zeta_n| \ge \varepsilon$. В силу компактности замкнутого круга D_δ и окружности $\partial\mathbb{D}$ можно считать, что $\zeta_n \to \zeta_0 \in D_\delta$ и $\eta_n = z_n/|z_n| \to \eta_0 \in \partial\mathbb{D}$.

Обозначим через $\varphi_n(\zeta)$ отображение $f_{\tau_n,j_n}(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$, где $\tau_n = |z_n|$, $n = 1, 2, \ldots$. Согласно приведенным выше рассуждениям, $\varphi_n(\zeta) \to \zeta$ при $n \to \infty$ равномерно на $D_\delta \cup \partial\mathbb{D}$ и, кроме того, $f_{z_n,j_n}(\zeta) = \varphi_n(\eta_n\zeta)/\varphi_n(\eta_n)$. Следовательно, $f_{z_n,j_n}(\zeta) \to \zeta$ при $n \to \infty$ равномерно в круге D_δ и поэтому $f_{z_n,j_n}(\zeta_n) \to \zeta_0$ при $n \to \infty$. Последнее противоречит сделанному выше предположению.

4) $\Rightarrow$ 1). Полагая $z' = z\zeta$ и $\delta = |\zeta|$ в выражении (15), получаем соотношение (12).

Лемма доказана.

3. Об асимптотической конформности. Следуя работе [16], кривую Γ будем называть *асимптотически конформной*, если для любых двух точек w_1, $w_2 \in \Gamma$ и любой точки w на подкривой $\Gamma(w_1,\, w_2)$ кривой Γ, лежащей между w_1 и w_2 с наименьшим диаметром,

$$\lim_{|w_1 - w_2| \to 0} \frac{|w_1 - w| - |w - w_2|}{|w_1 - w_2|} = 1 \tag{16}$$

равномерно относительно $w \in \Gamma(w_1,\, w_2)$. Данное понятие возникло в связи с изучением свойств квазиконформных отображений (см., например, соответствующие ссылки в работах

[4, 6]). В данной работе получены условия, при которых регулярное решение уравнения Бельтрами (1) с ограничениями типа (3) на коэффициент отображает границу единичного круга (замыкание круга) на асимптотически конформную кривую (область, ограниченную асимптотически конформной кривой).

Теорема 2. *Пусть* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, — *регулярное решение уравнения Бельтрами* (1) *с коэффициентом* μ *таким, что*

$$\overline{\lim_{r\to 0}} \frac{1}{|B(\eta, r)|} \sup_{\eta\in\partial\mathbb{D}} \int\limits_{B(\eta, r)} \Phi\left(K_\mu(z)\right)\, dm(z) \le c' < \infty \tag{17}$$

для строго выпуклой функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, *удовлетворяющей условию* (4). *Кривая* $\Gamma = f(\partial\mathbb{D})$ *является асимптотически конформной, если выполнено одно из следующих условий*:

1) *отображение* f *является равномерно асимптотически однородным относительно* $\eta \in$ $\in \partial\mathbb{D}$;

2) *в предположении, что* $|(z' - \eta)/(z - \eta)| \le \delta$,

$$\lim_{z', z\to\eta} \left\{ \frac{f(z') - f(\eta)}{f(z) - f(\eta)} - \frac{z' - \eta}{z - \eta} \right\} = 0$$

равномерно относительно $\eta \in \partial\mathbb{D}$ *для любого фиксированного* $\delta > 0$.

Доказательство. Согласно лемме 1, условия 1 и 2 эквивалентны. Докажем, что из условия 1 следует асимптотическая конформность кривой $\Gamma = f(\partial\mathbb{D})$. Доказательство проведем от противного. Пусть для кривой Γ не выполнено условие (16), тогда найдутся $w_1^{(n)}, w_2^{(n)} \in \Gamma$, $w^{(n)} \in \Gamma(w_1^{(n)}, w_2^{(n)})$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $|w_1^{(n)} - w_2^{(n)}| \to 0$ при $n \to \infty$ и

$$\frac{|w_1^{(n)} - w^{(n)}| + |w_2^{(n)} - w^{(n)}|}{|w_1^{(n)} - w_2^{(n)}|} \ge 1 + \varepsilon\,. \tag{18}$$

Пусть η_n, $\eta_n^{(1)}$ и $\eta_n^{(2)}$ — прообразы точек $w^{(n)}$, $w_1^{(n)}$ и $w_2^{(n)}$ на единичной окружности при отображении $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Введем следующие обозначения: $z_n = \eta_n^{(2)} - \eta_n$, $\zeta_n = (\eta_n^{(1)} - \eta_n)/(\eta_n^{(2)} - \eta_n)$. Без ограничения общности предположим, что $|\zeta_n| \le 1$ и $z_n \ne 0$. Пусть

$$\Phi(\eta, \zeta, z) = \frac{f_\eta(\zeta z)}{f_\eta(z)}\,,$$

где $f_\eta(z) = f(z + \eta) - f(\eta)$ и $z \in \mathbb{C}^*$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $\eta \in \partial\mathbb{D}$. Тогда (18) можно записать в виде

$$\frac{1 + |\Phi_n|}{|1 - \Phi_n|} \ge 1 + \varepsilon\,,$$

где $\Phi_n = \Phi(\eta_n, \zeta_n, z_n)$.

С другой стороны, согласно лемме 1 из предположения 1 о равномерной асимптотической однородности отображения f следует, что $\Phi(\eta, \zeta, z) \to \zeta$ при $z \to 0$ равномерно относительно $(\eta, \zeta) \in \partial\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}$. Поскольку круг $\overline{\mathbb{D}}$ является компактом, можно предполагать без ограничения общности, что $\zeta_n \to \zeta_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ при $n \to \infty$. Тогда $\Phi_n \to -t$, где $t \in [0, 1]$. Следовательно, $(1 + |\Phi_n|)/|1 - \Phi_n| \to 1$ при $n \to \infty$. Это противоречит условию (18). Таким образом, доказано, что $\Gamma = f(\partial\mathbb{D})$ — асимптотически конформная кривая.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(0)=0$, — регулярное решение уравнения Бельтрами* (1) *с коэффициентом μ таким, что*

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{|B(\eta,\,r)|}\sup_{\eta\in\mathbb{D}}\int\limits_{B(\eta,\,r)}\Phi\left(K_\mu(z)\right)\,dm(z)\le c'<\infty$$

для строго выпуклой функции $\Phi\colon\overline{\mathbb{R}^+}\to\overline{\mathbb{R}^+}$, удовлетворяющей условию (4), *и $G=f(\overline{\mathbb{D}})$. Граница ∂G является асимптотически конформной кривой, если выполнено одно из следующих условий*:

1) *отображение f является равномерно асимптотически однородным относительно $\eta\in\in\mathbb{D}$*;

2) *в предположении, что $|(z'-\eta)/(z-\eta)|\le\delta$,*

$$\lim_{z',\,z\to\eta}\left\{\frac{f(z')-f(\eta)}{f(z)-f(\eta)}-\frac{z'-\eta}{z-\eta}\right\}=0 \tag{19}$$

при $z',\,z\in\mathbb{D}$ равномерно относительно $\eta\in\mathbb{D}$ для любого фиксированного $\delta>0$;

3) *в предположении, что $|(z'-\eta)/(z-\eta)|\le\delta$, существует предел* (19) *при $z',\,z\in\overline{\mathbb{D}}$ равномерно относительно $\eta\in\overline{\mathbb{D}}$ для любого фиксированного $\delta>0$.*

Доказательство. 1) $\Leftrightarrow$ 2). Согласно лемме 1 условие 1 эквивалентно выполнению (15) для семейства функций

$$f_\eta(z)=f(z+\eta)-f(\eta)$$

равномерно относительно $\eta\in\mathbb{D}$.

Следовательно, при условии $|(z'-\eta)/(z-\eta)|\le\delta$

$$\Psi(\eta,\,z,\,z')=\left\{\frac{f(z')-f(\eta)}{f(z)-f(\eta)}-\frac{z'-\eta}{z-\eta}\right\}\to 0$$

при $z',\,z\to 0$ равномерно относительно $\eta\in\mathbb{D}$ для любого $\delta>0$.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть $\lambda_n\in(0,\,1)$, $n=1,\,2,\ldots$, и $\lambda_n\to 1$ при $n\to\infty$. Для любых η, z и $z'\in\overline{\mathbb{D}}$, $z\ne\eta$, полагаем

$$\Psi_n(\eta,\,z,\,z')=\Psi(\eta\lambda_n,\,z\lambda_n,\,z'\lambda_n)\,.$$

Заметим, что

$$|z'\lambda_n-\eta\lambda_n|\le|z'-\eta|,\qquad |z\lambda_n-\eta\lambda_n|\le|z-\eta|,$$

$$|(z'\lambda_n-\eta\lambda_n)/(z\lambda_n-\eta\lambda_n)|=|(z'-\eta)/(z-\eta)|$$

и $\eta\lambda_n$, $z\lambda_n$, $z'\lambda_n\in\mathbb{D}$. Согласно предположению 2 теоремы при условии $|(z'-\eta)/(z-\eta)|\le\delta$

$$\lim_{z',\,z\to\eta}\Psi_n(\eta,\,z,\,z')=0 \tag{20}$$

при $z,\,z'\in\overline{\mathbb{D}}$ равномерно относительно n и $\eta\in\mathbb{D}$ для любого фиксированного $\delta>0$.

Предположим, что предел (19) не является равномерным относительно $\eta\in\overline{\mathbb{D}}$. Тогда найдутся $\delta>0$, $\varepsilon>0$, η_k, z_k и $z_k'\in\mathbb{D}$, $|(z_k'-\eta_k)/(z_k-\eta_k)|\le\delta$, $k=1,\,2,\ldots$, $z_k'-\eta_k\to 0$ и $z_k-\eta_k\to 0$, такие, что

$$|\Psi(\eta_k,\,z_k,\,z_k')|\ge\varepsilon\,. \tag{21}$$

С другой стороны,

$$|\Psi(\eta_k,\, z_k,\, z_k') - \Psi_{n_k}(\eta_k,\, z_k,\, z_k')| < \varepsilon/2 \tag{22}$$

для любого фиксированного k и некоторого n_k. Из неравенств (21) и (22) заключаем, что

$$|\Psi_{n_k}(\eta_k,\, z_k,\, z_k')| > \varepsilon/2 \qquad \forall\, k = 1,\, 2, \ldots\ .$$

Последнее противоречит (20) и, следовательно, предел (19) является равномерным относительно $\eta \in \overline{\mathbb{D}}$.

3) $\Rightarrow$ граница ∂G является асимптотически конформной кривой. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема доказана.

4. О гладкости некоторых кривых. Пусть Γ — жорданова кривая в $\mathbb{C}$. Будем говорить, что Γ является *гладкой*, если существует параметризация $\Gamma : w(\tau),\ 0 \le \tau \le 2\pi$, такая, что $w'(\tau)$ непрерывна и не равна 0; для удобства выберем диапазон для параметра $[0,\, 2\pi]$. Продолжим $w(\tau)$ на $-\infty < \tau < +\infty$ как 2π-периодическую функцию.

Кривая Γ является гладкой тогда и только тогда, когда она имеет непрерывно меняющуюся касательную, т. е. существует непрерывная функция β такая, что

$$\arg[w(\tau) - w(t)] \to \begin{cases} \beta(t), & \tau \to t+\,, \\ \beta(t) + \pi, & \tau \to t-\,, \end{cases}$$

для всех t. Будем называть $\beta(\tau)$ углом направления касательной к кривой Γ в $w(t)$.

Следующий результат является обобщением одного из утверждений классической теоремы Линделефа (см. [17], а также [18], теорема 1).

Теорема 4. *Пусть* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, — *регулярное решение уравнения Бельтрами* (1) *с условием* (17) *на коэффициент* μ. *Если кривая* $\Gamma = f(\partial\mathbb{D})$ *является гладкой и выполнено одно из условий* 1, 2 *теоремы* 2, *то*

$$\arg f'(e^{it}) = \beta(t) - t - \frac{\pi}{2}$$

для следующей параметризации кривой $\Gamma : w(t) = f(e^{it})$, $0 \le t \le 2\pi$.

Доказательство. Поскольку Γ — гладкая жорданова кривая, существует непрерывная функция $\beta(t)$, заданная на отрезке $[0,\, 2\pi]$, такая, что

$$\arg[f(\tau) - f(t)] \to \begin{cases} \beta(t), & \tau \to t+\,, \\ \beta(t) + \pi, & \tau \to t-\ . \end{cases}$$

Согласно одному из условий 1, 2 теоремы 2 для f имеет место

$$\lim_{z,\,\zeta \to 0} \left\{ \frac{f(z+\eta) - f(\eta)}{f(\zeta+\eta) - f(\eta)} - \frac{z}{\zeta} \right\} = 0 \tag{23}$$

равномерно относительно $\eta \in \partial\mathbb{D}$ при $z,\, \zeta \in \mathbb{C}$, $|z/\zeta| \le \delta$, для любого фиксированного $\delta > 0$. Выполняя замену z на $z\zeta$ в (23), получаем

$$\lim_{\zeta \to 0} \frac{f(z\zeta+\eta) - f(\eta)}{f(\zeta+\eta) - f(\eta)} = z$$

локально равномерно относительно $z \in \mathbb{C}$ и равномерно относительно $\eta \in \partial\mathbb{D}$. В частности, полагая $\zeta = re^{i\theta_1}$ и $z = re^{i(\theta_2 - \theta_1)}$, получаем

$$\lim_{r\to 0}\left[\arg\frac{f(\eta+re^{i\theta_2})-f(\eta)}{re^{i\theta_2}}-\arg\frac{f(\eta+re^{i\theta_1})-f(\eta)}{re^{i\theta_1}}\right]=0 \tag{24}$$

для соответствующей ветви аргумента равномерно по $\theta_1,\,\theta_2\in[0,\,2\pi]$ и $\eta\in\partial\mathbb{D}$. Пусть Σ — дуга единичной окружности $\partial\mathbb{D}$ с концом в точке $\eta=e^{it}$. Поскольку

$$\lim_{\substack{z\to e^{it}\\ z\in\Sigma}}\left[\arg\frac{f(z)-f(e^{it})}{z-e^{it}}\right]=\beta(t)-t-\frac{\pi}{2}\,,$$

из (24) следует существование предела

$$\arg f'(e^{it})=\lim_{z\to e^{it}}\left[\arg\frac{f(z)-f(e^{it})}{z-e^{it}}\right]=\beta(t)-t-\frac{\pi}{2},$$

равномерного по параметру t.

Теорема доказана.

1. *Ломако Т. В.* К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 3. – С. 341 – 349.
2. *Гутлянский В. Я., Ломако Т. В., Рязанов В. И.* К теории вариационного метода для уравнений Бельтрами // Укр. мат. вестн. – 2011. – **8**, № 4. – С. 513 – 536.
3. *Lomako T., Ryazanov V.* On a variational method for the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest. Ser. Math. – 2011. – **60**, № 2. – P. 3 – 14.
4. *Gutlyanskii V. Ya., Ryazanov V. I.* On asymptotically conformal curves // Complex Variables. – 1994. – **25**. – P. 357 – 366.
5. *Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* К теории локального поведения квазиконформных отображений // Изв. РАН. Сер. мат. – 1995. – **59**, № 3. – С. 31 – 58.
6. *Гутлянский В. Я., Рязанов В. И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 2011. – 425 с.
7. *Севостьянов Е. А.* О граничном поведении открытых дискретных отображений с неограниченной характеристикой // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 6. – С. 855 – 859.
8. *Севостьянов Е. А.* О равностепенно непрерывных семействах отображений, не принимающих значения из переменного множества // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 361 – 370.
9. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami equation: a geometric approach // Develop. Math. – New York: Springer, 2012. – **26**. – 301 p.
10. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Укр. мат. вестн. – 2010. – **7**, № 4. – С. 467 – 515.
11. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
12. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. – Новосибирск: Наука, 1974. – 98 с.
13. *Рязанов В. И., Севостьянов Е. А.* Нормальные семейства пространственных отображений // Сиб. эл. мат. изв. – 2006. – **3**. – С. 216 – 231.
14. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in modern mapping theory // Springer Monographs Math. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
15. *Куратовский К.* Топология. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
16. *Becker J., Pommerenke Chr.* Uber die quasikonforme Fortsetzung schlichten Funktionen // Math. Z. – 1978. – **161**, № 1. – S. 69 – 80.
17. *Lindelöf E.* Sur la repre'sentation conforme d'une aire simplement connexe sur l'aire d'un cercle // Quatr. Congr. Math. Scandinaves, Stockholm, 1916. – P. 59 – 90.
18. *Gutlyanskii V., Martio O., Ryazanov V.* On a theorem of Lindelöf // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska. Sect. A. – 2011. – **65**, № 2. – P. 45 – 51.

Получено 10.12.13,
после доработки — 05.02.15