УДК 517.968

С. В. Переверзев, С. Г. Солодкий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОПТИМАЛЬНАЯ ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

We present a review of results obtained in the Institute of Mathematics of National Ukrainian Academy of Sciences when investigating the optimal digitization of ill-posed problems.

Наведено огляд результатів, одержаних в Інституті математики НАН України при дослідженні проблеми оптимальної дискретизації некоректно поставлених задач.

1. Проблема дискретизации естественно возникает при приближенном решении тех или иных уравнений и является одной из основных в современном численном анализе. При этом под дискретизацией обычно понимается процесс перехода от исходного операторного уравнения

$$Ax = f \tag{1}$$

к некоторому „приближенному" уравнению

$$A_{N,M}x = f_N \tag{2}$$

($\operatorname{rank} A_{N,M} = N$, $N < \infty$, $\operatorname{rank} A^*_{N,M} = M$, $M < \infty$, A^* — сопряженный к A оператор), используемому для построения приближенного решения x_M, что, в свою очередь, требует выполнения лишь конечного числа элементарных арифметических операций (э. а. о.) над определенным набором действительных чисел. Этот набор принято называть дискретной информацией об уравнении (1). Если (1) рассматривается в гильбертовом пространстве X со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|$, то одна из наиболее распространенных схем дискретизации порождается известным методом Ритца – Галеркина, при котором $A_{N,M} = P_N A P_M$, $f_N = P_N f$, где P_N — ортопроектор на линейную оболочку $\operatorname{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ первых N элементов некоторого ортонормированного базиса в X. При этом в качестве дискретной информации выступает набор чисел, образующих матрицу $\{(e_i, Ae_j),\ i = \overline{1,N},\ j = \overline{1,M}\}$ и вектор $\{(e_i, f)\}_{i=1}^N$.

Существует тесная связь проблемы дискретизации и теории приближений, успешно используемая в численном анализе, начиная с работ Н. С. Бахвалова [1] и К. И. Бабенко [2]. Это оказывает влияние и на современную теорию приближений, внося информационный аспект в ее традиционные задачи, о чем свидетельствуют монографии Дж. Трауба, Х. Вожьняковского, Г. Васильковского [3, 4] и работы Н. П. Корнейчука [5, 6].

Если линейный оператор A из уравнения (1) непрерывно обратим, то задача решения этого уравнения относится к классу корректных по Адамару задач. В противном случае (1) является так называемой некорректно поставленной задачей. Настоящий обзор посвящен оптимальной дискретизации именно некорректно поставленных задач. Что же касается корректных по Адамару задач, то теория оптимальной дискретизации достаточно широких классов таких задач построена в работах [7 – 15].

За последние 20 лет в теории сложности интенсивное развитие получило направление, связанное с понятиями информационной и алгоритмической сложности. Эти понятия впервые были введены в монографиях [3, 4], где изложены основы IBC-теории (Information Based Complexity). В рамках этой теории под информационной сложностью задачи понимается наименьший объем дискретной информации, необходимый для нахождения приближенного решения с заданной точностью, а под алгоритмической сложностью — минимальное число арифметических действий, которые требуется выполнить для построения этого решения.

© С. В. ПЕРЕВЕРЗЕВ, С. Г. СОЛОДКИЙ, 2000

Для дальнейшего изложения введем понятие проекционной схемы дискретизации. Пусть $\mathcal{L}(X,X)$ — пространство линейных непрерывных операторов из X в X. Как известно, любой оператор $A \in \mathcal{L}(X,X)$ может быть представлен с помощью бесконечной матрицы $\{(e_i, Ae_j)\}_{i,j=1}^{\infty}$ в следующем виде:

$$Ag = \sum_{i,j=1}^{\infty} (e_i, Ae_j)(e_j, g)\, e_i\,,$$

где $E = \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ — произвольно выбранный базис пространства X. Каждому скалярному произведению $(e_i, A\,e_j)$ поставим в соответствие точку (i,j) из множества $[1,\infty]\times[1,\infty]$ координатной плоскости. Эту точку будем рассматривать в качестве номера функционала $(e_i, A\,e_j)$. Номером скалярного произведения (e_j, g) будем считать число j. Для любой ограниченной области $\Omega \subset \subset [1,\infty)\times[1,\infty)$ координатной плоскости обозначим через ω множество всех целых чисел i, для каждого из которых найдется хотя бы одно число j такое, что $(i,j)\in\Omega$, т. е.

$$\omega = \{i : (i,j)\in\Omega\}.$$

Рассмотрим выражения

$$A_\Omega = A_{E,\Omega} := \sum_{(i,j)\in\Omega} (e_i, Ae_j)(e_j, \cdot)\, e_i\,,$$

$$P_\Omega f = \sum_{k\in\omega} (e_k, f)\, e_k\,. \tag{3}$$

Под проекционной схемой дискретизации (1) будем понимать пару (Ω, E) элементов Ω и E, в результате воздействия которой на (1) осуществляется переход к дискретизированному уравнению

$$A_\Omega x = P_\Omega f,$$

где A_Ω и $P_\Omega f$ определяются согласно (3).

При изучении информационной сложности операторных уравнений (1) естественным образом встает воспрос об общем количестве информационных функционалов

$$(e_i, A\,e_j), \qquad (e_i, f), \tag{4}$$

называемых галеркинской информацией, которые используются в той или иной схеме дискретизации. В связи с этим в рамках проекционных схем дискретизации уравнений (1) представляет интерес и вопрос об оптимальности галеркинского подхода к дискретизации в смысле объема функционалов вида (4). Другими словами, является ли выбор прямоугольника $[1,N]\times[1,M]$ наиболее экономичным среди всех возможных множеств Ω координатной плоскости? Ниже будут предложены новые проекционные схемы, основанные на идее гиперболического креста и являющиеся не только более экономичными по сравнению с галеркинской схемой, но и оптимальными для широких классов операторных уравнений I рода.

Напомним, что под гиперболическим крестом координатной плоскости $[-\infty, \infty]\times[-\infty,\infty]$ обычно понимается множество вида

$$\Gamma(\eta_1,\eta_2,n) = \{(i,j)\colon\ |i|^{\eta_1}|j|^{\eta_2} \le n,\ \ |i| \le n^{1/\eta_1},\ \ |j| \le n^{1/\eta_2}\},$$

где параметры η_1 и η_2 выбираются в зависимости от гладкости коэффициентов исследуемой задачи. Впервые в теории приближения гиперболический крест применил К. И. Бабенко [2] при вычислении колмогоровских поперечников для некоторых классов периодических функций, имеющих доминирующую смешанную частную производную. В дальнейшем идея гиперболического креста нашла свое применение в многочисленных работах, посвященных построению различных методов приближения функций многих переменных (см. монографию [16]). Отметим, что в теории функций выбор информационных функционалов в виде коэффициентов Фурье с номерами из гиперболических крестов определяет оптимальные методы приближения только для пространств периодических функций и только в случае, когда аппроксимируемые функции имеют доминирующую смешанную частную производную.

Введем теперь в рассмотрение новую проекционную схему дискретизации, на основании которой удается построить оптимальные методы решения уравнений (1). Итак, в рамках предлагаемой проекционной схемы под областью Ω будем понимать множество координатной плоскости вида

$$\Gamma_n^{a,b} = \bigcup_{k=0}^{n} Q_k,$$

$$Q_0 = \{1\}\times[1, 2^{bn}], \quad Q_k = (2^{k-1}, 2^k]\times[1, 2^{bn-ak}], \quad k=1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

где b и a — произвольные вещественные числа такие, что $b \geq a \geq 0$. Фигура $\Gamma_n^{a,b}$ состоит из прямоугольников Q_k, $k = 0, 1, \ldots, n$, левые нижние углы которых имеют координаты $(2^{k-1}, 1)$, а правые верхние — $(2^k, 2^{bn-ak})$. Заметим, что фигура $\Gamma_n^{a,b}$ получается в результате пересечения первого квадранта координатной плоскости с так называемым ступенчатым гиперболическим крестом. В зависимости от значений параметров b и a образуемая фигура может принимать различные формы. Так, в частности, при $a=0$ множество $\Gamma_n^{a,b}$ вырождается в прямоугольник $[1, 2^n]\times[1, 2^{bn}]$, а при $b=a>0$ область $\Gamma_n^{a,b}$ представляет собой стандартный гиперболический крест, известный из теории приближения функций многих переменных. Если же $b>a>0$, то $\Gamma_n^{a,b}$ имеет форму усеченного гиперболического креста. Линией ограничения (усечения) служит отрезок $\{i = 2^n,\ 1\leq j\leq 2^{(b-a)n}\}$, т. е. $(i,j)\in \Gamma_n^{a,b}$ только при $i\leq 2^n$.

Таким образом, предлагаемая проекционная схема $(\Gamma_n^{a,b}, E)$ состоит в выборе информационных функционалов (4) для $\Omega = \Gamma_n^{a,b}$ (5), используемых при построении конечномерных элементов

$$A_{\Gamma_n^{a,b}} =: \sum_{k=1}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-ak}} + P_1 A P_{2^{bn}},$$

$$P_{\Gamma_n^{a,b}} f = P_{2^n} f =: \sum_{k=1}^{2^n} (e_k, f)\, e_k. \tag{6}$$

Если $bn - ak$ не является целым числом, то под $P_{2^{bn-ak}}$ будем понимать $P_{2^{\{bn-ak\}}}$, где $\{g\}$ — ближайшее сверху к g целое число.

Пусть $\operatorname{card}(\Omega)$ — общее количество функционалов вида (4), используемых при дискретизации уравнений (1) в рамках проекционной схемы (Ω, E). В общем случае (для произвольных натуральных n и действительных значений $b \geq a\geq 0$) справедливы следующие, порядковые по n, оценки:

$$\operatorname{card}(\Gamma_n^{a,b}) \asymp \begin{cases} 2^{(b-a+1)n}, & a<1; \\ 2^{bn} n, & a=1; \\ 2^{bn}, & a>1. \end{cases} \tag{7}$$

Величина $\operatorname{card}(\Gamma_n^{a,b})$ рассматривается нами в качестве целевой функции, зависящей от трех параметров: a, b и n. При этом из (7) следует, что для поиска минимума целевой функции (т. е. для обеспечения минимальной величины $\operatorname{card}(\Gamma_n^{a,b})$) требуется найти наименьшие значения параметров b и n, а также наибольшее значение параметра a среди допустимых.

Поскольку при $a = 0$ оператор $A_{\Gamma_n^{a,b}}$ трансформируется в галеркинский оператор $P_{2^n} A P_{2^{bn}}$, то традиционный подход к дискретизации можно рассматривать в качестве частного случая проекционной схемы $(\Gamma_n^{a,b}, E)$ (6), которую в дальнейшем будем называть обобщенной проекционной схемой дискретизации операторных уравнений (сокращенно ОПС).

2. Приведем теперь строгую постановку рассматриваемой ниже задачи. Целью наших исследований является приближенное нахождение нормального решения уравнения (1) (т. е. решения (1) с наименьшей нормой в X) $x_0 \in \overline{\operatorname{Range}(A^*)} = \operatorname{Ker}(A)^{\perp}$ по дискретной информации вида (4). При этом $\operatorname{Range}(A)$ не предполагается замкнутым (т. е. считаем $\overline{\operatorname{Range}(A)} \neq \operatorname{Range}(A)$). Предположим, что нормальные решения x_0 уравнений (1) заполняют некоторое центрально-симметричное множество $\mathcal{M} \subset X$. Обычно под $\mathcal{M}$ в теории некорректных задач понимается множество вида $\mathcal{M} = B X_{\rho,0}$, где $X_{\rho,\varphi}$ — шар с центром в φ радиуса ρ в пространстве X, а B — некоторый компактный оператор из $\mathcal{L}(X,X)$ такой, что $\operatorname{Range}(B) \subset \operatorname{Ker}(A)^{\perp}$. При исследовании задачи построения оптимальных методов решения (1) в роли B традиционно выступает оператор $|A|^{\nu}$, $\nu > 0$, где $|A| = (A^*A)^{1/2}$. Множество $\mathcal{M}$ в этом случае имеет вид

$$\mathcal{M}_{\nu,\rho}(A) := \{u:\ u = |A|^{\nu} v,\ \|v\| \le \rho\}.$$

Известно, что если уравнение (1) имеет решение $x_0 \in \mathcal{M}_{\nu,\rho}(A)$, то x_0 — наименьшее в метрике X решение (1). При этом [17, с. 43] для любого $\nu > 0$ выполняется соотношение $\overline{\operatorname{Range}(|A|^{\nu})} = \overline{\operatorname{Range}(A^*)}$, т. е. элементы вида $|A|^{\nu} v$ образуют всюду плотное множество в подпространстве $\operatorname{Ker}(A)^{\perp}$, которому принадлежит нормальное решение (1). В дальнейшем будем считать, что уравнение (1) при некоторых $\nu > 0$ и $\rho > 0$ имеет решение $x_0 \in \mathcal{M}_{\nu,\rho}(A)$. В этом случае задача (1) является условно корректной [18, с. 18].

Пусть вместо f задано некоторое его приближение $f_\delta \in X_{\delta,f}$, где δ — малое положительное число. Другими словами, в нашем распоряжении имеется возмущенное уравнение

$$Ax = f_\delta, \tag{8}$$

где $\|f - f_\delta\| \le \delta$.

Поскольку в силу компактности оператора A задача нахождения решений уравнения (1) не является корректной в смысле Адамара, то для построения устойчивого приближенного решения (1) необходима регуляризация. Следуя [19, с. 55; 17, с. 7], под регуляризатором задачи (1), (8) будем понимать такое семейство операторов $R_\alpha = R_\alpha(A)\colon X \to X$, зависящих от параметра $\alpha = \alpha(\delta)$ и оператора A, что для любого $f \in \operatorname{Range} A$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{f_\delta \in X_{\delta, f}} \inf_{u \in A^{-1} f} \|u - R_\alpha(A) f_\delta\| = 0,$$

где $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, а $A^{-1} f$ — полный прообраз элемента f. Совокупность всех регуляризаторов обозначим через $\mathcal{R}$.

Определение. *Под проекционным методом решения уравнения* (1) *будем понимать произвольное правило* (R_α, Ω, E), $R_\alpha \in \mathcal{R}$, *в соответствии с которым набору функционалов* (4) *в качестве приближенного решения* (1) *сопоставляется элемент*

$$x_{\text{disc}} = x_{\text{disc}}(R_\alpha, \Omega, E, A, f_\delta) := R_\alpha(A_{E,\Omega}) P_\Omega f_\delta. \tag{9}$$

Таким образом, проекционный метод решения (1) можно представить в виде комбинации метода регуляризации R_α и проекционной схемы дискретизации (Ω, E).

Точность метода (R_α, Ω, E) на множестве $\mathcal{M}_{\nu,\rho}(A)$ характеризуется наибольшим отклонением

$$\mathcal{E}_{\delta,\nu,\rho}(A, R_\alpha, \Omega, E) = \sup_{x_0 \in \mathcal{M}_{\nu,\rho}(A)} \inf_{f_\delta \colon \|Ax_0 - f_\delta\| \le \delta} \|x_0 - x_{\text{disc}}\|.$$

Если теперь ввести в рассмотрение некоторый класс компактных операторов $\mathcal{H} \subset \{A : A \in \mathcal{L}(X, X),\ \|A\| \le \gamma\}$, то под погрешностью метода (R_α, Ω, E) на классе $\mathcal{H}$, как обычно, будем понимать величину

$$\mathcal{E}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}, R_\alpha, \Omega, E) = \sup_{A \in \mathcal{H}} \mathcal{E}_{\delta,\nu,\rho}(A, R_\alpha, \Omega, E).$$

Оптимальной погрешностью проекционной схемы (Ω, E) на классе $\mathcal{H}$ назовем величину

$$\mathcal{E}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}, \Omega, E) = \inf_{R_\alpha \in \mathcal{R}} \mathcal{E}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}, R_\alpha, \Omega, E).$$

Известно, что при любых Ω и E справедливо соотношение

$$\mathcal{E}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}, \Omega, E) \ge \rho^{1/(\nu+1)} \delta^{\nu/(\nu+1)}.$$

Через $\mathcal{P}^d_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H})$, $d = (d_1, d_2)$, обозначим множество всех возможных проекционных схем (Ω, E), для которых выполняются соотношения

$$\mathcal{E}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}, \Omega, E) \le d_1 \rho^{1/(\nu+1)} \delta^{\nu/(\nu+1)}, \qquad d_1 \ge 1,$$

и для любого уравнения (1), где $A \in \mathcal{H}$, $f = A x_0$, $x_0 \in M_{\nu,\rho}(A)$,

$$\|(P_\Omega A - A_\Omega) x_0\|_X \le d_2 \delta. \tag{10}$$

Предполагается, что постоянные d_1, d_2 выбраны так, что $\mathcal{P}^d_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}) \ne \varnothing$. Это будет выполняться, например, если

$$(d_2 + 1)^{2\nu+1} \le (d_1(2d_2 + 1))^{\nu+1}.$$

***Замечание* 1.** Мы ввели условие (10) в определение интересующих нас схем дискретизации, следуя работе [20], где впервые фигурировали ограничения подобного типа на величину $\|(P_\Omega A - A_\Omega) x_0\|$.

Введем в рассмотрение величину

$$\mathrm{Card}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}) \doteq \min\{\mathrm{card}(\Omega):\ (\Omega, E)\in\mathcal{P}^d_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H})\},$$

которую будем называть информационной сложностью проекционных методов решения уравнений (1). Эта величина указывает минимальный объем дискретной информации вида (4), гарантирующий оптимальную по порядку точность $d_1\,\rho^{1/(\nu+1)}\,\delta^{\nu/(\nu+1)}$ на классе уравнений (1) с операторами $A\in\mathcal{H}$ и нормальными решениями x_0 из множества $M_{\nu,\rho}(A)$.

Обозначим через Π_N множество всех возможных проекционных методов (R_α,Ω,E), $R_\alpha\in\mathcal{R}$, для построения приближенного решения x_{disc} (9) которых достаточно выполнения N э. а. о. Величину

$$\mathrm{Comp}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}) = \min\{N:\ \exists\,(R_\alpha,\Omega,E)\in\Pi_N,\ (\Omega,E)\in\mathcal{P}^d_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H})\}$$

назовем алгоритмической сложностью проекционных методов решения уравнений (1). Величина $\mathrm{Comp}_{\delta,\nu,\rho}$ характеризует минимальное количество э. а. о., требуемых для построения с оптимальной точностью приближенного решения любого уравнения (1) с оператором $A\in\mathcal{H}$ и нормальным решением x_0 из множества $M_{\nu,\rho}(A)$, используя при этом дискретную информацию вида (4) о коэффициентах A и f_δ уравнения (8).

Таким образом, нам предстоит построить такие конечномерные аппроксимации, которые не только сохраняют оптимальный порядок точности, но также обеспечивают эту точность за счет минимального количества дискретной информации (величина $\mathrm{Card}_{\delta,\nu,\rho}$) и элементарных операций над значениями галеркинских функционалов (4) (величина $\mathrm{Comp}_{\delta,\nu,\rho}$).

3. Изложим ниже необходимые факты и понятия. Обозначим через X^r, $r = 1, 2, \ldots$, линейное подпространство X, снабженное нормой

$$\|g\|_r = \|g\|_{X^r} := \|g\| + \sum_{j=1}^{r}\|D_j g\|,$$

где D_j — некоторые линейные операторы, действующие из X^r в X, и такое, что для некоторого ортонормированного базиса $E=\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ пространства X и любых $m = 1, 2, \ldots$ справедливо соотношение

$$\|I - P_m\|_{X^r\to X} \le \beta_r m^{-r}, \tag{11}$$

где I — тождественный оператор, а постоянная β_r не зависит от m.

Введем в рассмотрение классы линейных операторов

$$\mathcal{H}^{r,s}_\gamma(S) = \{A: A\in\mathcal{L}(X,X),\ \|A\|_{X\to X^r} + \|A^*\|_{X\to X^s}\le\gamma\},$$

$$\mathcal{H}^{r,s}_\gamma(D) = \left\{A:\ A\in\mathcal{L}(X,X),\ \|A^*\|_{X\to X^s} + \sum_{j=1}^{r}\|(D_jA)^*\|_{X\to X^s}\le\gamma\right\},$$

где A^* — такой оператор, что $(f, Ag) = (A^*f, g)$ для любых $f, g\in X$.

Легко видеть, что X^r является обобщением соболевского пространства W_2^r функций, имеющих суммируемые в квадрате r-е производные, а множество $\mathcal{H}^{r,s}_\gamma(S)$ обобщает класс интегральных операторов вида $Ax(t) = \int_0^1 h(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau$, ядра $h(t,\tau)$ которых имеют соболевский тип гладкости и частные производные

$$\sum_{0 \le i/r + j/s \le 1} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^{i+j} h(t, \tau)}{\partial t^i \partial \tau^j} \right|^2 dt\, d\tau \right)^{1/2} \le \gamma.$$

В свою очередь, множество $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D)$ обобщает класс интегральных операторов, ядра $h(t, \tau)$ которых имеют доминирующую смешанную частную производную $\dfrac{\partial^{r+s} h(t, \tau)}{\partial t^r \partial \tau^s}$, причем

$$\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{s} \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^{i+j} h(t, \tau)}{\partial t^i \partial \tau^j} \right|^2 dt\, d\tau \right)^{1/2} \le \gamma.$$

Примерами базиса E могут служить: ортонормированная система функций Хаара — в случае малой гладкости $r = 1$, подпространство тригонометрических многочленов — в случае периодичности функций-коэффициентов $h(t, \tau)$ и $f(t)$ уравнения (1), и наконец, в общем случае — ортонормированная система полиномов Лежандра, рассматриваемая на отрезке $[0, 1]$. Известно, что для всех ортопроекторов P_m, соответствующих этим системам, справедливо неравенство $\|I - P_m\|_{W_2^r \to L_2} \le \beta_r m^{-r}$. Это означает, что для $X = L_2$, $X^r = W_2^r$ и $D_j = \dfrac{d^j}{dt^j}$ выполнены все условия, определяющие X^r.

Следуя идее [21] о построении регуляризатора как функции от оператора решаемого уравнения, рассмотрим некоторое параметрическое семейство функций $\mathcal{G} = \{g_\alpha,\ 0 < \alpha < 1\}$, измеримых по Борелю на отрезке $[0, \gamma^2]$. На эти функции наложим два условия:

$$\sup_{0 \le \lambda \le \gamma^2} \lambda^\nu |1 - \lambda g_\alpha(\lambda)| \le \kappa_\nu \alpha^\nu, \quad 0 \le \nu \le \nu_*, \tag{12}$$

$$\sup_{0 \le \lambda \le \gamma^2} \lambda^{1/2} |g_\alpha(\lambda)| \le \kappa_* \alpha^{-1/2}, \tag{13}$$

где ν_*, κ_ν $(\kappa_0 \le 1)$ и κ_* — некоторые не зависящие от α положительные константы.

В качестве приближения к x_0 примем элемент $x_\alpha = R_\alpha f_\delta$, где регуляризатор $R_\alpha = R_\alpha(A)$ будет задаваться соотношением

$$R_\alpha = g_\alpha(A^* A) A^*. \tag{14}$$

Совокупность всех регуляризаторов вида (14) обозначим $\mathcal{R}'$.

Пример. Иллюстрацией к описанной схеме регуляризации может служить обобщенный метод Тихонова [22]. Пусть $q \ge -1/2$. Приближенное решение x_α будем определять из уравнения II рода

$$(\alpha^{q+1} I + (A^* A)^{q+1}) x_\alpha \le (A^* A)^q A^* f_\delta, \tag{15}$$

где I — тождественный оператор. Это метод вида (14) с функцией $g_\alpha(\lambda) = \lambda^q / (\alpha^{q+1} + \lambda^{q+1})$, для которой выполнены условия (12), (13) при $\nu_* = q + 1$. В случае $q = 0$ получаем обычный метод Тихонова.

4. Вернемся теперь к вопросу о числе скалярных произведений вида (4), которые требуются для обеспечения оптимального порядка точности. Для традиционной схемы дискретизации ответ на поставленный вопрос получен в [22].

Здесь и всюду далее будем считать, что во всех построенных ниже проекционных схемах (Ω, E) используется базис E, удовлетворяющий (11).

Теорема A [22]. *Оптимальный порядок погрешности* $O(\delta^{\nu/(\nu+1)})$ *на классе уравнений* (1), *где* $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S)$ (*или* $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D)$) *и* $x_0 \in M_{\nu,\rho}(A)$, *обеспечивается в рамках регуляризатора* $R_\alpha \in \mathcal{R}'$ *и галеркинской схемы дискретизации* $([1,m]\times[1,l], E)$ *при* $\alpha \asymp \delta^{2/(\nu+1)}$ *и* m, l *таких, что* $m^{-\min\{\nu,2\}r} \asymp l^{-\min\{\nu,1\}s} \asymp \delta^{\nu/(\nu+1)}$. *При этом*

$$\mathrm{Card}([1,m]\times[1,l]) = ml + m \asymp \delta^{-y},$$

где $y = \dfrac{r+s}{rs(\nu+1)}$ *при* $0 < \nu \le 1$, $y = \dfrac{r\nu+s}{rs(\nu+1)}$ *при* $1 \le \nu \le 2$, $y = \dfrac{(2r+s)\nu}{2rs(\nu+1)}$ *при* $2 \le \nu \le 2\nu_*$.

В следующих двух утверждениях будут сконструированы экономичные ОПС, оптимальные по точности на рассматриваемых классах уравнений (1). Основная проблема при построении таких схем состоит в выборе параметров a, b и n, обеспечивающих минимум целевой функции.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \asymp \delta^{2/(\nu+1)}$ *и параметры* a, b, n *проекционной схемы* $(\Gamma_n^{a,b}, E)$ *выбраны согласно правилам*:

а) для $0 < \nu \le 1$:

$$2^{-(\nu+1)rn} \asymp \delta, \quad a = \frac{r}{(1+\nu)s}, \quad b = \frac{r}{s};$$

б) для $1 < \nu \le 2$:

$$2^{-(\nu+1)rn} \asymp \delta, \quad a = \frac{\nu r}{2s}, \quad b = \frac{\nu r}{s};$$

в) для $2 \le \nu \le 2\nu_*$:

$$2^{-2(\nu+1)rn/\nu} \asymp \delta, \quad a = \frac{(3\nu-2)r}{2\nu s}, \quad b = \frac{2r}{s}.$$

Тогда схема $(\Gamma_n^{a,b}, E)$ *принадлежит* $\mathcal{P}_{\delta,\nu,\rho}^{d}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D))$. *Оптимальная по порядку оценка погрешности* $d_1\rho^{1/(\nu+1)}\delta^{\nu/(\nu+1)}$ *достигается в рамках проекционного метода* $(R_\alpha, \Gamma_n^{a,b}, E)$, $R_\alpha \in \mathcal{R}'$.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha \asymp \delta^{2/(\nu+1)}$ *и параметры* a, b, n *проекционной схемы* $(\Gamma_n^{a,b}, E)$ *выбраны согласно правилам*:

а) для $1 < \nu < 2$:

$$2^{-(\nu+1)rn} \asymp \delta, \quad a = \frac{(3-\nu)r}{2s}, \quad b = \frac{2r}{s} \quad \text{при} \quad \frac{r}{s} \le \frac{1}{2-\nu};$$

б) для $2 \le \nu \le 2\nu_*$:

$$2^{-2(\nu+1)rn/\nu} \asymp \delta, \quad a = \frac{(\nu-1)r}{\nu s}, \quad b = \frac{2r}{s}.$$

Тогда схема $(\Gamma_n^{a,b}, E)$ *принадлежит* $\mathcal{P}_{\delta,\nu,\rho}^{d}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S))$. *Оптимальная по порядку оценка погрешности* $d_1\rho^{1/(\nu+1)}\delta^{\nu/(\nu+1)}$ *достигается в рамках проекционного метода* $(R_\alpha, \Gamma_n^{a,b}, E)$, $R_\alpha \in \mathcal{R}'$.

***Замечание* 2.** Для достижения оптимальности требуется выбирать параметры a и b в зависимости от „дифференциальных" характеристик оператора решаемого уравнения, а также от гладкостных свойств искомого решения. Это в корне отличается от той ситуации, которая характерна для теории приближения, когда параметры гиперболического креста зависят лишь от гладкости аппроксимируемой функции.

***Замечание* 3.** Сравнение теорем А и 1, 2 показывает, что с точки зрения объема дискретной информации вида (4), требуемой для достижения оптимального порядка точности, ОПС (7) экономичнее традиционной галеркинской схемы при любых r, s и $\nu > 0$ — в случае $A \in \mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(D)$, а также при $\nu > 1$ — в случае $A \in \mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(S)$.

Укажем теперь, в каких ситуациях построенные выше ОПС реализуют точный порядок информационной сложности.

Теорема 3. *а) Если* $0 < \nu \le 1$, *то*

$$\mathrm{Card}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(D)) \asymp \delta^{-1/(\nu+1)s}, \quad 1+\nu < \frac{r}{s} < \infty,$$

$$c_1\,\delta^{-1/(\nu+1)s} \le \mathrm{Card}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(D)) \le c_2\,\delta^{-1/(\nu+1)s}\log(\delta^{-1}), \quad \frac{r}{s} = 1+\nu.$$

б) Если $1 \le \nu \le 2$, $\dfrac{2}{\nu} < \dfrac{r}{s} < \infty$ *и* $2 \le \nu < \infty$, $\dfrac{2\nu}{3\nu-2} < \dfrac{r}{s} < \infty$, *то*

$$\mathrm{Card}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(D)) \asymp \delta^{-\nu/(\nu+1)s}.$$

в) Если $1 \le \nu \le 2$, $\dfrac{r}{s} = \dfrac{2}{\nu}$ *и* $2 \le \nu < \infty$, $\dfrac{r}{s} = \dfrac{2\nu}{3\nu-2}$, *то*

$$c_3\,\delta^{-\nu/(\nu+1)s} \le \mathrm{Card}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(D)) \le c_4\,\delta^{-\nu/(\nu+1)s}\log(\delta^{-1}).$$

Оптимальный в степенной шкале порядок информационной сложности на классе уравнений (1), *с операторами* $A \in \mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(D)$ *и* $x_0 \in M_{\nu,\rho}(A)$ *реализуют проекционные методы, фигурирующие в формулировке теоремы* 1.

Теорема 4. *При* $\nu \ge 2$ *справедливы оценки*

$$\mathrm{Card}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(S)) \asymp \delta^{-\nu/(\nu+1)s}, \quad \frac{\nu}{\nu-1} < \frac{r}{s} < \infty,$$

$$c_5\,\delta^{-\nu/(\nu+1)s} \le \mathrm{Card}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(S)) \le c_6\,\delta^{-\nu/(\nu+1)s}\log(\delta^{-1}), \quad \frac{r}{s} = \frac{\nu}{\nu-1}.$$

Оптимальный в степенной шкале порядок информационной сложности на классе уравнений (1) *с операторами* $A \in \mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(S)$ *и* $x_0 \in M_{\nu,\rho}(A)$ *реализуют проекционные методы, фигурирующие в формулировке теоремы* 2.

***Замечание* 4.** Впервые точный порядок информационной сложности некорректных задач был получен в работе [23] при $\nu = 2$. Для произвольных $\nu > 1$ указанный результат был обобщен в [24]. Наконец, в случае $0 < \nu \le 1$ оптимальная оценка $\mathrm{Card}_{\delta,\nu,\rho}$ найдена в [25].

Приведем утверждения, содержащие точные порядковые оценки алгоритмической сложности решения некорректных задач.

Теорема 5 [24]. *Пусть в* (15) $q \ge \{\nu/2 - 1\}$.

а) Если $0 < \nu \le 1$ *и* $1 + \nu \le \dfrac{r}{s} < \infty$, *то*

$$\mathrm{Comp}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_{\gamma}^{r,s}(D)) \asymp \delta^{-1/(\nu+1)s}.$$

б) Если параметры ν, r *и* s *таковы, что точка* $\left(\nu, \frac{r}{s}\right)$ *принадлежит множеству*

$$[1,2] \times \left(\frac{4}{\nu}, \infty\right) \bigcup [2,6] \times \left(\frac{4\nu}{3\nu-2}, \infty\right) \bigcup [6,\infty] \times \left(\frac{3}{2}, \infty\right),$$

то

$$\mathrm{Comp}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D)) \asymp \delta^{-\nu/(\nu+1)s}.$$

в) Если параметры ν, r *и* s *таковы, что точка* $\left(\nu, \frac{r}{s}\right)$ *лежит на кривой*

$$(0,1] \times \{1+\nu\} \bigcup [1,2] \times \left\{\frac{4}{\nu}\right\} \bigcup [2,6] \times \left\{\frac{4\nu}{3\nu-2}\right\},$$

то

$$c_7 \delta^{-\min\{\nu,1\}/(\nu+1)s} \le \mathrm{Comp}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D)) \le$$

$$\le c_8 \delta^{-\min\{\nu,1\}/(\nu+1)s} \log^{1/s}(\delta^{-1}).$$

Оптимальный в степенной шкале порядок алгоритмической сложности на классе $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D)$ *реализует обобщенный метод Тихонова* (15), *построенный на базе проекционной схемы* $(\Gamma_n^{a,b}, E)$ *при условии, что параметры* a, b *и* n *выбраны согласно теореме* 1.

Теорема 6 [24]. *Пусть в* (15) $q \ge \{\nu/2 - 1\}$. *Если* $\nu \ge 2$, *то*

$$\mathrm{Comp}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S)) \asymp \delta^{-\nu/(\nu+1)s}, \quad \frac{r}{s} > \frac{2\nu}{\nu-1},$$

$$c_9 \delta^{-\nu/(\nu+1)s} \le \mathrm{Comp}_{\delta,\nu,\rho}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S)) \le$$

$$\le c_{10} \delta^{-\nu/(\nu+1)s} \log^{1/s}(\delta^{-1}), \quad \frac{r}{s} = \frac{2\nu}{\nu-1}.$$

Оптимальный в степенной шкале порядок алгоритмической сложности на классе $\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S)$ *реализует обобщенный метод Тихонова* (15), *построенный на базе проекционной схемы* $(\Gamma_n^{a,b}, E)$ *при условии, что параметры* a, b *и* n *выбраны согласно теореме* 2.

5. Рассмотрим теперь случай, когда оператор A в (1) является самосопряженным и неотрицательным. Положим

$$\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r(S) = \{A : A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,r}(S),\ A = A^* \ge 0\},$$

$$\hat{\mathcal{H}}_\gamma^r(D) = \{A : A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,r}(D),\ A = A^* \ge 0\}.$$

Поскольку при решении задачи (1), где $A = A^* \ge 0$, аппроксимирующий оператор A_Ω принято строить (см., например, [17, с. 31]) также самосопряженным (необязательно неотрицательным), то ограничимся ниже множеством $\hat{\mathcal{P}}_{\delta,\nu,\rho}^d(\hat{\mathcal{H}}) \subset \mathcal{P}_{\delta,\nu,\rho}^d(\hat{\mathcal{H}})$ проекционных схем с симметричными относительно биссектрисы областями Ω координатной плоскости, где $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_\gamma^r(S)$ или

$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\gamma}^{r}(D)$. При этом эффективность дискретизации уравнений (1), (8) будем исследовать с помощью величины

$$\widehat{\mathrm{Card}}_{\delta,\nu,\rho}(\hat{\mathcal{H}}) = \min\{\mathrm{card}(\Omega):\ (\Omega, E) \in \hat{\mathcal{P}}^{d}_{\delta,\nu,\rho}(\hat{\mathcal{H}})\}.$$

Класс регуляризаторов, задаваемых функцией от оператора решаемого уравнения, определим следующим образом. Пусть $\hat{\mathcal{G}} = \{g_\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$, — некоторое параметрическое семейство функций, измеримых по Борелю на отрезке $[-\gamma_0\alpha, c_*\gamma]$, $\gamma_0 > 0$, $c_* \ge 1$ (γ_0, вообще говоря, зависит от конкретной функции g_α) и при $0 \le \nu \le \hat{\nu}_*$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{-\gamma_0\alpha\le\lambda\le c_*\gamma} |\lambda|^{\nu}\,|1-\lambda g_\alpha(\lambda)| \le \hat{\kappa}_\nu \alpha^{\nu},$$
$$\sup_{-\gamma_0\alpha\le\lambda\le c_*\gamma} |g_\alpha(\lambda)| \le \hat{\kappa}_* \alpha^{-1}, \tag{16}$$

где $\hat{\nu}_*$, $\hat{\kappa}_\nu$ и $\hat{\kappa}_*$ — как и прежде, некоторые не зависящие от α положительные константы. Совокупность регуляризаторов вида $R_\alpha = g_\alpha(A)$, $g_\alpha \in \hat{\mathcal{G}}$, обозначим $\hat{\mathcal{R}}'$.

Пример. Пусть $q = 0, 1, 2, \ldots$. Согласно обобщенному методу Лаврентьева [22] уравнениям (1), (8) ставится в соответствие регуляризованное уравнение $(\alpha^{q+1}I + A^{q+1})x = A^{q}f_\delta$. Это метод регуляризации из $\hat{\mathcal{R}}'$ с функцией $g_\alpha(\lambda) = \dfrac{\lambda^q}{\alpha^{q+1} + \lambda^{q+1}}$, для которой выполнены условия (16) при $\hat{\nu}_* = q + 1$, $c_* = 1$ и любых $0 < \gamma_0 < 1$, $\gamma > 0$. В случае $q = 0$ получаем обычный метод Лаврентьева. В качестве других примеров регуляризаторов из $\hat{\mathcal{R}}'$ можно назвать известные итерационные процедуры Ландвебера, Факеева–Ларди и др. (подробнее об этом см. [22, 17]).

Рассмотрим еще одну обобщенную проекционную схему дискретизации, которая будет использована при решении операторных уравнений (1). В качестве Ω возьмем гиперболический крест вида

$$\Gamma^{a,b}_{n,l} = [1, 2^{l-1}] \times [1, 2^{bn-a(l-1)}] \times \bigcup_{k=l}^{n} (2^{k-1}, 2^{k}] \times [1, 2^{bn-ak}] \bigcup$$
$$\bigcup [1, 2^{bn-a(l-1)}] \times [1, 2^{l-1}] \bigcup_{k=l}^{n} [1, 2^{bn-ak}] \times (2^{k-1}\, 2^{k}], \tag{17}$$

где a и b — вещественные числа, n и l — натуральные числа, причем $a \ge 0$, $b - a \ge 1$, $1 \le l \le n$. В случае $a = 0$ множество $\Gamma^{a,b}_{n,l}$ вырождается в так называемый угол $[1, 2^{n}] \times [1, 2^{bn}] \cup [1, 2^{bn}] \times [1, 2^{n}]$, а при $a = 0$ и $b = 1$ получаем обычный галеркинский квадрат $[1, 2^{n}] \times [1, 2^{n}]$. Принципиально новым в (17) является случай $l > 1$, описывающий ситуацию, когда гиперболический крест усекается со всех сторон. В рамках настоящей работы при изучении $\Gamma^{a,b}_{n,l}$ с $l > 1$ ограничимся рассмотрением только таких a, которые строго больше 1. Тогда

$$\mathrm{card}(\Gamma^{a,b}_{n,l}) \asymp 2^{bn-al+l}. \tag{18}$$

В силу (18) очевидно, что для достижения минимума целевой функции

$\operatorname{card}(\Gamma_{n,l}^{a,b})$ (т. е. для вычисления наименьшего объема фигуры $\Gamma_{n,l}^{a,b}$) требуется найти минимальные значения параметров b и n, а также максимальные значения параметров a и l среди допустимых.

Согласно ОПС (Ω, E), где $\Omega = \Gamma_{n,l}^{a,b}$ (17), исходные коэффициенты задачи (1) заменяются конечномерными элементами

$$A_{\Gamma_{n,l}^{a,b}} = A_{a,b,n,l} =: \sum_{k=l}^{n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{bn-ak}} + P_{2^{l-1}} A P_{2^{bn-a(l-1)}} +$$

$$+ \sum_{k=l}^{n} P_{2^{bn-ak}} A (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) + P_{2^{bn-a(l-1)}} A P_{2^{l-1}} - P_{2^n} A P_{2^n}, \tag{19}$$

$$P_{\Gamma_{n,l}^{a,b}} f = P_{2^{bn-a(l-1)}} f =: \sum_{k=1}^{2^{bn-a(l-1)}} (e_k, f) e_k .$$

В следующем утверждении будут сконструированы экономичные ОПС вида (19), в рамках которых удается достичь оптимального порядка точности на рассматриваемых классах уравнений (1).

Теорема 7. *Пусть* $\alpha \asymp \delta^{1/(\nu+1)}$, *а параметры* a, b, n, l *проекционной схемы* $(\Gamma_{n,l}^{a,b}, E)$ *выбраны согласно правилам*:

а) для $1 \le \nu \le 2$:

$$2^{-3rn} n \asymp \delta, \quad a = 2, \quad b = 3, \quad l = \left[\frac{3n}{2(\nu+1)}\right];$$

б) для $2 \le \nu \le 2\nu_*$:

$$2^{-2(\nu+1)rn/\nu} \asymp \delta, \quad a = \frac{\nu}{\nu-1}, \quad b = \frac{2\nu-1}{\nu-1}, \quad l = \left[\frac{3n}{2(\nu+1)}\right].$$

Тогда схема $(\Gamma_{n,l}^{a,b}, E)$ *принадлежит* $\hat{\mathcal{P}}_{\delta,\nu,\rho}^{d}(\hat{\mathcal{H}}_{\gamma}^{r}(D))$. *Оптимальная по порядку оценка погрешности* $d_1 \rho^{1/(\nu+1)} \delta^{\nu/(\nu+1)}$ *достигается в рамках проекционного метода* $(R_\alpha, \Gamma_{n,l}^{a,b}, E)$, $R_\alpha \in \hat{\mathcal{R}}'$.

Оптимальность предложенных ОПС в смысле величины $\widehat{\operatorname{Card}}_{\delta,\nu,\rho}$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема 8. *Справедливы оценки*

$$c_{11} \delta^{-(2\nu+1)/2r(\nu+1)} \le \widehat{\operatorname{Card}}_{\delta,\nu,\rho}(\hat{\mathcal{H}}_{\gamma}^{r}(D)) \le$$

$$\le c_{12} \delta^{-(2\nu+1)/2r(\nu+1)} \log^{(2\nu+1)/2r(\nu+1)}(\delta^{-1}), \quad 1 \le \nu \le 2,$$

$$\widehat{\operatorname{Card}}_{\delta,\nu,\rho}(\hat{\mathcal{H}}_{\gamma}^{r}(D)) \asymp \delta^{-(2\nu+1)/2r(\nu+1)}, \quad \nu > 2.$$

Оптимальный в степенной шкале порядок информационной сложности реализуют проекционные методы, фигурирующие в формулировке теоремы 7.

Для второго модельного класса $\hat{\mathcal{H}}_{\gamma}^{r}(S)$ справедлива следующая теорема.

Теорема 9 [26]. *Пусть* $\nu = 2, 3, \ldots$. *Тогда справедливы оценки*

$$c_{13} \delta^{-1/r} \log(\delta^{-1}) \le \widehat{\operatorname{Card}}_{\delta,\nu,\rho}(\hat{\mathcal{H}}_{\gamma}^{r}(S)) \le c_{14} \delta^{-1/r} \log^{1+1/(2r)}(\delta^{-1}).$$

Оптимальный в степенной шкале порядок информационной сложности достигается при использовании проекционного метода (R_α, Ω, E), *где* R_α — *произвольный регуляризатор из* $\hat{\mathcal{R}}'$, $\hat{\nu}_* \ge \nu$, *а* $\Omega = \Gamma_{n,1}^{1,2}$ (17).

Замечание 5. Сравнение теорем 3, 4 и 8, 9 позволяет сделать следующее заключение: при дискретизации уравнений (1), (8) замена самосопряженного оператора A на самосопряженный конечномерный оператор A_Ω не является целесообразной в случае $\nu > 1$.

6. В предыдущих пунктах был рассмотрен случай априорного выбора параметра α. Очевидно, что такая ситуация возможна, если нам известно точное значение ν, определяющее класс $M_{\nu,\rho}(A)$, которому принадлежит нормальное решение (1). Но поскольку обычно эта информация либо отсутствует, либо неточна, то на практике применяется апостериорный выбор α, позволяющий автоматически достигать оптимального порядка точности для всех ν из некоторого интервала.

Один из наиболее используемых способов апостериорного выбора параметра регуляризации α носит название принципа невязки [27]. Следуя [22], рассмотрим дискретный вариант этого принципа. А именно, пусть $1 < b_1 \le b_2$ и $A_\Omega = P_m A P_l$, где $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S)$ (или $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D)$). Если $\|P_\Omega f_\delta\| \le b_1 \delta$, то в качестве приближенного решения x_{disc} уравнения (1) используем 0. В противном случае параметр $\alpha \ge \alpha_{\min} = (\gamma \beta_s l^{-s})^2$ выбираем так, чтобы

$$b_1 \delta \le \|P_\Omega f_\delta - A_\Omega x_{m,l,\alpha}\| \le b_2 \delta, \tag{20}$$

где $x_{m,l,\alpha} = P_\alpha(P_m A P_l) P_m f_\delta$, а R_α — произвольный регуляризатор из класса $\mathcal{R}'$. После этого полагаем $x_{\mathrm{disc}} = x_{m,l,\alpha}$. Если же не найдется $\alpha \ge \alpha_{\min}$, удовлетворяющего (20), то полагаем $\alpha = \alpha_{\min}$.

Следующая теорема позволяет оценить эффективность традиционного галеркинского подхода $(\Omega = [1, m] \times [1, l])$ к дискретизации некорректных задач (1) в случае неточного задания параметра ν.

Теорема B [22]. *Пусть в рамках метода Тихонова параметр* α *выбран согласно принципу невязки* (20). *Если уравнение принадлежит некоторому классу уравнений* (1), *где* $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}(S)$ (*или* $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D)$) *и* $x_0 \in M_{\nu,\rho}(A)$, *то при* $\nu \in (0, 1]$

$$\|x_0 - x_{\mathrm{disc}}\| \le c(\delta^{\nu/(\nu+1)} + m^{-\nu r} + l^{-\nu s}).$$

Из теоремы B вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Для обеспечения на рассматриваемом классе уравнений* (1) *оптимального порядка погрешности* $O(\delta^{\nu/(\nu+1)})$ *в рамках традиционной схемы требуется*

$$\mathrm{Card}([1, m] \times [1, l]) \asymp \delta^{-(1/r + 1/s)}.$$

Покажем теперь, что в описанной выше ситуации применение ОПС (6) позволяет не только уменьшить значение $\mathrm{Card}(\Omega)$ по порядку величины δ, но и достичь оптимального порядка информационной сложности. С этой целью рассмотрим оператор

$$A_\Omega = A_{\Gamma_{2n}^{r/s,\,2r/s}} = \sum_{k=1}^{2n} (P_{2^k} - P_{2^{k-1}}) A P_{2^{(2n-k)r/s}} + P_1 A P_{2^{2rn/s}}.$$

Для решения уравнения (1) воспользуемся регуляризатором Тихонова (см. (15))

и принципом невязки. А именно, предлагаемый проекционный метод состоит в следующем:

1) исходные данные: $A,\ f_\delta,\ \delta,\ \rho,\ r,\ s,\ \gamma$;

2) инициализация: $2^{-2nr} = 4\delta c_{r,\gamma,\rho}^{-1}$, $c_{r,\gamma,\rho} = 5\rho\gamma^2\beta_r^2(1+\sqrt{2}2^r)$, α_0, $0 < q < 1$, $b > 3 + \dfrac{4}{5(1+\sqrt{2}2^r)}$;

3) дискретизация: $(e_i, A e_j)$, $(i,j) \in \Gamma_{2n}^{r/s,2r/s}$, (e_k, f_δ), $k \in [1, 2^{2n}]$;

4) итерация:

а) $\alpha = \alpha_m = q^m \alpha_0$,

б) вычисляем элементы $x_{\alpha_m,n}^\delta$ как решения уравнений

$$\alpha_m x + A_\Omega^* A_\Omega x = A_\Omega^* f_\delta \tag{21}$$

согласно правилу останова

$$\|A_\Omega x_{\alpha_M,n}^\delta - P_{2^{2n}} f_\delta\| \le b\delta, \tag{22}$$

где $\|A_\Omega x_{\alpha_m,n}^\delta - P_{2^{2n}} f_\delta\| > b\delta$ для всех $m < M$;

5) полагаем $x_{\text{disc}} = x_{\alpha_M,n}^\delta$.

Теорема 10. *Для достаточно малых* δ *справедливы оценки*

$$c_{15}\delta^{-1/r} \le \operatorname{Card}_{\delta,\rho}(\mathcal{H}_\gamma^{r,r}(D)) \le c_{16}\delta^{-1/r}\log^{1+1/r}(\delta^{-1}),$$

$$\operatorname{Card}_{\delta,\rho}(\mathcal{H}_\gamma^{r,s}(D)) \asymp \delta^{-1/s}, \quad r > s.$$

Оптимальный в степенной шкале порядок информационной сложности реализуется в рамках описанного алгоритма (21), (22).

Преимущество предлагаемой схемы дискретизации по сравнению с традиционным подходом (см. следствие 1) очевидно.

Нам осталось рассмотреть задачу построения экономичных ОПС для второго модельного класса. Ограничимся случаем изотропной гладкости $r = s$. Улучшить оценку из следствия 1 удается за счет применения адаптивной дискретизации. Заметим, что в [28] уже был предложен адаптивный подход к дискретизации. При этом предполагалось дискретизировать оператор A согласно условию

$$\|A - A_\Omega\| \le c\sqrt{\alpha}\sqrt{\delta},$$

используя стандартную галеркинскую схему $A_\Omega = P_m A P_m$. Сравним теперь эффективность этого подхода к дискретизации с оптимальным неадаптивным методом Галеркина. Из теоремы В следует, что оптимальная галеркинская схема конструируется в соответствии с ограничением

$$\|A - A_\Omega\| \le c\delta.$$

Очевидно, что при достаточно малых α предложенная в [28] адаптивная стратегия не эффективна.

Предлагаемый ниже адаптивный подход к дискретизации основан на идее гиперболического креста, параметры которого выбираются согласно условию

$$\|A^* A - A_\Omega^* A_\Omega\| \le c\delta\sqrt{\alpha}\,.$$

Полагаем $A_\Omega = A_{\Gamma_{2n}^{1,1}}$, где $n = n(\alpha, \delta)$.

Итак, предлагаемый алгоритм состоит в комбинации регуляризатора Тихонова, метода невязки и адаптивной схемы дискретизации:

1) исходные данные: $A,\ f_\delta,\ \delta,\ \rho,\ r,\ \gamma$;

2) инициализация: $\alpha_0,\ 0<q<1,\ b>3$;

3) итерация:

а) $\alpha = \alpha_m = q^m \alpha_0$,

б) определение уровня дискретизации $n = n(\alpha, \delta)$

$$n2^{-2nr} = c_{r,\gamma,\rho}^{-1}\,\delta\sqrt{\alpha_m}\,, \quad c_{r,\gamma,\rho} = 2^{r+2}\gamma^3\rho\beta_r^2, \tag{23}$$

в) вычисление скалярных произведений

$$(e_i, A e_j),\ (i,j)\in \Gamma_{2n}^{1,1}, \quad (e_k, f_\delta),\ k\in[1, 2^{2n}], \tag{24}$$

необходимых для построения A_Ω,

г) находим элементы $x_{\alpha_m,n}^\delta$ как решения уравнений

$$\alpha_m x + A_\Omega^* A_\Omega x = A_\Omega^* f_\delta \tag{25}$$

согласно правилу останова

$$\|A_\Omega x_{\alpha_M,n}^\delta - P_{2^{2n}} f_\delta\| \le b\delta, \tag{26}$$

где $\|A_\Omega x_{\alpha_m,n}^\delta - P_{2^{2n}} f_\delta\| > b\delta$ для всех $m<M$;

4) полагаем $x_{\mathrm{disc}} = x_{\alpha_M,n}^\delta$.

Теорема 11. *Оптимальный порядок точности* $O(\delta^{\nu/(\nu+1)})$ *на классе уравнений* (1), *где* $A \in \mathcal{H}_\gamma^{r,r}(S)$ *и* $x_0 \in M_{\nu,\rho}(A)$, $0<\nu\le 1$, *реализуется в рамках алгоритма* (23) – (26). *При этом*

$$\operatorname{card}(\Gamma_{2n}^{1,1}) \asymp \delta^{-(\nu+2)/(\nu+1)r}\log^{2+1/r}(\delta^{-1}). \tag{27}$$

***Замечание* 6.** Из соотношения (27) при $\nu\to 0$ получаем следующую верхнюю оценку для $\operatorname{card}(\Gamma_{2n}^{1,1})$:

$$\delta^{-2/r}\log^{2+1/r}(\delta^{-1}).$$

Таким образом, предлагаемый подход не улучшает галеркинский метод на всем множестве нормальных решений. В то же время для каждого решения $x_0 \in M_{\nu,\rho}(A)$, $0<\nu\le 1$, адаптивная схема является более экономичной.

***Замечание* 7.** Эффективность описанной выше адаптивной схемы дискретизации при решении уравнений Вольтерра третьего рода со слабосингулярными ядрами установлена в работе [29].

1. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальных способах задания информации при решении дифференциальных уравнений // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1962. – **2**, № 4. – С. 569–592.
2. *Бабенко К. И.* О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами // Докл. АН СССР. – 1960. – **132**, № 2. – С. 247–250.

3. *Трауб Дж., Вожьняковский Х.* Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.
4. *Трауб Дж., Васильковский Г., Вожьняковский Х.* Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 183 с.
5. *Корнейчук Н. П.* Сложность аппроксимационных задач // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1683–1694.
6. *Korneichuk N. P.* On complexity of approximation problems // E. J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 251–273.
7. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. I // Укр. мат. журн. – 1988. – **40**, № 1. – С. 84–91.
8. *Переверзев С. В.* О сложности задачи нахождения решений уравнений Фредгольма II рода с гладкими ядрами. II // Там же. – 1989. – **41**, № 2. – С. 189–193.
9. *Переверзев С. В.* Гиперболический крест и сложность приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода с дифференциальными ядрами // Сиб. мат. журн. – 1991. – **32**, № 1. – С. 107–115.
10. *Pereverzev S., Scharipov C.* Information complexity of equations of second kind with compact operators in Hilbert space // J. Complex. – 1992. – **8**. – P. 176–202.
11. *Heinrich S.* Random approximation in numerical analysis // Func. Analysis. – 1994. – P. 123–171.
12. *Переверзев С. В., Азизов М.* Об оптимальных способах задания информации при решении интегральных уравнений с аналитическими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 656–665.
13. *Frank K., Heinrich S., Pereverzev S.* Information complexity of multivariate Fredholm integral equations in Sobolev classes // J. Complex. – 1996. – **12**. – P. 17–34.
14. *Frank K.* Optimal numerical solution of multivariate integral equations. – Aachen: Shaker Verlag, 1997. – 104 p.
15. *Солодкий С. Г.* Об информационной сложности некоторых классов операторных уравнений // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1271–1277.
16. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1986. – **128**. – С. 3–112.
17. *Вайникко Г. М., Веретенников А. Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. – М.: Наука, 1986. – 182 с.
18. *Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.
19. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 285 с.
20. *Гончарский А. В., Леонов А. С., Ягола А. Г.* Конечноразностная аппроксимация линейных некорректных задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1974. – **14**, № 1. – С. 15–24.
21. *Бакушинский А. Б.* Один общий прием построения регуляризующих алгоритмов для линейного некорректного уравнения в гильбертовом пространстве // Там. же. – 1967. – **7**, № 3. – С. 672–677.
22. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of projection methods for solving Ill-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57**. – P. 63–70.
23. *Pereverzev S. V., Solodky S. G.* The minimal radius of Galerkin information for the Fredholm problem of the first kind // J. Complex. – 1996. – **12**. – P. 176–202.
24. *Солодкий С. Г.* Информационная сложность проекционных алгоритмов решения уравнений Фредгольма I рода. II // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 6. – С. 838–844.
25. *Солодкий С. Г.* Оптимизация проекционных методов решения линейных некорректных задач // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1999. – **39**, № 2. – С. 195–203.
26. *Солодкий С. Г.* Оптимизация проекционных схем дискретизации некорректных задач // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1398–1410.
27. *Морозов В. А.* О выборе параметра при решении функциональных уравнений методом регуляризации // Докл. АН СССР. – 1967. – **175**, № 6. – С. 1225–1228.
28. *Maass P., Rieder A.* Wavelet-accelerated Tikhonov-regularization with applications // Inverse Problems in Med. Imaging / Ed. H. W. Engl, A. K. Louis and W. Rundell. – Vienna: Springer, 1997. – P. 134–158.
29. *Pereverzev S. V., Prössdorf S.* A discretization of Volterra integral equations of the third kind with weakly singular kernels // J. Inverse and Ill-Posed Problems. – 1998. – **5**. – P. 565–577.

Получено 24.09.99