УДК 519.1

Р. Ю. Евстафьев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ОБ АРТИНОВЫХ КОЛЬЦАХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ ЭНГЕЛЕВОСТИ

Let R be an Artinian ring, not necessarily with a unit element, and let R° be the group of all invertible elements of R under the operation $a \circ b = a + b + ab$. We prove that R° is a nilpotent group if and only if it is an Engel group and the ring R modulo its Jacobson radical is commutative. In particular, the group R° is nilpotent if it is weakly nilpotent or n-Engel for some positive integer n. We also establish that R is a strictly Lie-nilpotent ring if and only if R is an Engel ring and R modulo its Jacobson radical is commutative.

Нехай R — артінове кільце, необов'язково з одиницею, і R° — група оборотних елементів кільця R відносно операції $a \circ b = a + b + ab$. Доведено, що група R° тоді і тільки тоді нільпотентна, коли вона енгелева і фактор-кільце кільця R по його радикалу Джекобсона комутативне. Зокрема, R° нільпотентна, якщо вона слабко нільпотентна або n-енгелева для деякого додатного цілого числа n. Також встановлено, що кільце R строго Лі-нільпотентне тоді і тільки тоді, коли воно енгелеве і фактор-кільце кільця R по його радикалу Джекобсона комутативне.

1. Введение. Пусть R — ассоциативное кольцо, необязательно с единицей. Множество всех элементов кольца R образует полугруппу R^{ad} с единичным элементом 0 относительно операции *присоединенного умножения* $a \circ b = a + b + ab$ для всех элементов a и b из R. Группа всех обратимых элементов этой полугруппы называется *присоединенной группой* кольца R и обозначается через R°. Если R имеет единицу, то $1 + R^{\circ}$ совпадает с мультипликативной группой R^{*} кольца R и отображение $r \mapsto 1 + r$ для $r \in R^{\circ}$ является изоморфизмом R° на R^{*}.

Групповой коммутатор элементов r и s из R° будем обозначать через (r, s). Для элементов $r_1, \ldots, r_n \in R^{\circ}$ коммутатор $(r_1, \ldots, r_n)$ определяется по индукции $(r_1, \ldots, r_n) = ((r_1, \ldots, r_{n-1}), r_n)$ для каждого натурального $n \geq 3$. Также определим для произвольного натурального n коммутатор вида $(r, {}_n s) = (r, s, \ldots, s)$, где s повторяется n раз. Напомним, что группа G называется *нильпотентной,* если $(r_1, \ldots, r_n) = 0$ для всех $r_1, \ldots, r_n$ из G и некоторого n. Одними из главных обобщений понятия нильпотентности являются локальная нильпотентность и энгелевость. Говорят, что группа *локальна нильпотентна,* если все ее конечнопорожденные подгруппы нильпотентны. В этой работе мы также рассмотрим более широкий класс групп, в которых каждые два элемента порождают нильпотентную подгруппу. Такие группы В. Г. Виляцер [1] назвал *слабо нильпотентными.* Группа G называется *n-энгелевой,* если $(r, {}_n s) = 0$ для каждой пары элементов r и s из G. Если же последнее соотношение выполняется для любых элементов r и s при некотором n, зависящем от этих элементов, то группа называется *энгелевой.* Очевидно, что каждая слабо нильпотентная группа является энгелевой.

Известно, что существуют слабо нильпотентные группы, не являющиеся локально нильпотентными (см. [2]). В то же время, по-видимому, неизвестно, совпадают ли классы слабо нильпотентных и энгелевых групп. Отметим еще, что рядом авторов были найдены условия, при которых энгелева группа обязательно локально нильпотентна. Одним из таких условий является условие минимальности для подгрупп (В. Г. Виляцер [1]).

По аналогии с группами можно предположить, что если кольцо удовлетворяет некоторому условию минимальности (например, условию минимальности для правых идеалов), то из энгелевости присоединенной группы будет следовать ее локальная нильпотентность или даже нильпотентность. Заметим, что из выполнения в кольце условия минимальности для правых идеалов не следует, что присоединенная группа удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Напомним, что кольцо называется *артиновым справа* (*нетеровым справа*), если в этом кольце выполнено условие минимальности (условие максимальности) для правых идеалов. Везде в работе под артиновым (нетеровым) кольцом будем подразумевать артиново справа (нетерово справа) кольцо. Радикал Джекобсона и центр кольца R будем обозначать через $J(R)$ и $Z(R)$ соответственно. Кольцо R с единицей называется *локальным,* если фактор-кольцо $R/J(R)$ является телом. Отметим, что артиновы кольца с нильпотентной присоединенной группой детально исследовались в работах [3, 4]. В частности, в последней из них доказано, что в артиновом кольце R, порождаемом множеством $Z(R) + R^{\circ}$, присоединенная группа R° нильпотентна тогда и только тогда, когда R — прямая сумма конечного числа идеалов, каждый из которых является либо нильпотентным кольцом, либо локальным кольцом с нильпотентной мультипликативной группой. Как следствие, было установлено, что если артиново кольцо R порождается множеством $Z(R)+R^{\circ}$, то присоединенная группа R° нильпотентна в том и только в том случае, когда R нильпотентно как кольцо Ли.

В работе [5] (теорема 6.2) было показано, что энгелева присоединенная группа R° артинова кольца R нильпотентна, если фактор-кольцо $R/J(R)$ разложимо в прямую сумму полей, каждое из которых алгебраично над своим простым подполем. В настоящей работе этот результат обобщается на случай, когда фактор-кольцо артинова кольца по его радикалу Джекобсона коммутативно. Кроме того, доказывается, что из некоторой обобщенной нильпотентности присоединенной группы артинова кольца фактически следует ее нильпотентность.

Теорема А. *Пусть R — артиново кольцо и $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R. Присоединенная группа R° тогда и только тогда нильпотентна, когда она энгелева и фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно.*

Из теоремы А и леммы 2.5 непосредственно вытекает следующее утверждение.

***Следствие* А.** *Пусть R — артиново кольцо. Если присоединенная группа R° слабо нильпотентна или n-энгелева для некоторого натурального n, то она нильпотентна.*

Можно предположить, что условие коммутативности фактор-кольца $R/J(R)$ в теореме А не является существенным и, таким образом, имеет место следующая общая гипотеза относительно артиновых колец.

Гипотеза 1.1. *Если присоединенная группа артинова кольца удовлетворяет условию энгелевости, то она нильпотентна.*

Впрочем, рассуждения, используемые в настоящей работе, позволяют подтвердить эту гипотезу полностью в случае положительного ответа на следующий вопрос.

Вопрос 1.1. *Будет ли тело с энгелевой мультипликативной группой коммутативно?*

Среди работ в этом направлении отметим работу [6], в которой доказано, что тело со слабо нильпотентной мультипликативной группой коммутативно.

Каждое ассоциативное кольцо R может быть рассмотрено как кольцо Ли относительно операции $[a, b] = ab - ba$ для всех $a, b \in R$, которое называется *кольцом Ли, ассоциированным с* R. Заметим, что по аналогии с группами можно определить Ли-нильпотентные, n-энгелевы и энгелевы кольца, если в соответствующем определении групповой коммутатор заменить Ли-коммутатором. Кольцо R называется *локально Ли-нильпотентным,* если каждое конечнопорожденное подкольцо в R Ли-нильпотентно. Ясно, что в этом случае R локально нильпотентно как кольцо Ли. Также определим *слабо Ли-нильпотентные* кольца, т. е. кольца, в которых каждые два элемента порождают Ли-нильпотентное подкольцо. Заметим, что согласно результату Райли и Уилсона [7] каждое конечнопорожденное n-энгелево кольцо Ли-нильпотентно и, следовательно, каждое n-энгелево кольцо локально Ли-нильпотентно.

По аналогии с теоремой А можно предположить, что если артиново кольцо R удовлетворяет условию энгелевости и фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно, то R Ли-нильпотентно. Более того, ниже будет показано, что в этом случае кольцо R Ли-нильпотентно в более сильном смысле, а именно: пусть $\gamma^1(R) = R$ и $\gamma^{i+1}(R)$ — идеал, порожденный множеством $[\gamma^i(R), R]$ для каждого натурального $i \geq 1$. Говорят, что кольцо R *строго Ли-нильпотентно,* если $\gamma^n(R) = 0$ для некоторого n. Ясно, то если кольцо строго Ли-нильпотентно, то оно и Ли-нильпотентно. Обратное утверждение не всегда имеет место. Соответствующий пример был построен в работе [8].

Теорема B. *Пусть R — артиново кольцо и $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R. Кольцо R строго Ли-нильпотентно тогда и только тогда, когда оно энгелево и фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно.*

Из теоремы B и леммы 2.5 вытекает следующий результат.

***Следствие* B.** *Пусть R — артиново кольцо. Если кольцо R слабо Ли-нильпотентно или n-энгелево для некоторого натурального n, то оно строго Ли-нильпотентно.*

Впрочем, как показывает следующее утверждение, для артиновых колец понятия Ли-нильпотентности и строгой Ли-нильпотентности эквивалентны.

***Следствие* C.** *Пусть R — артиново кольцо. Кольцо R Ли-нильпотентно тогда и только тогда, когда R строго Ли-нильпотентно.*

Как и в случае теоремы А, можно выдвинуть гипотезу, что условие коммутативности фактор-кольца $R/J(R)$ является необязательным.

Гипотеза 1.2. *Если артиново кольцо удовлетворяет условию энгелевости, то оно строго Ли-нильпотентно.*

Отметим, что для ее доказательства в полном объеме необходимо ответить на следующий вопрос.

Вопрос 1.2. *Будет ли энгелево тело коммутативно?*

Ниже будет показано (см. лемму 2.4), что если кольцо с единицей слабо Ли-нильпотентно, то мультипликативная группа этого кольца обязательно слабо нильпотентна. Теперь, опираясь на работу [6], получаем, что каждое слабо Ли-нильпотентное тело коммутативно.

В работе [5] была поставлена следующая проблема: *будет ли артиново кольцо с энгелевой присоединенной группой Ли-нильпотентно?* Необходимо заметить, что в общем случае это утверждение неверно. Точнее, если артиново кольцо R с энгелевой присоединенной группой R° не порождается множеством $Z(R) + R^{\circ}$, то оно необязательно будет Ли-нильпотентным. В качестве примера можно рассмотреть кольцо верхнетреугольных (2×2)-матриц над полем из двух элементов. Если же это условие выполняется, то из теоремы А и результата, полученного автором [4] (следствие B), непосредственно вытекает следующее утверждение.

***Следствие* D.** *Пусть R — артиново кольцо, порожденное множеством $Z(R) + R^{\circ}$. Если присоединенная группа R° энгелева и фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно, то кольцо R Ли-нильпотентно.*

Отметим еще, что для полного решения указанной проблемы необходимо опять же ответить на вопрос 1.1.

Возвращаясь к вопросу о строении артиновых колец, сформулируем структурную теорему для Ли-нильпотентных колец.

Теорема C. *Пусть R — артиново кольцо. Кольцо R Ли-нильпотентно тогда и только тогда, когда R — прямая сумма конечного числа идеалов, каждый из которых является либо нильпотентным кольцом, либо Ли-нильпотентным локальным кольцом.*

Символ R всюду в работе будет обозначать ассоциативное кольцо, необязательно с единицей.

2. Доказательства теорем. Согласно теореме Грюнберга [9] каждая разрешимая энгелева группа является локально нильпотентной. Опираясь на этот факт и учитывая, что радикал Джекобсона артинова кольца нильпотентен, можно легко получить следующий результат. Пусть R — артиново кольцо и $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца R. Если присоединенная группа R° энгелева и фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно, то R° локально нильпотентна.

Для каждого подмножества S кольца R будем обозначать через $C_R(S)$ централизатор S в R, т. е. $C_R(S) = \{r \in R \mid rs = sr$ для каждого $s \in S\}$. Для аддитивных подгрупп V и W кольца R обозначим через $[V, W]$ аддитивную подгруппу в R, порожденную всеми Ли-коммутаторами $[v, w]$ для $v \in V$ и $w \in W$.

Лемма 2.1. *Пусть R — артиново кольцо, в котором фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно, и M — минимальный идеал в R. Если присоединенная группа R° энгелева, то она централизует M, и если R энгелево, то M содержится в центре кольца R.*

Доказательство. Пусть группа R° энгелева и фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно. Поскольку $M \cap J(R)$ является идеалом кольца R, вследствие минимальности M имеем либо $M \cap J(R) = 0$, либо $M \subseteq J(R)$. Предположим сначала, что $M \cap J(R) = 0$. Поскольку фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно, то $[M, R] \subseteq J(R)$. Кроме того, $[M, R] \subseteq M$ и, следовательно, $[M, R] = 0$, т. е. M содержится в центре кольца R.

Пусть теперь $M \subseteq J(R)$. Докажем, что в этом случае M содержится в центре группы R°. Предположим противное и пусть m и a — элементы соответственно из M и R° такие, что $ma \neq am$. Поскольку радикал Джекобсона $J(R)$ нильпотентен, то $MJ(R) = 0$. Действительно, вследствие минимальности M имеем либо $MJ(R) = M$, либо $MJ(R) = 0$. Если $MJ(R) = M$, то

$$M = MJ(R) = MJ(R)^2 = \ldots = MJ(R)^k = 0,$$

так как $J(R)^k = 0$ для некоторого числа k. Получили противоречие, поскольку идеал M ненулевой. Следовательно, $MJ(R) = 0$.

Далее, для каждого t из R централизатор $C_M(t)$ элемента t в M является идеалом в R. В самом деле, пусть $r \in R$ и $s \in M$. Из коммутативности фактор-кольца $R/J(R)$ вытекает, что $tr - rt \in J(R)$ и, следовательно, $(tr - rt)s = 0$. Более того, $r[s, t] = rst - rts = (rs)t - t(rs) + (tr - rt)s = [rs, t]$ и аналогично $[s, t]r = [sr, t]$. Таким образом, $x[s, t]y = [xsy, t]$ для любых элементов x и y из R, т. е. $C_M(t)$ — идеал. Вследствие минимальности M получим $C_M(a) = 0$.

Поскольку группа R° энгелева, существует наименьшее натуральное число n со свойством $(m, {}_{n+1}a) = 0$. Но тогда $(m, {}_n a) \in C_M(a)$ и, значит, $C_M(a) \neq 0$. Получили противоречие.

Пусть теперь R энгелево. Предположим, что M содержится не в центре. Тогда найдутся элементы $m \in M$ и $r \in R$ такие, что $mr \neq rm$. Как и выше, имеем $C_M(r) = 0$. Поскольку R энгелево, существует наименьшее натуральное число n со свойством $[m, {}_{n+1}r] = 0$. Но тогда $[m, {}_n r] \in C_M(r)$ и, следовательно, $C_M(r) \neq 0$. Получили противоречие.

Лемма доказана.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 2.2. *Пусть R — кольцо всех $(n \times n)$-матриц над телом D для $n \geq 1$. Если мультипликативная группа R^* m-энгелева для некоторого натурального m или слабо нильпотентна, то $n = 1$ и D коммутативно.*

Доказательство. Достаточно заметить, что мультипликативная группа кольца $(n \times n)$-матриц над телом D только тогда m-энгелева для некоторого натурального m или слабо нильпотентна, когда $n = 1$. Утверждения леммы вытекают из [10] (лемма 4.1) и [6] (замечание).

Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть R — ассоциативное кольцо. Если R удовлетворяет условию n-энгелевости для некоторого натурального n, то присоединенная группа R° m-энгелева для некоторого натурального m.*

Доказательство. См. [11] (теорема 3.2).

Лемма 2.4. *Пусть R — ассоциативное кольцо. Если R слабо Ли-нильпотентно, то присоединенная группа R° слабо нильпотентна.*

Доказательство. В самом деле, пусть r и s — произвольные элементы из R°. Обозначим через S подкольцо в R, порожденное этими элементами. Поскольку R слабо Ли-нильпотентно, то S Ли-нильпотентно. Если S не содержит единицу, то обозначим через $\mathfrak{S}$ кольцо, полученное присоединением формальной единицы к кольцу S, и $\mathfrak{S} = S$ — в противном случае. Как показали Н. Гупта и Ф. Левин [8], если ассоциативное кольцо с единицей Ли-нильпотентно, то его мультипликативная группа нильпотентна. Очевидно, кольцо $\mathfrak{S}$ Ли-нильпотентно и поэтому группа $\mathfrak{S}^*$ и, значит, группа $\mathfrak{S}^\circ$ нильпотентны. Кроме того, группа, порожденная элементами r и s, является подгруппой в $\mathfrak{S}^\circ$ и, следовательно, нильпотентна. Таким образом, каждая подгруппа в R°, порожденная двумя элементами, нильпотентна, т. е. группа R° слабо нильпотентна.

Лемма доказана.

Теперь покажем, что если присоединенная группа R° артинова кольца R (или само кольцо R) удовлетворяет некоторым обобщениям нильпотентности (Ли-нильпотентности), то фактор-кольцо $R/J(R)$ обязательно коммутативно.

Лемма 2.5. *Пусть R — артиново кольцо. Тогда в каждом из следующих четырех случаев фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно, и, следовательно, разложимо в прямую сумму полей*:

1) *присоединенная группа R° n-энгелева для некоторого натурального n*;
2) *присоединенная группа R° слабо нильпотентна*;
3) *кольцо R n-энгелево для некоторого натурального n*;
4) *кольцо R слабо Ли-нильпотентно.*

Доказательство. 1. Из теоремы Веддерберна – Артина следует, что $R/J(R) \cong S_1 \oplus \ldots \oplus S_k$, где S_i, $i = 1, \ldots, k$, — полное матричное кольцо над телом. Очевидно, что присоединенная группа фактор-кольца $R/J(R)$ изоморфна фактор-группе группы R° по нормальной подгруппе $J(R)^\circ$. Поэтому фактор-группа $R^\circ / J(R)^\circ$ изоморфна прямому произведению групп S_i°. Поскольку группа R° n-энгелева, группа S_i° и, значит, группа S_i^* n-энгелевы для каждого i. Теперь заметим, что в силу леммы 2.2 каждая простая компонента S_i является полем.

2. Рассуждая, как в п. 1, и применяя лемму 2.2, получаем требуемое утверждение.

3. Утверждение непосредственно следует из леммы 2.3 и п. 1.

4. Утверждение следует из леммы 2.4 и п. 2.

Напомним, что *аннулятором кольца* R называется множество всех элементов $a \in R$, для которых $aR = Ra = 0$. Следующее утверждение является следствием известных результатов о квазициклических подгруппах аддитивной группы артинова кольца (см., например, [12] (лемма 122.5, теорема 123.3)).

Лемма 2.6. *Если R — артиново кольцо и N — его аннулятор, то фактор-кольцо R/N нетерово.*

Через $\gamma_n(R^\circ)$ обозначим n-й член нижнего центрального ряда группы R°.

***Доказательство теоремы* A.** Пусть группа R° энгелева и фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно. Согласно лемме 2.6 в фактор-кольце $\overline{R} = R/N$ выполняется условие максимальности для правых идеалов.

Если $\overline{R} = 0$, то $R = N$ и, значит, R° — абелева группа. Предположим, что $\overline{R} \neq 0$. Поскольку $\overline{R}$ артиново и нетерово одновременно, то в кольце R существует композиционный ряд (см., например, [13], теорема 6.1.2)

$$R = L_0 \supsetneqq L_1 \supsetneqq \ldots \supsetneqq J(R) \supsetneqq \ldots \supsetneqq L_k \supsetneqq L_{k+1} = N,$$

в котором L_{n+1} — идеал, максимальный в L_n, $n = 0, \ldots, k$. Факторизуя по L_{n+1}, получаем, что L_n / L_{n+1} — минимальный идеал фактор-кольца R / L_{n+1}.

Теперь покажем, что группа $(R/L_{n+1})^\circ$ энгелева. Действительно, если идеал L_{n+1} содержит $J(R)$, то $R/L_{n+1} \cong (R/J(R)) \big/ (L_{n+1}/J(R))$. Поскольку фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно, то группа $(R/L_{n+1})^\circ$ абелева. Если же L_{n+1} лежит в $J(R)$, то, очевидно, имеем $(R/L_{n+1})^\circ \cong R^\circ / L_{n+1}^\circ$ и, значит, группа $(R/L_{n+1})^\circ$ энгелева.

Согласно лемме 2.1 каждый элемент из L_n / L_{n+1} перестановочен с каждым элементом из $(R/L_{n+1})^\circ$ и, значит, для каждого $r \in L_n^\circ$ и для каждого $s \in R^\circ$ имеем $(r, s) \in L_{n+1}^\circ$. Теперь легко видеть, что $\gamma_2(R^\circ) \subseteq L_1, \ldots, \gamma_{n+1}(R^\circ) \subseteq L_n$ для каждого n. Но тогда $\gamma_{k+3}(R^\circ) = 0$ и, следовательно, группа R° нильпотентна.

Теорема доказана.

***Доказательство следствия* A.** Поскольку n-энгелевы и слабо нильпотентные группы являются энгелевыми, утверждение следует из теоремы A и леммы 2.5.

***Доказательство теоремы* B.** Пусть кольцо R энгелево и фактор-кольцо $R/J(R)$ коммутативно. Если R совпадает с N, то кольцо R коммутативно. В противном случае в кольце R можно построить композиционный ряд

$$R = L_0 \supsetneqq L_1 \supsetneqq \ldots \supsetneqq L_k \supsetneqq L_{k+1} = N,$$

в котором L_{n+1} — идеал, максимальный в L_n, $n = 0, \ldots, k$. Кроме того, фактор L_n / L_{n+1} является минимальным идеалом фактор-кольца R/L_{n+1}.

Согласно лемме 2.1 идеал L_n / L_{n+1} содержится в центре кольца R/L_{n+1} и поэтому $[L_n, R] \subseteq L_{n+1}$ для каждого n. Поскольку $[R, R] \subseteq L_1$, то $\gamma^2(R) \subseteq$ $\subseteq L_1$. Аналогично получаем, что $\gamma^3(R) \subseteq L_2, \ldots, \gamma^{m+2}(R) \subseteq L_{m+1}$ для каждого натурального m. Но тогда $\gamma^{k+3}(R) = 0$ и, значит, кольцо R строго Ли-нильпотентно.

Теорема доказана.

***Доказательство следствия* B.** Поскольку n-энгелевы и слабо Ли-нильпотентные кольца являются энгелевыми, утверждение следует из теоремы B и леммы 2.5.

Напомним, что кольцо называется *прямо неразложимым,* если это кольцо нельзя представить в виде прямой суммы двух ненулевых идеалов. Идемпотенты 0 и 1 называются *тривиальными.*

Лемма 2.7. *Если кольцо R прямо неразложимо, то в центре кольца R лежат только тривиальные идемпотенты.*

Доказательство. Заметим, что если e — центральный идемпотент, то кольцо R разлагается в прямую сумму идеалов $R = eR \oplus V$, где $V = \{r - er \mid r \in R\}$. Поскольку R прямо неразложимо, то либо $eR = 0$, либо $V = 0$. В первом случае заключаем, что $e = 0$. Если же $V = 0$, то для каждого $r \in R$ имеем $r = re = er$ и, значит, e — единица кольца R.

Лемма доказана.

Следующий результат содержится в [14] (лемма 1.2).

Лемма 2.8. *Если кольцо R Ли-нильпотентно, то каждый идемпотент кольца R является центральным.*

***Доказательство теоремы* С.** Предположим, что кольцо R Ли-нильпотентно. Поскольку кольцо R артиново, оно является прямой суммой конечного числа прямо неразложимых колец

$$R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_n. \tag{2.1}$$

Далее, так как каждое кольцо R_i Ли-нильпотентно, то в силу лемм 2.7 и 2.8 оно содержит только тривиальные идемпотенты и поэтому является либо нильпотентным, либо локальным кольцом. Вследствие того что прямая сумма нильпотентных колец является опять нильпотентным кольцом, получаем утверждение теоремы.

Обратно, пусть кольцо R — прямая сумма конечного числа идеалов, каждый из которых является либо нильпотентным кольцом, либо Ли-нильпотентным локальным кольцом и имеет разложение (2.1). Ясно, что в этом случае кольцо R Ли-нильпотентно.

Теорема доказана.

1. *Виляцер В. Г.* К теории локально нильпотентных групп // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, № 2. – С. 163 – 168.
2. *Голод Е. С.* Некоторые проблемы бернсайдовского типа // Материалы Междунар. мат. конгр. – 1966. – С. 284 – 289.
3. *Groza G.* Artinian rings having a nilpotent group of units // J. Algebra. – 1989. – **121**, № 2. – P. 253 – 262.
4. *Евстафьев Р. Ю.* Артиновы кольца с нильпотентной присоединенной группой // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 3. – С. 417 – 426.
5. *Ishchuk Yu.* On associated groups of rings // London Math. Soc. Lect. Note Ser. – 2003. – **304**. – P. 284 – 293.
6. *Хузурбазар М. И.* Мультипликативная группа тела // Докл. АН СССР. – 1960. – **131**, № 6. – С. 1268 – 1271.
7. *Riley D. M., Wilson M. C.* Associative rings satisfying the Engel condition // Proc. Amer. Math. Soc. – 1999. – **127**, № 4. – P. 973 – 976.
8. *Gupta N., Levin F.* On the Lie ideals of a ring // J. Algebra. – 1983. – **81**, № 1. – P. 225 – 231.
9. *Gruenberg K. W.* Two theorems on Engel groups // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1953. – **49**. – P. 377 – 380.
10. *Amberg B., Sysak Ya.* Semilocal rings with n-Engel multiplicative group // Arch. Math. – 2004. – **83**. – P. 416 – 421.
11. *Amberg B., Sysak Ya.* Radical rings with Engel conditions // J. Algebra. – 2000. – **231**. – P. 364 – 373.
12. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2 т. – М.: Мир, 1977. – Т. 2. – 416 с.
13. *Каш Ф.* Модули и кольца. – М.: Мир, 1981. – 368 с.
14. *Bjork J.* Conditions which imply that subrings of artinian rings are artinian // J. reine Math. – 1971. – **247**. – P. 123 – 138.

Получено 17.08.2005,
после доработки — 21.04.2006