УДК 917.988

А. С. Миненко (Ин-т пробл. искусствен. интеллекта НАН Украины, Донецк)

О МИНИМИЗАЦИИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ФУНКЦИОНАЛА МЕТОДОМ РИТЦА

By using the variational method, we study a nonlinear problem in the case where the Bernoulli condition is given in the form of inequality on a free boundary. We prove the theorem on the solvability and establish the convergence of an approximate solution based on the Ritz method to the exact solution in certain metrics.

За допомогою варіаційного методу досліджено нелінійну проблему, коли на вільній межі задано умову Бернуллі у вигляді нерівності. Доведено теорему розв'язності. Встановлено збіжність наближеного розв'язку, що ґрунтується на методі Рітца, до точного розв'язку в деяких метриках.

В работах [1 – 6] изучается нелинейная гидродинамическая задача, когда на свободной границе задано условие типа Бернулли в виде неравенства. Анализ имеющихся по этой проблеме результатов и библиографию можно найти в работе [3]. В работах [7 – 10] изложен метод минимизации нелинейного функционала, появляющегося при решении теплофизической задачи типа Стефана. В настоящей работе эти результаты получили дальнейшее развитие при решении следующей гидродинамической задачи.

1. Постановка задачи. Пусть G — область, ограниченная снизу отрезком $A = (0 \le x \le a,\ y = 0)$, по бокам вертикалями $Q_1 = (x = 0,\ 0 \le y \le c)$, $Q_2 = (x = a,\ 0 \le y \le b)$ и сверху кривой $P: y = g(x)$, $0 \le x \le a$, где $c < b$, $g(0) = c$, $g(a) = b$. Относительно функции $g(x)$ предполагается, что $g(x) \in C^2[0, a]$ и кривая $y = g(x)$ имеет горизонтальные участки $\Gamma_1: y = c$ при $x \in [0, a_1]$, $\Gamma_2: y = b$ при $x \in [a_2, a]$, где числа a_1 и a_2 такие, что $a_1 < a_2$, и, кроме того, $g(x)$ — монотонно возрастающая кривая. Пусть, далее, $S: y = g(x)$ при $x \in [a_1, a_2]$ и γ — достаточно гладкая кривая, расположенная в $G \bigcup S$, причем одним концом γ является точка (a_1, c), а другим — (a_2, b). Через $G_\gamma \subset G$ будем обозначать односвязную область, ограниченную отрезками A, Q_1, Q_2 и кривой $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \gamma \bigcup \Gamma_2$.

Рассмотрим нелинейную краевую задачу со свободной границей γ. Требуется определить пару (ψ, γ), где $\psi(x, y)$ — функция тока, согласно следующим правилам: функция $\psi(x, y)$ в области G_γ удовлетворяет в классическом смысле уравнению

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = 0, \qquad (x, y) \in G_\gamma, \tag{1}$$

непрерывна в $\overline{G}_\gamma$, непрерывно дифференцируема в $\overline{G}_\gamma$, за исключением, возможно, угловых точек, и удовлетворяет условиям

$$\psi(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in A, \tag{2}$$

$$\psi_x(x, y) = 0, \qquad (x, y) \in Q_1 \bigcup Q_2, \tag{3}$$

$$\psi(x, y) = 1, \quad (x, y) \in \Gamma; \qquad \psi_x^2(x, y) + \psi_y^2(x, y) \ge \nu^2, \quad (x, y) \in \gamma \tag{4}$$

(здесь $\nu = \text{const} > 0$), причем на части γ, лежащей внутри G, всегда выполняется равенство.

Настоящая статья посвящена приближенному решению задачи (1) – (4) методом Ритца и исследованию сходимости приближений Ритца к решению задачи (1) – (4).

2. Теорема существования. Задача (1) – (4) эквивалентна проблеме минимума функционала

$$I(\psi, \gamma) = \iint\limits_{G_\gamma} (\psi_x^2 + \psi_y^2 + \nu^2)\, dx dy \tag{5}$$

на множестве R допустимых пар (ψ, γ), удовлетворяющих следующим условиям: γ — жорданова дуга, расположенная в $G \bigcup S$, концами которой являются точки (a_1, c) и (a_2, b), причем все точки γ, за исключением точки (a_1, c), расположены выше горизонтали $y = c$; функция $\psi(x, y)$ непрерывна в замыкании области G_γ, равна единице на Γ, нулю на отрезке A, имеет непрерывно дифференцируемые производные в G_γ, при этом $I(\psi, \gamma) < \infty$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

$$\nu b < 1, \qquad \nu \int\limits_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + g_x^2}\, dx + \frac{a - a_2}{b} > \frac{a - a_1}{c} \tag{6}$$

и $g(x) \in C^2[0, a]$, $g(x) = c$ *при* $x \in [0, a_1]$, $g(x) = b$ *при* $x \in [a_2, a]$, *где* $a_1 < a_2$, *и, кроме того,* $g(x)$ — *монотонно возрастающая кривая при* $x \in [0, a]$. *Тогда существует пара* (ψ, γ), *являющаяся решением задачи* (1) – (4) *и удовлетворяющая следующим условиям*: $\psi(x, y)$ — *функция, непрерывная в* $\overline{G}_\gamma$, *непрерывно дифференцируемая в* $\overline{G}_\gamma$, $\psi_y(x, y) > 0$ *в* G_γ; γ — *монотонно возрастающая кривая, аналитическая в окрестности каждой своей точки, лежащей внутри* G.

Доказательство. Пусть d — точная нижняя грань функционала (5) на множестве R. На основании вариационной природы задачи (1) – (4) с помощью метода симметризации Штейнера и внутренних вариаций Шиффера [11] устанавливается существование пары $(\psi, \gamma) \in R$, удовлетворяющей условиям (1) – (4) и такой, что $I(\psi, \gamma) = d$, $\psi \in C^2(G_\gamma) \bigcap C^1(\overline{G}_\gamma)$. Доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в работе [3] (см. теорему 1).

Покажем теперь, что область G_γ не может целиком совпадать с G. Предположим противное. Пусть G_γ совпадает с G. Тогда из формулы Грина следует

$$\iint\limits_G \Delta\psi\, dx dy = \int\limits_0^{a_1} \psi_y(x, c)\, dx + \int\limits_\gamma \frac{\partial \psi}{\partial n} ds + \int\limits_{a_2}^{a} \psi_y(x, b)\, dx - \int\limits_0^a \psi_y(x, 0)\, dx = 0.$$

Далее, справедливы представления

$$\psi(x, y) = (y - c)\alpha_1(x, y) + 1, \qquad (x, y) \in \Pi_1 = \{0 \le x \le a_1,\ c - \delta_1 \le y \le c\},$$

$$\psi(x, y) = y\alpha(x, y), \qquad (x, y) \in \Pi = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le \delta\},$$

$$\psi(x, y) = (y - b)\alpha_2(x, y) + 1, \qquad (x, y) \in \Pi_2 = \{a_2 \le x \le a,\ b - \delta_2 \le y \le b\},$$

где $\alpha(x, y)$, $\alpha_1(x, y)$ и $\alpha_2(x, y)$ — достаточно гладкие функции, а δ, δ_1 и δ_2 — некоторые малые величины. Тогда имеем

$$\int\limits_0^{a_1} \alpha_1(x, c)\, dx + \nu \int\limits_{a_1}^{a_2} \sqrt{1 + g_x^2}\, dx + \int\limits_{a_2}^{a} \alpha_2(x, b)\, dx = \int\limits_0^a \alpha(x, 0)\, dx.$$

Применив затем принцип максимума для гармонических функций, можно получить следующие оценки: $\alpha_1(x, c) \ge 1/c$ при $0 \le x \le a_1$, $\alpha_2(x, b) \ge 1/b$ при $a_2 \le x \le a$ и $\alpha(x, 0) \le 1/c$ при $0 \le x \le a$. Действительно, $\psi(x, y) - \psi_0(x, y) \le 0$ при $(x, y) \in \Pi_0 = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le c\}$, где $\psi_0(x, y) = y/c$. Тогда $\psi(x, y) -$

$-\psi_0(x, y) = (y-c)\alpha_1(x, y)+1-y/c$ при $x \in [0, a_1]$. Отсюда следует, что $\alpha_1(x, c) \geq 1/c$ при $0 \leq x \leq a_1$. Аналогичным образом получим другие оценки. Отсюда следует неравенство

$$\frac{a_1}{c} + \nu\int_{a_1}^{a_2}\sqrt{1+g_x^2}\,dx + \frac{a-a_2}{b} \leq \frac{a}{c},$$

которое противоречит второму из неравенств (6).

Наконец, с помощью метода внутренних вариаций Шиффера [11], аналогично тому, как это сделано в работе [12] (см. теорему 2), устанавливается аналитичность свободной границы γ. Построенное решение (ψ, γ) является единственным в силу результатов [13] в классе функций $\psi_y > 0$ в G_γ. Таким образом, теорема доказана.

***Замечание* 1.** Рассмотрим случай $a_1 = 0$, $a_2 = a$, тогда второе из неравенств (6) имеет вид

$$\nu c\int_0^a\sqrt{1+g_x^2}\,dx > a.$$

Решая теперь неравенство

$$\nu c[g(a) - g(0)] > a$$

относительно c, заключаем, что если величины $a-a_2$ и a_1 достаточно малы, а параметры a и c выбираются из условий

$$\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{a}{\nu}} < c < \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4}-\frac{a}{\nu}}, \qquad \nu b^2 \geq 4a,$$

то второе из неравенств (6) будет всегда выполняться.

3. Приближенное решение задачи (1) – (4). Согласно известной методике Фридрихса [13] представим функционал (5) в классе функций $\psi_y > 0$ в G_γ следующим образом:

$$I_1(z) = \iint_\Delta\left[\left(z_x + \frac{g_x}{g}z\right)^2 + \frac{1}{g^2} + \nu^2 z_\varphi^2\right]\frac{g}{z_\varphi}\,dx\,d\varphi, \tag{7}$$

где $\Delta = (0<x<a,\ 0<\varphi<1)$, $\varphi(x, z) = \psi(x, zg(x))$, а $z(x, \varphi)$ — решение уравнения $\varphi(x, z)-\varphi = 0$. Функционал (7) будем минимизировать на множестве допустимых функций

$$D_z = \left\{z:\ z \in C^1(\overline{\Delta}),\ z(a_1, 1) = 1,\ z(x, 0) = 0,\ \min_{(z,\varphi)\in\overline{\Delta}} z_\varphi > 0\right\}. \tag{8}$$

Далее, пусть $z_0(x, \varphi)$ — функция, соответствующая классическому решению (ψ, γ) задачи (1) – (4). Очевидно, что $z_0 \in D_z$ и $z_0(x, \varphi) \in W_2^1(\Delta)$.

Лемма 1. *Элемент* $z_0(x, \varphi)$ *доставляет наименьшее значение функционалу* (7) *на множестве* (8).

Доказательство. Из формулы Фридрихса [13] следует

$$I_1(z) = I_1(z_0) + \frac{d}{d\varepsilon}I_1(z_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} + \int_0^1(1-\varepsilon)\frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2}\,d\varepsilon, \tag{9}$$

где

$$\frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = 2\iint\limits_{\Delta} \left\{ \left[z_{0\varphi}\left(\delta z_x + \frac{g_x}{g}\delta z\right) - \delta z_\varphi\left(z_{0x} + \frac{g_x}{g} z_0\right)\right]^2 + \frac{\partial z_\varphi^2}{g^2} \right\} \frac{g}{z_{\varepsilon\varphi}^3}\, dx\, d\varphi, \quad (10)$$

z — произвольный элемент из D_z, $z_\varepsilon = z_0 + \varepsilon(z - z_0)$, $0 \le \varepsilon \le 1$. Второе слагаемое в правой части равенства (9), являющееся первой вариацией функционала (7), вычисленной на элементе z_0, неотрицательно [3]. Следовательно, элемент z_0 доставляет наименьшее значение функционалу (7) на множестве (8), так как $d^2 I_1(z_\varepsilon)/d\varepsilon^2$ — положительно определенный функционал на вариациях $\delta z = z - z_0$.

Лемма доказана.

В терминах функции $z(x, \varphi)$ задачу (1) – (4) можно записать следующим образом:

$$-\left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g}\frac{z}{z_\varphi}\right)'_x + \frac{1}{g^2}\left(\frac{1}{z_\varphi}\right)'_\varphi = 0, \qquad (x, \varphi) \in \Delta,$$

$$z(x, 0) = 0 \qquad x \in [0, a],$$

$$\left.\left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g}\frac{z}{z_\varphi}\right)\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g}\frac{z}{z_\varphi}\right)\right|_{x=a} = 0, \qquad \varphi \in [0, 1],$$

$$\left(\frac{z_x}{z_\varphi} + \frac{g_x}{g}\frac{z}{z_\varphi}\right)^2 + \frac{1}{g^2}\frac{1}{z_\varphi^2} \ge \nu^2, \qquad x \in [0, a], \qquad \varphi = 1.$$

Очевидно, что решение этой задачи будет зависеть от $g(x)$: $z = z(x, \varphi; g(x))$, $(x, \varphi) \in \overline{\Delta}$. Непосредственно проверяется, что при $g(x) = b$, $x \in [0, a]$, решением последней задачи является функция $z(x, \varphi) = \varphi$, $(x, \varphi) \in \overline{\Delta}$.

Будем минимизировать функционал (7) на множестве (8) с помощью сумм

$$z_n(x, \varphi; a_{kj}(g)) = z_n(x, \varphi; g) = z_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}(g)\, x^j \varphi^k, \qquad \sup_{1\le k\le m}(k + m_k) = n. \quad (11)$$

Выделим в пространстве E_r коэффициентов a_{kj} область допустимости D_r, где

$$r = \sum_{k=1}^{m}(m_k + 1), \qquad D_r = E_r^0 \cap G_r^+, \qquad E_r^0 : \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} a_1^j - 1 = 0,$$

$$G_r^+ = \left\{ a_{kj} : \min_{(x,\varphi)\in\overline{\Delta}} z_{n\varphi}(x, \varphi) > 0 \right\},$$

неизвестные коэффициенты a_{kj} и множитель Лагранжа λ определяются из нелинейной системы Ритца

$$\begin{gathered} \frac{\partial I_2(a_{kj})}{\partial a_{pq}} + \lambda a_1^q = 0, \qquad q = 0, 1, 2, \ldots, m_p, \qquad p = 1, 2, \ldots, m, \\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} a_1^j - 1 = 0, \qquad I_2(a_{kj}) = I_1\left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} x^j \varphi^k\right). \end{gathered} \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что функция $I_2(a_{kj})$ принимает свое наименьшее значение в некоторой внутренней точке a_{kj}^* множества D_r, лежащей на конечном расстоянии от начала координат пространства E_r [3]. Тогда в точке a_{kj}^* частные производные первого порядка соответствующей функции Лагранжа равны нулю. Следовательно, система уравнений (12) имеет решение.

Исследуем теперь зависимость коэффициентов Ритца a_{kj} от $g(x)$.

Лемма 2. *Пусть система Ритца имеет решение при некотором* $y = g_0(x) \in C^2[0, a]$. *Тогда решение* $a_{kj}(g)$, $\lambda(g)$ *системы* (12) *непрерывно зависит от* $g(x)$ *в некоторой окрестности элемента* $g_0(x)$.

Доказательство. Выберем размерность пространства E_r произвольным образом, обозначив левую часть системы уравнений (12) через $R_{pq}(a_{kj}, \lambda; g)$, а решение, соответствующее элементу $g_0(x)$, через a_{pq}, λ. Тогда имеют место следующие равенства:

$$R_{pq}(a_{kj}, \lambda; g_0) = 0, \quad g = 0, 1, 2, \ldots, m_p, \; p = 1, 2, \ldots, m, \quad R_{00}(a_{kj}, g_0) = 0,$$

где

$$R_{00}(a_{kj}, g_0) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=0}^{m_k} a_{kj} a_1^j - 1.$$

Положим также

$$L = \frac{\partial\big(R_{pq}(a_{kj}, \lambda, g_0),\ R_{00}(a_{kj}, g_0)\big)}{\partial(a_{\alpha\beta}, \lambda)}, \qquad L = \begin{pmatrix} b_{\alpha\beta} & 1 \\ a_1^{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$b_{\alpha\beta} = 2\iint_{\Delta}\left[\left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{g_x}{g}\frac{\partial z_n}{\partial a_{\alpha\beta}}\right)\left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{pq}} + \frac{g_x}{g}\frac{\partial z_n}{\partial a_{pq}}\right) z_{n\varphi}^2 - \right.$$

$$- \left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n\right)\left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{pq}} + \frac{g_x}{g}\frac{\partial z_n}{\partial a_{pq}}\right) z_{n\varphi}\frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{\alpha\beta}} -$$

$$- \left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n\right)\left(\frac{\partial z_{nx}}{\partial a_{\alpha\beta}} + \frac{g_x}{g}\frac{\partial z_n}{\partial a_{\alpha\beta}}\right) z_{n\varphi}\frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{pq}} +$$

$$\left. + \frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{\alpha\beta}}\frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{pq}}\left(z_{nx} + \frac{g_x}{g} z_n\right)^2 + \frac{1}{g^2}\frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{\alpha\beta}}\frac{\partial z_{n\varphi}}{\partial a_{pq}}\right]\frac{g\,dx\,d\varphi}{z_{n\varphi}^3}.$$

Квадратная матрица L имеет порядок $r+1$. Покажем, что $\det L \neq 0$. Предположим противное. Пусть $\det L = 0$. Тогда система линейных алгебраических уравнений

$$L\eta = 0$$

имеет ненулевое решение $\eta = (\eta_{00}, \eta_{\alpha\beta}) = (\eta_{00}, \eta_1)$, $\eta_1 = (\eta_{\alpha\beta})$. Умножая теперь систему линейных уравнений соответственно на $\eta_{\alpha\beta}$, η_{pq}, а затем производя суммирование по p, q, α и β, с учетом того, что

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=0}^{m_\alpha} \eta_{\alpha\beta} a_1^{\beta} = 0,$$

получаем выражение

$$\iint\limits_{\Delta}\left\{\left[z_{n\varphi}\left(z_x+\frac{g_x}{g}z\right)-z_\varphi\left(z_{nx}+\frac{g_x}{g}z_n\right)\right]^2+\frac{z_\varphi^2}{g^2}\right\}\frac{g}{z_{n\varphi}^3}\,dx\,d\varphi = 0,$$

где

$$z_n = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k} a_{kj}x^j\varphi^k, \qquad z = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k}\eta_{kj}x^j\varphi^k.$$

Выражение, стоящее слева, равно нулю тогда и только тогда, когда

$$z(x,\varphi) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k}\eta_{kj}x^j\varphi^k \equiv 0, \qquad (x,\varphi)\in\overline{\Delta}.$$

Отсюда следует, что $\eta_{\alpha\beta}=0$, $\beta=0,1,2,\ldots,m_\alpha$, $\alpha=1,2,\ldots,m$. Тогда из того, что $L\eta=0$, следует $\eta_{00}=0$. Таким образом, $\eta=(\eta_{00},\eta_{\alpha\beta})$ является нулевым решением системы линейных алгебраических уравнений. Получили противоречие. Следовательно, $\det L\neq 0$. Применяя теперь теорему о неявных функциях, завершаем доказательство леммы.

Итак, решив систему уравнений (12) при каждом n, можно затем построить последовательность приближений (11) в виде $z_n(x,\varphi;a_{kj}^*)=z_n^*$. Приближения z_n^* образуют минимизирующую последовательность для функционала (7) на множестве (8) (доказательство проводится аналогично тому, как это сделано в работе [3]).

Последовательность функций $z_n(x,\varphi)$ позволяет для задачи (1) – (4) приближенно найти свободную границу γ_n и линии уровня $y_n(x,c)$ функций $\psi_n(x,y)$, являющиеся линиями тока. Здесь значения постоянной величины c принадлежат промежутку $[0,1]$. При этом имеем

$$\gamma_n: y_n(x,1) = g(x)z_n(x,1) = g(x)\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k}a_{kj}x^j,$$

$$y_n(x,c) = g(x)z_n(x,c) = g(x)\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{m_k}a_{kj}x^jc^k,$$

где $n=\sup\limits_{1\le k\le m}(k+m_k)$, $c\in[0,1]$, (ψ_n,γ_n) — приближенное решение задачи (1) – (4).

4. Сходимость приближений Ритца z_n^* в $C(\overline{\Delta})$. Установим теперь сходимость приближенных решений (11), построенных по методу Ритца, к точному решению $z_0(x,\varphi)$, соответствующему решению (ψ,γ) задачи (1) – (4). Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть функция $z_0(x,\varphi)\in W_2^l(\Delta)$, где $l\ge 2$. Тогда можно построить допустимый многочлен*

$$u_n(x,\varphi) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{kj}x^j\varphi^k, \qquad n\le m,$$

такой, что

$$\|z_0-u_n\|^2_{W_2^1(\Delta)} = O\left(\frac{1}{n^{2(l-2)}}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Введем новые переменные (ξ,ζ) следующим образом:

$$x = 2a(\tau - t_2), \quad \cos\frac{\xi}{2} = 1 - \tau^2, \quad \varphi = 2(\theta - t_1), \quad \cos\frac{\zeta}{2} = 1 - \theta^2,$$

где t_1, t_2 — произвольные числа из интервала $(0, 1/2)$. Тогда прямоугольник Δ перейдет в прямоугольник $\Delta_1 = (\xi_1 < \xi < \xi_2,\ \zeta_1 < \zeta < \zeta_2)$, где

$$\xi_1 = 2\arccos\left(1 - t_2^2\right), \quad \xi_2 = 2\arccos\left[1 - \left(t_2 + \frac{1}{2}\right)^2\right],$$

$$\zeta_1 = 2\arccos\left(1 - t_1^2\right), \quad \zeta_2 = 2\arccos\left[1 - \left(t_1 + \frac{1}{2}\right)^2\right].$$

Положим теперь $z_0(x(\xi), \varphi(\zeta)) = u(\xi, \zeta)$. Очевидно, что $u(\xi, \zeta) \in W_2^l(\Delta_1)$. Продолжим затем функцию $u(\xi, \zeta)$ на прямоугольник $\Delta^* = (0 < \xi < \pi,\ 0 < \zeta < \pi)$ с сохранением класса [14] и обозначим продолженную функцию через $u^*(\xi, \zeta)$. Это продолжение всегда можно осуществить таким образом, чтобы функция u^* и все ее производные до порядка l включительно были равны нулю в некоторой приграничной полоске области Δ^*. Разложим функцию $u^*(\xi, \zeta)$ в ряд Фурье по косинусам:

$$u^*(\xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(\xi)\cos k\zeta, \quad b_k(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u^*(\xi, \zeta)\cos k\zeta\, d\zeta.$$

Положим

$$\sigma_n(\xi, \zeta) = \sum_{k=0}^{n} b_k(\xi)\cos k\zeta, \quad \rho_n(\xi, \zeta) = u^*(\xi, \zeta) - \sigma_n(\xi, \zeta)$$

и оценим интеграл

$$F(\rho_n) = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{\partial\rho_n}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho_n}{\partial\zeta}\right)^2 + \rho_n^2\right]d\xi\, d\zeta$$

с помощью равенства Парсеваля. Тогда получим

$$F(\rho_n) \le \frac{1}{(n+1)^{2(l-1)}}\left\|u^*\right\|^2_{W_2^l(\Delta^*)}.$$

Возвратимся затем к старым переменным (x, φ). Для этого рассмотрим функцию

$$R(x, \varphi) = z_0(x, \varphi) - S(x, \varphi) = \rho_n(\xi(x), \zeta(\varphi)), \quad (\xi, \zeta) \in \Delta_1,$$

где

$$S(x, \varphi) = \sigma_n(\xi(x), \zeta(\varphi)) = \sum_{k=0}^{n} b_k(\xi(x))\cos k\zeta(\varphi) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k(\xi(x))\cos\left\{2k\arccos\left[1 - \theta^2(\varphi)\right]\right\} = \sum_{k=0}^{4n} f_k(x)\varphi^k.$$

Далее, разложив функцию $\sigma_n(\xi, \zeta)$ в ряд Фурье по косинусам

$$\sigma_n(\xi, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(\zeta)\cos i\xi, \quad d_i(\zeta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sigma_n(\xi, \zeta)\cos i\xi\, d\xi$$

и вновь повторив выполненные выше преобразования, построим многочлен $Q_n(x, \varphi)$. Однако он может оказаться недопустимым. Поэтому представим его в виде

$$Q_n(x, \varphi) = T_n(x, \varphi) + p(x),$$

где

$$T_n(x, \varphi) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{kj} x^i \varphi^k, \qquad p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_{0i} x^i.$$

Тогда из оценок

$$\int_0^a p^2(x)\,dx = O\left(\frac{1}{n^{2(l-1)}}\right), \qquad \int_0^a \left(\frac{dp}{dx}\right)^2 dx = O\left(\frac{1}{n^{2(l-2)}}\right)$$

следует, что условие (13) выполняется и $T_n(x, 0) = 0$, $T_n(a_1, 1) = 1$; если последнее условие не выполняется, необходимо рассмотреть многочлен $\tilde{T}_n(x, \varphi) = T_n(x, \varphi) / T_n(a_1, 1)$. Полагая теперь $u_n(x, \varphi) = T_n(x, \varphi)$, можно для любого $\varepsilon > 0$ указать номер N степени многочлена $Q_n(x, \varphi)$, начиная с которого $\| z_0 - Q_n \|_{C^1(\overline{\Delta})} < \varepsilon$, а тогда и $\| z_0 - u_n \|_{C^1(\overline{\Delta})} < 2\varepsilon$. Поэтому $\min T_{n\varphi} > 0$ при $(x, \varphi) \in \overline{\Delta}$.

Лемма доказана.

Перейдем к исследованию сходимости приближений (11).

Теорема 2. *Пусть выполнены все предположения теоремы* 1 *и* $z_0(x, \varphi) \in W_2^l(\Delta)$, $l \geq 6$. *Тогда последовательность приближений Ритца* (11) *сходится к точному решению* $z_0(x, \varphi)$ *по норме в* $C(\overline{\Delta})$ *и* $W_2^1(\Delta)$.

Доказательство. Последовательность многочленов (11), коэффициенты которых удовлетворяют системе (12), образует минимизирующую последовательность z_n^* для функционала (7) на множестве (8). Следовательно, имеем

$$\varepsilon_n = I_1(z_n^*) - I_1(z_0) \to 0$$

при $n \to \infty$, так как, согласно лемме 1, элемент z_0 доставляет наименьшее значение функционалу $I_1(z)$ на множестве D_z.

Далее, для второй вариации функционала (10) справедлива оценка

$$\frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \leq \alpha \| \delta z \|^2_{W_2^1(\Delta)}$$

при некоторой постоянной α, когда $\delta z = z - z_0$, а z — произвольный элемент из D_z. Поэтому если $u_n(x, \varphi)$ — многочлен, определенный в лемме 3, то, используя формулу (9) и неотрицательность первой вариации функционала (7) на элементе z_0, получаем

$$\varepsilon_n = I_1(z_n^*) - I_1(z_0) \leq I_1(u_n) - I_1(z_0) = O\left(\frac{1}{n^{l-2}}\right),$$

так как

$$\left.\frac{dI_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{a_1}^{a} \left[\nu^2 - \left(\frac{z_{0x} + \dfrac{g_x}{g} z_0}{z_{0\varphi}} \right)^2 - \frac{1}{g^2 z_{0\varphi}^2} \right] g\, \delta z(x, 1)\, dx \leq \beta \| \delta z \|_{W_2^1(\Delta)}$$

при некоторой постоянной β и $z_\varepsilon = z_0 + \varepsilon(z_n^* - z_0)$. Затем опять используя формулу (9), получаем неравенство

$$\int_0^1 (1-\varepsilon)\frac{d^2 I_1(z_\varepsilon)}{d\varepsilon^2}d\varepsilon \le \varepsilon_n. \tag{14}$$

Применяя теперь теорему А. А. Маркова [15], согласно которой максимум модуля производной многочлена n-й степени на промежутке длины h не превышает произведения $2n^2/h$ на максимум модуля самого многочлена, получаем, полагая $\eta_n(x,\varphi) = z_n^*(x,\varphi) - z_0(x,\varphi)$, следующие оценки:

$$\max_{(x,\varphi)\in\bar\Delta} z_{\varepsilon\varphi}(x,\varphi) \le 2M_0 + 2\varepsilon n^2(A_0 + M_n),$$

где

$$A_0 = \max_{(x,\varphi)\in\bar\Delta} z_0(x,\varphi), \qquad M_0 = \max_{(x,\varphi)\in\bar\Delta} z_{0\varphi}(x,\varphi),$$

$$M_n = \max_{(x,\varphi)\in\bar\Delta}|\eta_n(x,\varphi)|, \qquad \max_{(x,\varphi)\in\bar\Delta} z_{n\varphi} \le 2(A_0 + M_n)n^2.$$

Тогда из неравенства (14) следует, что

$$\int_0^1 \frac{(1-\varepsilon)d\varepsilon}{b\left[2M_0 + 2\varepsilon n^2(A_0+M_n)\right]^3}\iint_\Delta \eta_{n\varphi}^2 dx d\varphi \le \int_0^1 (1-\varepsilon)\iint_\Delta \frac{\delta z_\varphi^2}{g z_{\varepsilon\varphi}^3} d\varepsilon dx d\varphi \le \frac{\varepsilon_n}{2},$$

где $\eta_n = \delta z = z_n^* - z_0$. Отсюда после интегрирования по ε вытекает оценка

$$\iint_\Delta \eta_{n\varphi}^2(x,\varphi)\,dx\,d\varphi \le \mu_n, \tag{15}$$

где

$$\mu_n = 8M_0^2 b\left[M_0 + n^2(A_0+M_n)\right]\varepsilon_n.$$

Используя теперь „неравенство Коши с ε“ и первое слагаемое в подынтегральном выражении (10), имеем

$$(1-\varepsilon_1)\iint_\Delta z_{0\varphi}^2\left(\eta_{nx} + \frac{g_x}{g}\eta_n\right)^2 dx\,d\varphi \le \frac{\mu_n}{cb} + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right)\iint_\Delta \eta_{n\varphi}^2\left(z_{0x} + \frac{g_x}{g}z_0\right)^2 dx\,d\varphi,$$

где ε_1 — некоторое достаточно малое число. Вновь применяя неравенство Коши и учитывая, что $\min z_{0\varphi} > 0$ при $(x,\varphi)\in\bar\Delta$, приходим к оценке

$$\iint_\Delta \eta_{nx}^2\,dx\,d\varphi \le R_1\iint_\Delta \eta_n^2\,dx\,d\varphi + R_2\iint_\Delta \eta_{n\varphi}^2\,dx\,d\varphi$$

при некоторых постоянных R_1 и R_2. Тогда из (14) и (15) следуют соотношения

$$\iint_\Delta \eta_n^2(x,\varphi)\,dx\,d\varphi \le c_1\mu_n, \qquad \iint_\Delta \eta_{nx}^2(x,\varphi)\,dx\,d\varphi \le c_2\mu_n, \tag{16}$$

где c_1 и c_2 — постоянные. Для завершения доказательства теоремы применим результаты Л. В. Канторовича относительно минимизации квадратичных функционалов методом Ритца (см. [15, с. 358 – 362; 16, с. 32 – 35]). При этом учтем порядок величины ε_n, если $l = 6$. Тогда получим неравенство

$$\sqrt{M_n} \;\le\; A_1\sqrt{\frac{1}{n^2}\ln n + \frac{1}{n^2}\ln M_n} \;+\; A_2\frac{1}{n}. \tag{17}$$

Здесь A_1 и A_2 — некоторые постоянные. Из последнего неравенства следует, что $M_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из неравенств (15) и (16) будет следовать утверждение теоремы.

***Замечание* 2.** В случае $g(x) = b$, $x \in [0, a]$, получаем $z_0(x, \varphi; b) = \varphi \in \in W_2^l(\Delta)$, $l \ge 6$, хотя на самом деле l может быть любым целым числом, т. е. имеем сходимость $z_n(x, \varphi; b)$ к $z_0(x, \varphi; b)$ по норме в $C(\overline{\Delta})$. Поскольку $z_n(x, \varphi; g)$ непрерывно зависит от $g(x) \in C^2[0, a]$ в некоторой окрестности элемента $g_0(x) = b$, предельная функция $z_0(x, \varphi; g)$ также будет непрерывно зависеть от $g(x)$ в этой же окрестности. Следовательно, и неравенство (17) сохранит смысл в некоторой малой окрестности $U(b; g)$ элемента $g_0(x) = b$. Итак, получим сходимость $z_n(x, \varphi; g)$ к $z_0(x, \varphi; g)$ по норме в $C(\overline{\Delta})$ для всех $g \in U(b; g)$.

1. *Миненко А. С.* О вариационном методе исследования одной нелинейной задачи потенциального течения жидкости // Нелинейные граничные задачи. – 1991. – Вып. 3. – С. 60 – 66.
2. *Миненко А. С.* Проблема минимума одного класса интегральных функционалов с неизвестной областью интегрирования // Мат. физика и нелинейная механика. – 1991. – Вып. 16. – С. 48 – 52.
3. *Миненко А. С.* Осесимметричное течение со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 477 – 488.
4. *Minenko A. S.* Axially symmetric flow // Fifth SIAM Conf. Optimization (Victotia, British Columbia, May 20 – 22, 1996). – Victoria, 1996. – P. 12.
5. *Миненко А. С.* О вариационном методе исследования одной задачи вихревого течения жидкости со свободной границей // Нелинейные граничные задачи. – 1993. – Вып. 5. – С. 58 – 64.
6. *Миненко А. С.* О вариационном методе исследования одной нелинейной задачи потенциального течения жидкости // Там же. – 1991. – Вып. 3. – С. 60 – 66.
7. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О методе Ритца в одной нелинейной задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – № 4. – С. 291 – 294.
8. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* Об одной вариационной теплофизической задаче со свободной границей // Сб. докладов конференции по смешанным граничным задачам для дифференциальных уравнений с частными производными и задачам со свободными границами (Штутгарт, 5 – 10 сент. 1978 г.). – Штутгарт, 1978. – С. 9 – 18.
9. *Миненко А. С.* Об одной теплофизической задаче со свободной границей // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 6. – С. 413 – 416.
10. *Данилюк И. И., Миненко А. С.* О вариационном методе изучения квазистационарной задачи Стефана // Успехи мат. наук. – 1981. – **43**, № 5. – С. 228.
11. *Garabedian P. R., Lewy H., Schiffer M.* Axially symmetric cavitational flow // Ann. Math. – 1952. – **56**, № 3. – P. 560 – 602.
12. *Миненко А. С.* Аналитичность свободной границы в одной задаче осесимметричного течения // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 12. – С. 1692 – 1700.
13. *Friedrichs K. O.* Uber ein Minimumproblem fur Potentialstromungen mit freiem Rande // Math. Ann. – 1933. – **109**. – P. 60 – 82.
14. *Бабич В. М.* К вопросу о распространении функций // Успехи мат. наук. – 1953. – **8**, № 2. – С. 111 – 113.
15. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – М.: Физматгиз, 1962. – 708 с.
16. *Власова З. А.* О методе приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1959. – **53**. – С. 16 – 37.

Получено 14.06.2005,
после доработки — 07.10.2005