УДК 517.982

В. А. Літовченко (Чернів. нац. ун-т)

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ЦІЛИМИ АНАЛІТИЧНИМИ СИМВОЛАМИ

By using functions convex downwards, we describe a class of pseudodifferential systems with integer analytic symbols, which contains Eidelman-parabolic systems of partial differential equations with continuous time-dependent coefficients. We prove a theorem on the correct solvability of the Cauchy problem for such systems in the case where initial data are generalized functions. We also establish the principle of localization of a solution of this problem.

Завдяки опуклим донизу функціям описано клас псевдодиференціальних систем з цілими аналітичними символами, який містить у собі параболічні за С. Д. Ейдельманом системи диференціальних рівнянь з частинними похідними з неперервними, залежними від часу коефіцієнтами. Доведено теорему про коректну розв'язність задачі Коші для таких систем у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями, а також встановлено принцип локалізації розв'язку цієї задачі.

1. Вступ. Поява псевдодиференціальних операторів (ПДО) (як результат узагальнення звичайних диференціальних операторів) спонукає до розширення класу систем диференціальних рівнянь з частинними похідними псевдодиференціальними системами. Таке розширення, у свою чергу, дозволяє доповнити множину параболічних систем диференціальних рівнянь тими псевдодиференціальними системами, для яких дійсні частини характеристичних коренів є від'ємними (в області задання) і обмежені, взагалі кажучи, не обов'язково параболічними функціями (під характеристичними коренями псевдодиференціальної системи розумітимемо власні значення відповідної матриці, складеної з символів ПДО цієї системи). Отже, виникає новий клас систем, при вивченні задачі Коші для яких природно скористатися розвиненою на сьогодні методикою дослідження задачі Коші для параболічних систем диференціальних рівнянь з частинними похідними (див., наприклад, [1 – 8]).

У даній роботі, завдяки опуклим донизу функціям, описується клас систем псевдодиференціальних рівнянь із залежними від часу аналітичними символами, який містить у собі $2\vec{b}$-параболічні (а отже, й параболічні за Петровським) системи з неперервними залежними від часу коефіцієнтами. Дійсні частини характеристичних коренів цих систем підпорядковано спеціальній умові, що накладає обмеження на їх поведінку в комплексному просторі (фактично ця умова є класичною умовою параболічності для диференціальних систем з частинними похідними).

Для таких систем вивчаються властивості фундаментальної матриці розв'язків (ф. м. р.) та досліджується коректна розв'язність задачі Коші у випадку, коли початкові дані є узагальненими функціями типу ультрарозподілів Жевре. Для окремого випадку систем знайдено сукупність усіх початкових узагальнених функцій, при яких розв'язок відповідної задачі Коші за просторовою змінною має такі ж властивості гладкості і поведінку в околі нескінченно віддалених точок, що і ф. м. р. Цей результат одержано завдяки критерію мультиплікатора у просторах Б. Л. Гуревича (відомих як простори типу W [9]), сформульованого тут з використанням матриканта системи в образах Фур'є.

Для встановлення принципу локалізації розв'язку задачі Коші шляхом розширення простору типу W (якому належать елементи ф. м. р.) будується допоміжний простір основних функцій так, щоб серед його елементів були вже фінітні функції (наявність таких функцій потребує класичне означення рівності двох узагальнених функцій, що є важливим для встановлення цього принципу). Доводиться теорема про локальне підсилення збіжності розв'язку задачі Коші при прямуванні часової змінної до нуля у випадку, коли узагальнена початкова функція має достатню (локальну) гладкість.

1. Необхідні відомості. Постановка задачі. Нехай T_0 — довільне фіксоване число з $(0;+\infty)$, $\mathbf{C}$ — множина комплексних чисел; $\mathbf{R}^n$ — n-вимірний евклідів простір, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ — його елементи (вектори), $(x,y)=\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$ — скалярний добуток у $\mathbf{R}^n$, $\|x\|^2=(x,x)$, $C^\infty(\mathbf{L})$ — простір усіх нескінченно диференційовних функцій, визначених на множині $\mathbf{L}$; S — простір Л. Шварца [10], а $\omega_j(\cdot)$ — зростаючі неперервні функції на $[0;+\infty)$, причому $\omega_j(0)=0$ і $\lim\limits_{t\to+\infty}\omega_j(t)=+\infty$, $j=\overline{1,n}$. Для $t\ge 0$ покладемо $\Omega_j(t)=\int_0^t \omega_j(\xi)d\xi$, $j=\overline{1,n}$. При кожному $j\in\{1,\ldots,n\}$ функція $\Omega_j(\cdot)$ має такі властивості (див. [1] та лему 1 з [11]): 1) вона диференційовна, зростаюча на $[0;+\infty)$; 2) $\Omega_j(0)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\Omega_j(t)=+\infty$; 3) $\Omega_j(\cdot)$ — опукла (донизу) функція, тобто: а) $\forall\{t_1;t_2\}\subset$ $\subset[0;+\infty)$: $\Omega_j(t_1)+\Omega_j(t_2)\le\Omega_j(t_1+t_2)$; б) $\forall\delta\ge 1\ \forall t\in[0;+\infty)$: $\Omega_j(\delta t)\ge\delta\Omega_j(t)$; в) $\forall\delta\in(0;1)\ \forall t\in[0;+\infty)$: $\Omega_j(\delta t)\le\delta\Omega_j(t)$. Довизначимо $\Omega_j(\cdot)$, $j=\overline{1,n}$, на $(-\infty;0)$ парним чином і покладемо $\Omega(x)\overset{\text{df}}{=}\{\Omega_1(x_1),\ldots,\Omega_n(x_n)\}$, $x\in\mathbf{R}^n$.

Поряд з Ω, подібним чином, за функціями $\mu_j(\cdot)$ з такими ж властивостями, що й $\omega_j(\cdot)$, $j=\overline{1,n}$, визначимо вектор-функцію $M(x)\overset{\text{df}}{=}\{\mathrm{M}_1(x_1),\ldots,\mathrm{M}_n(x_n)\}$, $x\in$ $\in\mathbf{R}^n$, і розглянемо простір W_Ω^{M}, тобто сукупність усіх цілих аналітичних функцій φ на $\mathbf{C}^n=\mathbf{C}\times\ldots\times\mathbf{C}$ таких, що

$$\left|\varphi(x+iy)\right|\le c\exp\left\{Q^-(\delta_1,\delta_2;x,y)\right\},\quad (x+iy)\in\mathbf{C}^n,$$

де c, δ_1, δ_2 — додатні сталі, залежні лише від φ, а

$$Q^\pm(\delta_1,\delta_2;x,y)\overset{\text{df}}{=}\sum_{j=1}^{n}\left(\pm\Omega_j(\delta_1 x_j)+\mathrm{M}_j(\delta_2 y_j)\right).$$

Як зазначено в [1], W_Ω^{M} — об'єднання повних, досконалих, зліченно-нормованих просторів, причому послідовність $\{\varphi_v,\ v\ge 1\}\subset W_\Omega^{\mathrm{M}}$ збігається у цьому просторі до функції φ з W_Ω^{M} (позначатимемо $\varphi_v\xrightarrow[v\to+\infty]{W_\Omega^{\mathrm{M}}}\varphi$ тоді і тільки тоді, коли: 1) $\varphi_v(z)\xrightarrow[v\to+\infty]{}\varphi(z)$ рівномірно по z на кожному компакті $\mathbf{K}$ з $\mathbf{C}^n$; 2) $\exists\{c,\delta_1,\delta_2\}\subset(0;+\infty)\ \forall v\ge 1\ \forall z=x+iy\in\mathbf{C}^n:\ \left|\varphi_v(z)\right|\le$ $\le c\exp\left\{Q^-(\delta_1,\delta_2;x,y)\right\}$.

Далі вважатимемо, що компоненти вектор-функції Ω окрім зазначених властивостей мають ще і таку:

$$\Omega_j(\delta t)\ge g_1(\delta)\Omega_j(t)+g_2(\delta),\qquad\delta\in(0;1),\quad t\in\mathbf{R},$$

де $g_1(\cdot)$, $g_2(\cdot)$ — деякі обмежені на $(0;1)$ функції, не залежні від $j=\overline{1,n}$, причому перша з них додатна; а Ω', M' — вектор-функції, з якими Ω та M взаємо двоїсті за Юнгом [1].

Нехай Φ — простір основних функцій. Позначимо через Φ' простір, топологічно спряжений до Φ; Φ^m, $(\Phi')^m$ — декартові степені (з натуральним показником m) просторів Φ і Φ' з покомпонентною збіжністю відповідно у Φ та Φ'; $\mathrm{P}\Phi^m$ — множина всіх квадратних матриць порядку m, стовпцями яких є елементи з Φ^m (також з поелементною збіжністю у просторі Φ), і $\Lambda_\Omega^{\mathrm{M}}([0;T_0])$ — сукупність усіх функцій $a\colon [0;T_0]\times \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}$ таких, що:

1) $a(t,\cdot)\in C^\infty(\mathbf{C}^n)$ $(\forall t\in[0;T_0])$;

2) $\exists\{\delta;c\}\subset[0;+\infty)$ $(\forall t\in[0;T_0])$ $0<\varepsilon<<1$ $\exists v(\varepsilon)>0$, $v(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to+0]{}\xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 0$, $\forall \Delta t\in[0;\varepsilon]$ $\forall z=x+iy\in\mathbf{C}^n$: $\big|a(t+\Delta t,z)-a(t,z)\big|\le v(\varepsilon)\big(Q^+(1,\delta;x,y)+c\big)$;

3) $\exists\{\delta_1;\delta_2;c\}\subset[0;+\infty)$ $\forall z=x+iy\in\mathbf{C}^n$: $\sup\limits_{t\in[0;T_0]}|a(t,z)|\le Q^+(\delta_1,\delta_2;x,y)+c$.

Будемо говорити, що вектор-функція $\psi(\cdot)=\big\{\psi_1(\cdot),\ldots,\psi_m(\cdot)\big\}$ — мультиплікатор у просторі Φ^m, якщо: 1) $\forall P\in\mathrm{P}\Phi^m$: $P\psi^T\in{\Phi^m}^T$; 2) $\forall\{P;P_v,v\ge1\}\subset\mathrm{P}\Phi^m$, $P_v\xrightarrow[v\to+\infty]{\mathrm{P}\Phi^m}P$: $P_v\psi^T\xrightarrow[v\to+\infty]{{\Phi^m}^T}P\psi^T$, де індекс T позначає операцію транспонування, причому під транспонуванням векторного простору розумітимемо транспонування всіх елементів цього простору.

Вектор f з $(\Phi')^m$ назвемо згортувачем у просторі Φ^m, якщо:

1) $(P*f)(\cdot)=\Big(\sum_{j=1}^m\big\langle f_j(\xi),p_{ij}(\cdot-\xi)\big\rangle\Big)_{i=1}^m\in{\Phi^m}^T$ $(\forall P\in\mathrm{P}\Phi^m)$;

2) $\forall\{P;P_v,v\ge1\}\subset\mathrm{P}\Phi^m$, $P_v\xrightarrow[v\to+\infty]{\mathrm{P}\Phi^m}P$: $P_v*f^T\xrightarrow[v\to+\infty]{{\Phi^m}^T}P*f^T$ (тут кутовими дужками $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначено дію функціонала, а $*$ — операція згортки).

Через $A_{\mathcal{A}_t}=(A_{a_{ij}})_{i,j=1}^m$ позначимо матричний псевдодиференціальний оператор у просторі $(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'})^{m^T}$ з параметром $t\in[0;T_0]$, побудований за матрицею-символом $\mathcal{A}_t(\cdot)=\big(a_{ij}(t,\cdot)\big)_{i,j=1}^m$, кожен елемент якої належить класу $\Lambda_\Omega^{\mathrm{M}}([0;T_0])$, тобто оператор, дія якого на елементах φ з $(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'})^{m^T}$ при кожному фіксованому t з $[0;T_0]$ задається таким чином:

$$(A_{\mathcal{A}_t}\varphi)(t,\cdot)=\left\{\sum_{j=1}^m(A_{a_{1j}}\varphi_j)(t,\cdot),\ldots,\sum_{j=1}^m(A_{a_{mj}}\varphi_j)(t,\cdot)\right\}^T,$$

де $(A_{a_{ij}}\varphi_j)(t,\cdot)=F^{-1}\big[a_{ij}(t,\xi)F[\varphi_j](\xi)\big](t,\cdot)$, а F, F^{-1} — відповідно пряме та обернене перетворення Фур'є [12].

Оскільки $F[W_\Omega^{\mathrm{M}}]=W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}$, причому оператор F відображає W_Ω^{M} у $W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}$ взаємно однозначно і неперервно [1], а елементи з класу $\Lambda_\Omega^{\mathrm{M}}([0;T_0])$ є мультиплікаторами у просторі W_Ω^{M} при кожному фіксованому t з $[0;T_0]$, то оператор $A_{\mathcal{A}_t}$, $t\in[0;T_0]$, неперервно переводить простір $\big(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\big)^{m^T}$ у себе.

Розглянемо систему

$$\partial_t U(t,x)=(A_{\mathcal{A}_t}U)(t,x),\quad (t,x)\in(0;T_0]\times\mathbf{R}^n,\tag{1}$$

де $U=\{u_1,\ldots,u_m\}^T$. Припустимо, що для (1) виконується аналог рівномірної по t умови параболічності:

$$\exists\{\delta_1^*;\delta_2^*\}\subset(0;+\infty)\quad\exists c^*\in\mathbf{R}\quad\forall t\in(0;T_0]\quad\forall\xi=\zeta+i\eta\in\mathbf{C}^n:$$
$$\max_{j=\overline{1,m}}\operatorname{Re}\lambda_j(t,\xi)\le Q^-(\delta_1^*,\delta_2^*;\zeta,\eta)+c^*, \tag{2}$$

де λ_j, $j=\overline{1,m}$, — власні значення матриці $\mathcal{A}_t$ — символу оператора $A_{\mathcal{A}_t}$.

Наведемо приклади системи (1), для якої виконується умова (2).

1°. Параболічні за С. Д. Ейдельманом (тобто $2\vec{b}$-параболічні) системи диференціальних рівнянь з частинними похідними з неперервними коефіцієнтами, залежними лише від часу. У цьому випадку

$$\Omega(x)=\Big\{(x_1)^{2b_1},\ldots,(x_n)^{2b_n}\Big\},\qquad \mathrm{M}(y)=\Big\{(y_1)^{2b_1},\ldots,(y_n)^{2b_n}\Big\},\quad \{x;y\}\subset\mathbf{R}^n,$$

де b_j, $j=\overline{1,n}$, — натуральні компоненти вектора $\vec{b}$; а елементами класу $\Lambda_\Omega^{\mathrm{M}}([0;T_0])$ є вирази вигляду $\sum_{k_j\le 2b_j,\ j=\overline{1,n}}p_k(t)(-i\xi)^k$ з неперервними функціями $p_k(\cdot)$ на $[0;T_0]$ $\Big($тут $\xi^k=\prod_{j=1}^n\xi_j^{k_j}$, $\xi\in\mathbf{R}^n$, $k\in\mathbf{Z}^n\Big)$.

2°. Нехай B_φ — оператор диференціювання нескінченного порядку в просторі $W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}$, побудований за функцією $\varphi(\xi)=\sum_{|k|=0}^{\infty}c_k\xi^k$, $\xi\in\mathbf{C}^n$, з класу $\mathrm{P}_\Omega^{\mathrm{M}}$ — сукупності цілих однозначних функцій $\varphi\colon\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}$, які є мультиплікаторами в W_Ω^{M} і такі, що $e^\varphi\in W_\Omega^{\mathrm{M}}$ [13, 14]:

$$(B_\varphi f)(x)=\sum_{|k|=0}^{\infty}c_k(-i)^{|k|}\partial_x^k f(x),\qquad x\in\mathbf{R}^n,\quad f\in W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}.$$

Розглянемо систему

$$\partial_t U_1(t,x)=a(B_\varphi U_1)(t,x)+t^2U_2(t,x),$$
$$\partial_t U_2(t,x)=-U_1(t,x)+a(B_\varphi U_2)(t,x),\quad (t,x)\in(0;T_0]\times\mathbf{R}^n,\quad a\in\mathbf{R}.$$

Якщо розв'язок цієї системи шукати лише серед елементів класу $\big(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\big)^{2^T}$, то

$$\mathcal{A}_t(\xi)=\begin{pmatrix}a\varphi(\xi) & t^2\\ -1 & a\varphi(\xi)\end{pmatrix},\quad \xi\in\mathbf{C}^n$$

(тут враховано те, що $B_\varphi f=F^{-1}\big[\varphi F[f]\big]$, $f\in W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}$ (див. [13])). Звідси одержуємо

$$\lambda_{1,2}(t,\xi)=a\varphi(\xi)\pm it,\qquad \xi\in\mathbf{C}^n,\quad t\in(0;T_0].$$

Отже, $\operatorname{Re}\lambda_1=\operatorname{Re}\lambda_2=a\operatorname{Re}\varphi$.

З іншого боку, оскільки $\varphi\in\mathrm{P}_\Omega^{\mathrm{M}}$, то $e^\varphi\in W_\Omega^{\mathrm{M}}$, тобто

$$\exists\{c;\delta_1;\delta_2\}\subset(0;+\infty)\quad\forall t\in(0;T_0]\quad\forall\xi=\zeta+i\eta\in\mathbf{C}^n:$$
$$|e^{\varphi(\xi)}|=e^{\operatorname{Re}\varphi(\xi)}\le c\exp\big\{Q^-(\delta_1,\delta_2;\zeta,\eta)\big\},$$

або, що те ж саме,

$$\operatorname{Re}\varphi(\xi)\le Q^-(\delta_1,\delta_2;\zeta,\eta)+c_1,\quad c_1=\max\{1;c\}.$$

Таким чином, дана система рівнянь з оператором диференціювання нескінченного порядку є системою (1), для якої виконується умова (2), лише при $a>0$.

Далі, якщо для системи (1) задати початкову умову

$$U(t,\cdot)\mid_{t=0}=f, \qquad f\in\big((W_{\Omega'}^{\mathrm{M}'})^m\big)'^T, \tag{3}$$

то під розв'язком задачі Коші (1), (3) розумітимемо таку вектор-функцію U, яка є диференційовною по t, при кожному фіксованому $t\in(0;T_0]$ належить простору $\big(W_{\Omega'}^{\mathrm{M}'}\big)^{m^T}$ і задовольняє систему (1) у звичайному розумінні, а початкову умову (3) — у сенсі слабкої збіжності у просторі $\big((W_{\Omega'}^{\mathrm{M}'})^m\big)'^T$.

2. Розв'язування задачі Коші. Подіємо формально на систему (1) перетворенням Фур'є відносно x, а відтак поширимо результат за просторовою змінною ξ на увесь комплексний простір $\mathbf{C}^n$. Одержимо лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь з параметром ξ

$$\partial_t V(t,\xi)=(\mathcal{A}_t V)(t,\xi), \quad (t,\xi)\in(0;T_0]\times\mathbf{C}^n, \tag{4}$$

де $V=\{v_1,\ldots,v_m\}^T$.

Нехай $\Theta(t;\xi,\tau)=\big(\theta^{ij}(t;\xi,\tau)\big)_{i,j=1}^m$ для всіх $\tau\in[0;T_0)$, $t\in(\tau;T_0]$ і $\xi\in\mathbf{C}^n$ є розв'язком системи (4), що задовольняє початкову умову

$$\Theta(t;\xi,\tau)\mid_{t=\tau}=\mathrm{E} \tag{5}$$

у звичайному розумінні (тут E — одинична матриця). Такий розв'язок далі називатимемо матрицею Гріна, або ж матрицантом системи (4).

Зазначимо, що зроблені припущення на елементи матриці A_t забезпечують існування такого матрицанта, причому будь-який інший розв'язок системи (4) має вигляд

$$V=\Theta C,$$

де C — довільна матриця-стовпець з елементами, залежними лише від ξ (див., наприклад, [15]).

Наступні допоміжні твердження характеризують властивості Θ.

Лема 1. *Для кожного $\tau\in[0;T_0)$ існує $0<\varepsilon<<1$ таке, що для всіх $t\in\in(\tau;\tau+\varepsilon]$ і $\xi=\zeta+i\eta\in\mathbf{C}^n$*

$$\big|\Theta(t;\xi,\tau)\big|\le c\,\exp\Big\{\frac{t-\tau}{4}\big(Q^-(\delta_1^*,\delta_2^*;\zeta,\eta)+g^*\big)\Big\},$$

де c, δ_2^0, g^* — додатні сталі, не залежні від τ, t, ε і ξ, а $\big|(b_{ij})_{i,j=1}^m\big|=\max\limits_{i,j=\overline{1,m}}|b_{ij}|$.

Доведення. Подамо (4) у вигляді

$$\partial_t\Theta=\mathcal{A}_{t^*}(\xi)\Theta+q(t,\xi), \tag{6}$$

де $q(t,\xi)=\big(\mathcal{A}_t(\xi)-\mathcal{A}_{t^*}(\xi)\big)\Theta(t;\xi,\tau)$, а t^* — довільна фіксована точка з $[\tau;T_0]$. Розв'язавши задачу Коші (6), (5), прийдемо до того, що матрицант системи (4) можна зобразити так:

$$\Theta(t;\xi,\tau)=e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}+\int\limits_\tau^t e^{(t-\sigma)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}q(\sigma,\xi)\,d\sigma,$$

де $e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}}=\mathrm{E}+\big((t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}\big)^j/j\,!\,.$

Згідно з твердженням відповідної леми з [1, с. 78],

$$\|e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}\| \leq e^{(t-\tau)\max\limits_{j=\overline{1,m}} \operatorname{Re}\lambda_j(t^*,\xi)} \times$$
$$\times \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \big(2(t-\tau)\big\|A_{t^*}(\xi)\big\|\big)^j\right) \qquad \big(\forall t \in [\tau; T_0]\big)$$

(тут $\|\mathcal{A}\|$ — норма матриці $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^m$, тобто норма відповідного оператора у m-вимірному просторі). Звідси, зважаючи на умову (2) та властивості вектор-функції Ω й елементів матриці $\mathcal{A}_{t^*}$, використовуючи при цьому оцінку [16]

$$\max_{j=\overline{1,m}} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|^2 \leq \|\mathcal{A}\|^2 \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2$$

і покладаючи $\overline{\delta_k} \overset{\text{df}}{=} \max\limits_{i,j=\overline{1,m}} (m\delta_k^{ij})$, $k = \overline{1,2}$; $c^0 \overset{\text{df}}{=} \max\limits_{i,j=\overline{1,m}} (mc^{ij})$, де δ_k^{ij}, c^{ij} — константи з оцінок елементів a_{ij} матриці $\mathcal{A}_t$ (див. умову 3) з означення класу $\Lambda_\Omega^{\mathrm{M}}([0;T_0])$), одержуємо

$$\big|e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}\big| \leq 2^{2(m-1)} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \sup_{z>0}\{z^j e^{-z}\}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{t-\tau}{2}\Big[Q^-(\delta_1^*, 2\delta_2^* + \overline{\delta_2}; \zeta, \eta) + (2c^* + c^0)\Big]\right\}$$

при $\delta_1^* \geq \overline{\delta_1}$ і

$$\big|e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}\big| \leq \left(\frac{4}{\breve{g}_1}\right)^{m-1} \left(1 + \sum_{j=1}^{m-1} \sup_{z>0}\{z^j e^{-z}\}\right) \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{t-\tau}{2}\Big[Q^-(\delta_1^*, 2\delta_2^* + \widehat{g}_1; \zeta, \eta) + 2c^* + \widehat{g}_1 c^0 - \widehat{g}_2\Big]\right\},$$
$$\breve{g}_1 = \min\big\{1; g_1(y^*)\big\}, \qquad \widehat{g}_1 = \max\big\{1; g_1(y^*)\big\},$$
$$\widehat{g}_2 = \begin{cases} 0, & g_2(y^*) \geq 0, \\ g_2(y^*), & g_2(y^*) < 0, \end{cases} \qquad y^* = \frac{\delta_1^*}{\overline{\delta_1}},$$

при $\delta_1^* < \overline{\delta_1}$.

Таким чином, існують додатні сталі $c > 0$, $\delta_0 > 0$, не залежні від t^*, t, τ і ξ такі, що

$$\big|e^{(t-\tau)\mathcal{A}_{t^*}(\xi)}\big| \leq c\exp\left\{\frac{t-\tau}{2}\Big(Q^-(\delta_1^*, \delta_0; \zeta, \eta) + g\Big)\right\} \tag{7}$$

для всіх $\tau \in [0; T_0)$, $\{t^*; t\} \subset [\tau, T_0]$ і $\xi \in \mathbf{C}^n$, де $g = 2c^* + \widehat{g}_1 c^0 - \widehat{g}_2$.

Використовуючи нерівність (7), знаходимо

$$\big|\Theta(t;\xi,\tau)\big| \le c\,\exp\left\{\frac{t-\tau}{2}\Big(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\zeta,\eta)+g\Big)\right\}+$$

$$+\,cm\int\limits_\tau^t \exp\left\{\frac{t-\sigma}{2}\Big(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\zeta,\eta)+g\Big)\right\}\big|q(\sigma;\xi)\big|\,d\sigma. \qquad (8)$$

Оскільки $\big|q(t,\xi)\big| \le m\big|\mathcal{A}_t(\xi)-\mathcal{A}_{t^*}(\xi)\big|\,\big|\Theta(t;\xi,\tau)\big|$, то, зважаючи на властивості елементів матриці $\mathcal{A}_t$ за змінною t і покладаючи $t^*=\tau$, для всіх t з $(\tau;\tau+\varepsilon]$ і $\xi\in\mathbf{C}^n$ одержуємо

$$\big|q(t,\xi)\big| \le mv(\varepsilon)\big(Q^+(1,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\big)\big|\Theta(t;\xi,\tau)\big|,$$

де $\delta^0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\limits_{i,j=\overline{1,m}}\{\delta^{ij}\}$, $c_1^0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \max\limits_{i,j=\overline{1,m}}\{c^{ij}\}$, а δ^{ij} і c^{ij} — відповідні сталі з властивості 2 елемента a_{ij} матриці $\mathcal{A}_t$ (див. опис класу $\Lambda_\Omega^{\mathrm{M}}([0;T_0])$.

Звідси, а також з нерівності (8) дістаємо

$$\big|\Theta(t;\xi,\tau)\big|\,\exp\left\{-\frac{t-\tau}{2}\Big(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\zeta,\eta)+g\Big)\right\}\le$$

$$\le c+cm^2v(\varepsilon)\Big(Q^+(1,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\Big)\times$$

$$\times\int\limits_\tau^t \exp\left\{-\frac{\sigma-\tau}{2}\Big(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\zeta,\eta)+g\Big)\right\}\big|\Theta(\sigma;\xi,\tau)\big|d\sigma,$$

$$t\in(\tau;\tau+\varepsilon],\quad \tau\in[0;T_0),\quad \xi\in\mathbf{C}^n.$$

Тепер, покладаючи

$$\varphi(t)=\big|\Theta(t;\xi,\tau)\big|\,\exp\left\{-\frac{t-\tau}{2}\Big(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\zeta,\eta)+g\Big)\right\},$$

$$\phi(t)=c,\qquad \chi(t)=cm^2v(\varepsilon)\big(Q^+(1,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\big)$$

і враховуючи твердження леми 2 з [6, с. 300], маємо

$$\big|\Theta(t;\xi,\tau)\big|\,\exp\left\{-\frac{t-\tau}{2}\Big(Q^-(\delta_1^*,\delta_0;\zeta,\eta)+g\Big)\right\}\le$$

$$\le c+(cm)^2v(\varepsilon)\Big(Q^+(1,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\Big)\times$$

$$\times\int\limits_\tau^t \exp\Big\{(t-\sigma)cm^2v(\varepsilon)\Big(Q^+(1,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\Big)\Big\}\,d\sigma\le$$

$$\le c\big(1+\Im(t;\xi,\tau)\big),$$

де

$$\Im(t;\xi,\tau)=\exp\Big\{2cm^2v(\varepsilon)(t-\tau)\Big(Q^+(1,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\Big)\Big\}.$$

Далі, при $\delta_1^*\ge 1$

$$\Im(t;\xi,\tau) \le \exp\left\{\frac{t-\tau}{4}\big(8cm^2v(\varepsilon)\big)\Big(Q^+(\delta_1^*,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\Big)\right\},$$

якщо ж $0<\delta_1^*<1$, то

$$\Im(t;\xi,\tau) \le \exp\left\{\frac{t-\tau}{4}\big(8cm^2v(\varepsilon)(g_1')^{-1}\big)\Big(Q^+(\delta_1^*,g_1''\delta^0;\zeta,\eta)+g_1''c_1^0-g_2''\Big)\right\},$$

де

$$g_1' = \min\big\{1; g_1(\delta_1^*)\big\}, \qquad g_1'' = \max\big\{1; g_1(\delta_1^*)\big\},$$

а

$$g_2'' = \begin{cases} 0, & g_2(\delta_1^*) \ge 0, \\ g_2(\delta_1^*), & g_2(\delta_1^*) < 0, \end{cases}$$

оскільки

$$\Omega_j(\zeta_j) \le \frac{\Omega_j(\delta_1^*\zeta_j)-g_2(\delta_1^*)}{g_1(\delta_1^*)}, \qquad \zeta_j\in\mathbf{R}, \quad j=\overline{1,m}.$$

Зафіксуємо тепер $\varepsilon>0$ так, щоб $8cm^2v(\varepsilon)\le g_1'$. Тоді, врахувавши, що

$$\exp\left\{\frac{t-\tau}{2}\Big(Q^-(\delta_1^*,\delta^0;\zeta,\eta)+g\Big)\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{\tau-t}{4}\sum_{j=1}^{n}\Omega_j(\delta_1^*\zeta_j)\right\}\exp\left\{\frac{t-\tau}{4}\Big(Q^-(\delta_1^*,2\delta^0;\zeta,\eta)+2g\Big)\right\},$$

для $\tau\in[0;T_0)$, $t\in(\tau;\tau+\varepsilon]$ і $\xi\in\mathbf{C}^n$ дістанемо таку оцінку матрицанта Θ системи (4):

$$\big|\Theta(t;\xi,\tau)\big| \le c\exp\left\{\frac{t-\tau}{4}\Big(Q^-(\delta_1^*,\delta_2^0;\zeta,\eta)+g^*\Big)\right\}, \tag{9}$$

де c, δ_2^0 — додатні сталі, не залежні від τ, t, ξ і ε, а $g^* \stackrel{\mathrm{df}}{=} 2g+g_1''c_1^0-g_2''$.

Лему доведено.

Лема 2. *Існують додатні сталі c, δ_1^*, δ_2^0 і g^* такі, що для всіх $t\in(0;T_0]$, $\xi\in\mathbf{C}^n$*

$$\big|\Theta(t;\xi,0)\big| \le c\exp\left\{\frac{t}{4}\Big(Q^-(\delta_1^*,\delta_2^0;\zeta,\eta)+g^*\Big)\right\}. \tag{10}$$

Дане твердження стає очевидним, якщо зважити на те, що згідно з лемою 1 існує таке розбиття $\{t_j\}_{j=1}^k$ проміжку $(0;t]$, $t\in(0;T_0]$, на кожному елементі $(t_j;t_{j+1}]$ якого для матрицанта Θ виконується нерівність (9) з оцінюючими сталими, не залежними від t, t_j, t_{j+1} і ξ, а також на одну з відомих властивостей матрицанта [15]: $\Theta(t;\cdot,t_0)=\Theta(t;\cdot,t_1)\Theta(t_1;\cdot,t_0)$ $\big(\forall\{t_0;t_1;t\}\subset(0;T_0]\big)$.

***Наслідок* 1.** *При кожному фіксованому t з $(0;T_0]$ $\Theta(t;\cdot,0)$ належить до $P(W_\Omega^{\mathrm{M}})^m$.*

Лема 3. *Кожен елемент матрицанта $\Theta(t;\cdot,0)$ диференційовний по $t\in(0;T_0]$ у розумінні топології простору W_Ω^{M}.*

Доведення. Достатньо переконатися у тому, що граничне співвідношення

$$\Psi_{\Delta t}(t,\cdot) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \big(\Theta(t+\Delta t;\cdot,0) - \Theta(t;\cdot,0)\big)/\Delta t \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \mathcal{A}_t(\cdot)\Theta(t;\cdot,0)$$

виконується у сенсі збіжності у класі $P(W_\Omega^{\mathrm{M}})^m$.

Зазначимо, що матрицант Θ диференційовний по $t \in (0;T_0]$ у звичайному розумінні [15], тому, згідно з теоремою про скінченні прирости,

$$\Psi_{\Delta t}(t,\cdot) = \partial_t \Theta(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,0), \qquad \{t; t+\varepsilon\Delta t\} \subset (0;T_0], \quad \varepsilon \in (0;1),$$

тобто

$$\Psi_{\Delta t}(t,\cdot) = \mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}(\cdot)\Theta(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,0),$$

оскільки $\Theta(\tau^*;\cdot,0)$ — звичайний розв'язок системи (4) для всіх τ^* з $(0;T_0]$.

Розглянемо спочатку випадок, коли $\Delta t \geq 0$. Тоді

$$\Theta(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,0) = \Theta(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,t)\Theta(t;\cdot,0).$$

Отже,

$$\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}\Theta(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,0) - \mathcal{A}_t\Theta(t;\cdot,0) = \Big(\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}\Theta(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,t) - \mathcal{A}_t\Big)\Theta(t;\cdot,0).$$

Зваживши на властивості елементів матриці $\mathcal{A}_t$, а також на структуру матрицанта Θ [15]

$$\Theta(t;\xi,\tau) = \mathrm{E} + \int_\tau^t \mathcal{A}_{t_1}(\xi)dt_1 +$$

$$+ \int_\tau^t \mathcal{A}_{t_1}(\xi)\int_\tau^{t_1} \mathcal{A}_{t_2}(\xi)dt_2\,dt_1 + \ldots, \qquad t \in [\tau;T_0], \quad \xi \in \mathrm{C}^n, \tag{11}$$

прийдемо до того, що $\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}(\xi) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \mathcal{A}_t(\xi)$ і $\Theta(t+\varepsilon\Delta t;\xi,t) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \mathrm{E}$ рівномірно по ξ на кожній компактній множині $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}^n$, а відтак і до рівномірної збіжності по $\xi \in \mathbf{K}$ матриці $\Psi_{\Delta t}(t,\xi)$ до $\mathcal{A}_t(\xi)\Theta(t;\xi,0)$ при $\Delta t \to +0$ для всіх $t \in (0;T_0]$.

Далі, нехай $\Delta t < 0$, $|\Delta t| \leq t/2$, тоді

$$\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}\Theta(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,0) - \mathcal{A}_t\Theta(t;\cdot,0) =$$

$$= \left(\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}\Theta\left(t+\varepsilon\Delta t;\cdot,\frac{t}{2}\right)\right) - \mathcal{A}_t\Theta\left(t;\cdot,\frac{t}{2}\right)\Theta\left(\frac{t}{2};\cdot,0\right).$$

Звідси, за аналогією до попереднього випадку, одержуємо, що

$$\Psi_{\Delta t}(t,\xi) \xrightarrow[\Delta t \to -0]{} \mathcal{A}_t(\xi)\Theta(t;\xi,0), \quad t \in (0;T_0],$$

рівномірно по ξ на кожному компакті $\mathbf{K}$ з $\mathbf{C}^n$.

Доведемо тепер, що кожен елемент матриці $\Psi_{\Delta t}$ рівномірно обмежений у просторі W_Ω^{M} по Δt (для достатньо малих $|\Delta t|$).

Дійсно,

$$\left|\Psi_{\Delta t}(t,\cdot)\right| \leq m\left|\mathcal{A}_{(t+\varepsilon\Delta t)}(\xi)\right| \left|\Theta(t+\varepsilon\Delta t;\xi,0)\right| \leq$$
$$\leq mc\big(Q^+\big(\overline{\delta}_1,\overline{\delta}_1;\zeta,\eta\big)+c^0\big)\exp\left\{\frac{t+\varepsilon\Delta t}{4}\big(Q^-\big(\delta_1^*,\delta_2^0;\zeta,\eta\big)+g^*\big)\right\} \leq$$
$$\leq c_1\exp\big\{Q^-\big(\delta_1^*,\delta_2^0;\zeta,\eta\big)+g'\big\},$$
$$c_1\neq c_1(\Delta t),\quad \delta_i\neq\delta_i(\Delta t),\quad i=\overline{1,2},\quad g'\neq g'(\Delta t)$$

$\Big($тут враховано властивості матриці $\mathcal{A}_t$, лему 2, а також те, що $(t+\varepsilon\Delta t)\in\left[\dfrac{t}{2};\dfrac{3}{2}t\right]$ при $|\Delta t|<\dfrac{t}{2}\Big)$.

Лему доведено.

Зважаючи на те, що обернений оператор Фур'є F^{-1} є неперервним у просторі W_Ω^{M}, з твердження леми 3 дістаємо такий наслідок.

Наслідок **2.** $F^{-1}\big[\partial_t\Theta(t;\cdot,0)\big]=\partial_tF^{-1}\big[\Theta(t;\cdot,0)\big]$ $(\forall t\in(0;T_0])$.

Лема 4. $\Theta(t;\cdot,0)\phi \xrightarrow[t\to+0]{(W_\Omega^{\mathrm{M}})^{m^T}} \phi$ $\big(\forall\phi\in(W_\Omega^{\mathrm{M}})^{m^T}\big)$.

Доведення. Достатньо встановити виконання наступних умов:

1) $\Theta(t;\xi,0)\xrightarrow[t\to+0]{}$ E рівномірно по ξ на кожному компакті $\mathbf{K}\subset\mathbf{C}^n$;

2) $\forall\phi\in(W_\Omega^{\mathrm{M}})^{m^T}$ $\exists\{c;\delta_1;\delta_2\}\subset(0;+\infty)$ $0<t<<1$ $\forall\xi\in\mathbf{C}^n$: $\big|\Theta(t;\xi,0)\times\times\phi(\xi)\big|\leq c\exp\big\{Q^-(\delta_1,\delta_2;\zeta,\eta)\big\}$.

Зазначимо, що умова 2 стає очевидною, якщо врахувати оцінку (10) матрицанта Θ, а також те, що компоненти вектора ϕ належать простору W_Ω^{M}.

Переконаємося у виконанні умови 1. Для цього скористаємося структурою (11) матрицанта $\Theta(t;\cdot,0)$. Відомо [15], що матричний ряд (11) збігається абсолютно і рівномірно по $(t;\xi)$ на кожній множині виду $[a;b]\times\mathbf{K}$, де $[a;b]\subset(0;T_0]$, а $\mathbf{K}$ — компакт з $\mathbf{C}^n$. Звідси вже, зважаючи на вигляд кожного доданка ряду (11) (починаючи з другого) та на властивості елементів матриці $\mathcal{A}_t$, дістаємо виконання умови 1.

Лему доведено.

Одержані властивості матрицанта Θ системи (4) дозволяють сформулювати таке твердження про коректну розв'язність задачі Коші (1), (3).

Теорема 1. *Нехай* f *з* $\Big(\big(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\big)^m\Big)'^T$ *такий, що* $F[f]$ *є мультиплікатором у просторі* $\big(W_\Omega^{\mathrm{M}}\big)^{m^T}$. *Тоді для задачі Коші* (1), (3) *існує єдиний розв'язок* U, *який неперервно залежить від початкових даних і такий, що для всіх* t *з* $(0;T_0]$: 1) $U(t,\cdot)\in\big(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\big)^{m^T}$; 2) $F\big[\partial_tU(t,\cdot)\big]=\partial_tF\big[U(t,\cdot)\big]$; 3) $U(t,\cdot)=G_t(\cdot)*f$, *де* $G_t(\cdot)=F^{-1}\big[\Theta(t;\xi,0)\big](t;\cdot)$.

Доведення. Оскільки нас цікавлять розв'язки системи (1), які при кожному фіксованому t з $(0;T_0]$ є елементами простору $\big(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\big)^{m^T}$ і по t задовольняють умову 2 даної теореми, то, зважаючи на те, що відображення $F(F^{-1})\colon\big(W_\Omega^{\mathrm{M}}\big)^m\to\big(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\big)^m$ є взаємно однозначним і неперервним [1], одержуємо рівносильність системи (1) з системою

$$\partial_tV(t,\xi)=(\mathcal{A}_tV)(t,\xi),\quad (t,\xi)\in(0;T_0]\times\mathbf{R}^n. \tag{12}$$

При цьому початкова умова (3) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$V(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\left((W_{\mathrm{M}}^{\Omega})^m\right)'^T} F[f] \tag{13}$$

(див. означення перетворення Фур'є узагальненої функції [17]).

Отже, питання про коректну розв'язність задачі Коші (1), (3) у просторі $\left(\left(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\right)^m\right)'$ рівносильне питанню про коректну розв'язність задачі Коші (12), (13) у просторі $\left((W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m\right)'$.

Як уже зазначалось, система (12) є лінійною системою звичайних диференціальних рівнянь з параметром, загальний розв'язок якої має вигляд

$$V(t,\zeta) = \Theta(t;\zeta,0)C(\zeta), \quad (t,\zeta) \in (0;T_0] \times \mathbf{R}^n. \tag{14}$$

З початкової умови (13), зважаючи на (14) та на лему 4, одержуємо

$$\left\langle v_j(t,\cdot), \varphi_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} \left\langle c_k, \overline{\theta_{jk}(t;\cdot,0)}\varphi_j \right\rangle \xrightarrow[t\to+0]{} \langle c_j, \varphi_j \rangle = \left\langle F[f_j], \varphi_j \right\rangle,$$

$$j = \overline{1,m}, \quad \varphi \in (W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$$

(тут $\overline{(\cdot)}$ позначає комплексну спряженість).

Отже, $V(t,\cdot) = \Theta(t;\cdot,0)F[f]$, $t \in (0;T_0]$, — розв'язок задачі Коші (12), (13). Оскільки $F[f]$ — мультиплікатор у $(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^{m^T}$, а матрицант $\Theta(t;\cdot,0)$ при кожному t з $(0;T_0]$ належить до $P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$ (див. наслідок 1), то $V(t,\cdot) \in (W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^{m^T}$, $t \in (0;T_0]$.

Доведемо тепер, що знайдений розв'язок єдиний у просторі $(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^{m^T}$. Для цього припустимо, що у цьому просторі існує ще один розв'язок V_1 задачі Коші (12), (13). З огляду на структуру загального розв'язку (14) системи (12) $V_1(t,\cdot) = \Theta(t;\cdot,0)C_1(\cdot)$, $t \in (0;T_0]$. Оскільки $V_1(t,\cdot) \in (W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^{m^T}$, $t \in (0;T_0]$, то компоненти вектора $C_1(\cdot)$ — цілі аналітичні функції на $\mathbf{C}^n$.

Розглянемо вектор-функцію $V_2(t,\cdot) = V_1(t,\cdot) - V(t,\cdot)$, $t \in (0;T_0]$, яка також є розв'язком системи (12) і, як неважко переконатися, задовольняє нульову початкову умову: $V_2(t,\cdot) \xrightarrow[t\to+0]{\left((W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m\right)'^T} 0$. З цієї умови дістаємо

$$\left\langle \left(C_1 - F[f]\right), \varphi \right\rangle = \langle 0, \varphi \rangle \quad \left(\forall \varphi \in (W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^{m^T}\right). \tag{15}$$

Зваживши на те, що $\theta_{jj}(t;\xi,0) \xrightarrow[t\to+0]{} 1$ рівномірно по ξ на кожному компакті $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}^n$ (див. доведення леми 4), прийдемо до існування такого (достатньо малого) $t_0 > 0$, що $\theta_{jj}(t_0;\xi,0) \neq 0$, $\xi \in \mathbf{C}^n$, $j = \overline{1,m}$. Поклавши тепер $\varphi_j = \overline{(c_{1j} - F[f_j])}\theta_{jj}^2(t_0;\cdot,0)$, з (15) отримаємо такі рівності:

$$\int\limits_{\mathbf{C}^n} \overline{(c_{1j} - F[f_j])^2}\theta_{jj}^2(t_0;\xi,0)d\xi = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Звідси, врахувавши гладкість $C_1(\cdot)$ і $F[f](\cdot)$, одержимо рівність цих вектор-функцій на $\mathbf{C}^n$. Таким чином, $V_1(t,\xi) = V(t,\xi)$, $(t,\xi) \in (0;T_0] \times \mathbf{C}^n$, що і доводить єдиність розв'язку задачі Коші (12), (13) у просторі $(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^{m^T}$.

Щодо умови 2 цієї теореми, то виконання її стає очевидним, якщо взяти до уваги наслідок 2.

Нарешті, зваживши на те, що

$$U(t,\cdot) = F^{-1}[V](t,\cdot) = F^{-1}\big[\Theta(t;\xi,0)F[f]\big](t,\cdot), \quad t \in (0;T_0],$$

а також на теорему 1 з [18], прийдемо до висновку, що $U(t,\cdot) = G_t(\cdot) * f$, $t \in (0;T_0]$, де $G_t(\cdot) = F^{-1}\big[\Theta(t;\xi,0)\big](t,\cdot)$.

Розв'язок U задачі Коші (1), (3) неперервно залежить від початкових даних задачі, оскільки відповідний розв'язок V має таку властивість, а F^{-1} є неперервним оператором з $(W_\Omega^{\mathrm{M}})^m$ у $\big(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\big)^m$.

Теорему доведено.

3. Окремий випадок системи (1). Нехай для (1) окрім умови (2) виконується ще і така:

$$\exists\{\delta_1^-;\delta_2^-\} \subset (0;+\infty] \quad \exists\, c^- \in \mathbf{R} \quad \forall t \in (0;T_0] \quad \forall \xi = \zeta + i\eta \in \mathbf{C}^n: \\ \min_{j=\overline{1,m}} \mathrm{Re}\lambda_j(t,\xi) \geq -\big(Q^+(\delta_1^-,\delta_2^-;\zeta,\eta) + c^-\big). \tag{16}$$

Прикладом такої системи знову можуть бути $2\vec{b}$-параболічні системи диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Виявляється, що у цьому випадку умови коректної розв'язності задачі Коші (1), (3), сформульовані у теоремі 1, є не лише достатніми, але і необхідними. Для доведення цього факту нам знадобляться наступні допоміжні твердження.

Лема 5. *Нехай* $\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ — *обернена матриця до матрицанта* $\Theta(t;\cdot,\tau)$ *системи* (4) *при* $\tau \in [0;T_0)$ *і* $t \in (\tau,T_0]$. *Тоді існують додатні сталі* c, δ_1, δ_2 *і* g *такі, що для всіх* $\tau \in (0;T_0]$, $\xi \in \mathbf{C}^n$

$$\left|\Theta^{-1}(t;\xi,0)\right| \leq c\,\exp\Big\{t\big(Q^+(\delta_1,\delta_2;\zeta,\eta) + g\big)\Big\}.$$

Доведення. Насамперед зазначимо, що $\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau) = \Theta(\tau;\cdot,t)$, $t \in (\tau,T_0]$, $\tau \in$ $\in [0;T_0)$. Дійсно, згідно з відповідними властивостями матрицанта [15],

$$\mathrm{E} = \Theta(\tau;\cdot,\tau) = \Theta(\tau;\cdot,t)\Theta(t;\cdot,\tau) \quad \big(\forall t \in (\tau;T_0]\big).$$

Отже, $\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$ — нормований розв'язок такої задачі Коші:

$$\partial_\tau\Theta^{-1}(t;\xi,\tau) = \mathcal{A}_\tau(\xi)\Theta^{-1}(t;\xi,\tau), \quad (\tau,\xi) \in [0;t) \times \mathbf{C}^n, \\ \Theta^{-1}(t;\cdot,\tau)\,|_{\tau=t} = \mathrm{E}. \tag{17}$$

Далі діятимемо, як і при доведенні леми 1. Зафіксуємо довільне τ^* з $[0;t]$ і подамо систему (17) у вигляді

$$\partial_\tau\Theta^{-1} = \mathcal{A}_{\tau^*}(\xi)\Theta^{-1} + q(\tau,\xi),$$

де $q(\tau,\cdot) = \big(\mathcal{A}_\tau(\cdot) - \mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)\big)\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau)$. Тоді

$$\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau) = e^{(\tau-t)\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)} + \int_t^\tau e^{(\tau-\sigma)\mathcal{A}_{\tau^*}(\cdot)}q(\sigma,\cdot)\,d\sigma,$$

причому виконуються такі нерівності:

$$\left|e^{(\tau-t)\mathcal{A}_{\tau^*}(\xi)}\right| \le e^{(\tau-t)\min\limits_{j=\overline{1,m}}\mathrm{Re}\lambda_j(\tau^*,\xi)}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}\left(2(t-\tau)\big\|\mathcal{A}_{\tau^*}(\xi)\big\|\right)^j\right) \le$$

$$\le \left(1+2^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}\Big((t-\tau)\big(Q^+\big(\overline{\delta_1},\overline{\delta_2};\zeta,\eta\big)+c^0\big)\Big)^j\right)\times$$

$$\times\exp\left\{(t-\tau)\left[Q^+\big(\delta_1^-,\delta_2^-;\zeta,\eta\big)+c^-\right]\right\} \le$$

$$\le 2^m m!\,\exp\left\{(t-\tau)\left[Q^+\big(\delta_1^-+\overline{\delta_1},\delta_2^-+\overline{\delta_2};\zeta,\eta\big)+c^-+c^0\right]\right\} \quad \big(\forall\tau\in[0;t)\big).$$

Звідси вже, зваживши на те, що при $\tau^*=t$ для всіх τ з $[t-\varepsilon;t)$, $0<\varepsilon<<1$, і $\xi\in\mathbf{C}^n$

$$\big|q(\tau,\xi)\big| \le mv(\varepsilon)\big(Q^+(1,\delta^0;\zeta;\eta)+c_1^0\big)\big|\Theta^{-1}(t;\xi,\tau)\big|,$$

дістанемо

$$\big|\Theta^{-1}(t;\xi,\tau)\big|\exp\left\{(\tau-t)\big(Q^+(\delta_1,\delta_2;\zeta,\eta)+c^+\big)\right\} \le$$

$$\le c+cm^2v(\varepsilon)\big(Q^+(1,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\big)\times$$

$$\times\int_\tau^t \exp\left\{(\sigma-t)\big(Q^+(\delta_1,\delta_2;\zeta,\eta)+c^+\big)\right\}\big|\Theta^{-1}(t;\xi,\sigma)\big|d\sigma,$$

де c, δ_1, δ_2 — додатні сталі, не залежні від t, τ, ξ і ε.

Тепер, використавши аналог леми 2 з [6, с. 300], отримаємо

$$\big|\Theta^{-1}(t;\xi,\tau)\big|\exp\left\{(\tau-t)\big(Q^+(\delta_1,\delta_2;\zeta,\eta)+c^+\big)\right\} \le$$

$$\le c+(cm)^2v(\varepsilon)\big(Q^+(1,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\big)(t-\tau)\times$$

$$\times\exp\left\{(t-\tau)cm^2v(\varepsilon)\big(Q^+(1,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\big)\right\} \le$$

$$\le c\left(1+\exp\left\{(t-\tau)2cm^2v(\varepsilon)\big(Q^+(1,\delta^0;\zeta,\eta)+c_1^0\big)\right\}\right),$$

або, що те ж саме,

$$\big|\Theta^{-1}(t;\xi,\tau)\big| \le c\exp\left\{(t-\tau)\left(\frac{1}{2}+3cm^2v(\varepsilon)\right)\big(Q^+(\delta_3,\delta_4;\zeta,\eta)+c_2\big)\right\},$$

де $\delta_3=\max\{1;2\delta_1\}$, $\delta_4=\max\{\delta_2;2\delta^0\}$, $c_2=\max\{c_1^0;2c^+\}$, $\xi\in\mathbf{C}^n$, $\tau\in[t-\varepsilon;t)$, $t\in(0;T_0]$.

Зафіксуємо тепер $\varepsilon>0$ так, щоб $t-\varepsilon\ge 0$ і виконувалась нерівність $3cm^2v(\varepsilon)\le$ $\le\dfrac{1}{2}$. Тоді для всіх $t\in(0;T_0]$, $\tau\in[t-\varepsilon;t)$ і $\xi\in\mathbf{C}^n$

$$\big|\Theta^{-1}(t;\xi,\tau)\big| \le c\,\exp\left\{(t-\tau)\big(Q^+(\delta_3,\delta_4;\zeta,\eta)+c_2\big)\right\}, \qquad (18)$$

де c, δ_3, δ_4 і c_2 — додатні сталі, не залежні від t, τ, ξ і ε.

На завершення зазначимо, що міркуючи, як і при доведенні леми 2, і зважаючи при цьому на рівність $\Theta^{-1}(t;\cdot,\tau)=\Theta(\tau,\cdot,t)$, оцінку (18) можемо легко поширити по змінній τ на увесь проміжок $[0;t)$ для кожного фіксованого t з $(0;T_0]$.

Лему доведено.

Лема 6. *Для кожного елемента* $P(\cdot)$ *з* $P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$ *існує* $t_0 \in (0;1)$ *таке, що для всіх* $t \in (0;t_0)$ *добуток* $P(\cdot)\Theta^{-1}(t;\cdot,0)$ *належить класу* $P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$.

Доведення. Оскільки матриця P належить $P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$, то

$$\exists\{c_1,\delta_3,\delta_4\} \subset (0;+\infty) \quad \forall \xi \in \mathbf{C}^n: \qquad \big|P(\xi)\big| \le c_1 \exp\big\{Q^-(\delta_3,\delta_4;\zeta,\eta)\big\}.$$

Звідси з огляду на лему 5 та властивості $\Omega(\cdot)$ й $\mathrm{M}(\cdot)$, одержуємо

$$\big|P(\xi)\Theta^{-1}(t;\xi,0)\big| \le$$

$$\le m^2 c c_1 e^{t\cdot g} \exp\left\{\sum_{j=1}^{m}\big(t\Omega_j(\delta_1\zeta_j) - \Omega_j(\delta_3\zeta_j) + \mathrm{M}_j\big((\delta_2+\delta_4)\eta_j\big)\big)\right\} \le$$

$$\le m^2 c c_1 e^{g - g_2(\delta^+)} \exp\left\{\sum_{j=1}^{m}\Big(\big(t - g_1(\delta^+)\big)\Omega_j(\delta_1\zeta_j) + \mathrm{M}_j\big((\delta_2+\delta_4)\eta_j\big)\Big)\right\},$$

$$\delta^+ = \min\left\{\frac{1}{2};\frac{\delta_3}{\delta_1}\right\}, \quad 0 < t << 1, \quad \xi \in \mathbf{C}^n.$$

Отже, для всіх $t < g_1(\delta^+)$ з інтервалу $(0;T_0]$ і $\xi \in \mathbf{C}^n$ добуток $P(\xi)\Theta^{-1}(t;\xi,0)$ належить $P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$.

Лему доведено.

Теорема 2 (критерій мультиплікатора)**.** *Для того щоб вектор* $\psi(\cdot) = \big\{\psi_1(\cdot),\ldots$ $\ldots,\psi_m(\cdot)\big\}$ *був мультиплікатором у* $(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$*, необхідно і достатньо, щоб для кожного* $0 < t << 1$ *добуток* $\Theta(t;\cdot,0)\psi^T$ *належав простору* $(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^{m^T}$.

Доведення. *Необхідність* очевидна, оскільки матрицант $\Theta(t;\cdot,0)$ належить $P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$ для всіх $t \in (0;T_0]$ (див. наслідок 1).

Доведемо *достатність.* Для цього зафіксуємо довільну матрицю $P(\cdot)$ з $P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$ і розглянемо $P(\cdot)\psi^T$, який подамо у такому вигляді:

$$P(\cdot)\psi^T(\cdot) = \Big(P(\cdot)\Theta^{-1}(t;\cdot,0)\Big)\Big(\Theta(t;\cdot,0)\psi^T(\cdot)\Big), \quad 0 < t << 1. \tag{19}$$

На підставі леми 6 $P(\cdot)\psi^T(\cdot) \in (W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^{m^T}$. Таким чином, умова 1 з означення мультиплікатора у $(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$ виконується.

Переконаємося тепер у виконанні умови 2 з цього означення. Нехай послідовність $\{P;P_v, v \ge 1\} \subset P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$ така, що $P_v \xrightarrow[v\to+\infty]{P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m} P$. Тоді достатньо показати, що $P_v\psi^T \xrightarrow[v\to+\infty]{(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^{m^T}} P\psi^T$, тобто: а) $(P_v(\xi) - P(\xi))\,\psi^T(\xi) \xrightarrow[v\to+\infty]{} 0$ рівномірно по ξ на кожному компакті $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}^n$; б) $\exists\{c_1,\delta_1,\delta_2\} \subset (0;+\infty)$ $\forall v \ge 1$ $\forall \xi \in \mathbf{C}^n$: $\big|P_v(\xi)\psi^T(\xi)\big| \le c_1 \exp\big\{Q^-(\delta_1,\delta_2;\zeta,\eta)\big\}$.

Зазначимо, що умова а) одержується безпосередньо зі збіжності $\{P_v, v \ge 1\}$ до P у класі $P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$ та з обмеженості ψ на кожному компакті $\mathbf{K} \subset \mathbf{C}^n$. Умова б) також стає очевидною, якщо зважити на рівність (19), лему 6 та на збіжність послідовності $\{P_v, v \ge 1\}$ у $P(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$.

Теорему доведено.

Основний результат цього пункту сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 3. *Якщо для системи* (1) *окрім зазначених у п.* 1 *умов виконується умова* (16), *то для того щоб задача Коші* (1), (3) *була коректно розв'язною і*: 1) *її розв'язок* $U(t,\cdot)$ *при кожному фіксованому* $t \in (0;T_0]$ *належав простору* $\left(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\right)^{m^T}$; 2) $\partial_t F[U] = F[\partial_t U]$, $t \in (0;T_0]$, *необхідно і достатньо, щоб* $F[f]$ *був мультиплікатором у* $(W_\Omega^{\mathrm{M}})^{m^T}$. *При цьому завжди виконуватиметься рівність* $U(t,x) = G_t(x) * f$, $(t,x) \in (0;T_0] \times \mathbf{R}^n$.

Доведення. *Достатність* одержуємо з теореми 1. Доведемо *необхідність.* Як зазначалось при доведенні теореми 1, питання про коректну розв'язність задачі Коші (1), (3) у просторі $\left(\left(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\right)^m\right)'$ рівносильне питанню про коректну розв'язність задачі Коші (12), (13) у просторі $\left((W_\Omega^{\mathrm{M}})^m\right)'$. Тому достатньо показати, що якщо задача Коші (12), (13) коректно розв'язна, то $F[f]$ — мультиплікатор у $(W_\Omega^{\mathrm{M}})^{m^T}$.

Оскільки $V(t,\cdot) = \Theta(t;\cdot,0)C(\cdot) \in (W_\Omega^{\mathrm{M}})^{m^T}$ при кожному фіксованому t з $(0;T_0]$ (див. (14)), то, згідно з теоремою 2, функція $C(\cdot)$ — мультиплікатор у $(W_\Omega^{\mathrm{M}})^{m^T}$. Зважаючи на лему 4, з умови (13) одержуємо

$$\big\langle C(\cdot), \varphi(\cdot)\big\rangle = \big\langle F[f](\cdot), \varphi(\cdot)\big\rangle \quad \left(\forall \varphi \in (W_\Omega^{\mathrm{M}})^{m^T}\right).$$

Звідси на підставі єдиності розв'язку задачі Коші (12), (13) приходимо до того, що $F[f]$ — регулярний функціонал, породжений мультиплікатором у $(W_\Omega^{\mathrm{M}})^{m^T}$.

Теорему доведено.

4. Принцип локалізації. Зазначимо, що розв'язок задачі Коші (1), (3) при $t \to +0$ прямує до узагальненої вектор-функції f у слабкому розумінні збіжності. Однак може трапитися, що f збігається на деякій частині $\mathbf{R}^n$ з гладкою функцією. Виникає запитання: чи буде у цьому випадку відбуватися локальне підсилення збіжності вказаного розв'язку при $t \to +0$?

Відповідь на це питання спробуємо з'ясувати, попередньо зробивши такі припущення. Говоритимемо, що для Ω і M виконується умова A), якщо для компонент цих вектор-функцій окрім зазначених у п. 1 властивостей виконуються ще і такі:

1) $\exists d_1 \in \mathbf{R}\ \ 0 < t << 1\ \exists \hat{g}_j(t) > 0,\ \hat{g}_j(t) \xrightarrow[t\to+0]{} 0,\ \forall \zeta \in \mathbf{R}\colon\ t\Omega_j(\zeta) \geq \geq \Omega_j\big(\hat{g}_j(t)\zeta\big) + d_1$;

2) $\exists d_2 \in \mathbf{R}\ \ 0 < t << 1\ \exists \breve{g}_j(t) > 0,\ \breve{g}_j(t) \xrightarrow[t\to+0]{} 0,\ \forall \eta \in \mathbf{R}\colon\ t\mathrm{M}_j(\eta) \leq \leq \mathrm{M}_j\big(\breve{g}_j(t)\eta\big) + d_2$;

3) $\exists \{c, B, \alpha_j\} \subset (0;+\infty)\ \forall q \in \mathbf{Z}_+\colon \sup\limits_{y>0} \big\{y^q \exp\{-\Omega_j(y)\}\big\} \leq cB^q q^{\alpha_j q}$;

4) $\exists \{c, B, \delta, \beta_j\} \subset (0;+\infty)\ \forall q \in \mathbf{Z}_+\ \forall \eta \in \mathbf{R}\colon |\eta|^q \leq cB^q q^{\beta_j q} \exp\big\{\mathrm{M}_j(\delta\eta)\big\}$;

5) $\exists \gamma_j \geq 0\ \forall \delta \in (0;1)\ \exists \{c, B\} \subset (0;+\infty)\ \forall q \in \mathbf{Z}_+$:

$$\sup_{0<y<<1} \left\{ \exp\left\{-\mathrm{M}_j'\big(\delta\big(\breve{g}_j(y)\big)^{-1}\big)\right\}\big(\chi_j(y)\big)^{-q}\big(\hat{g}_j(y)\big)^{-2}\right\} \leq cB^q q^{\gamma_j q},$$

$$\chi_j(\cdot) \overset{\mathrm{df}}{=} \min\big\{\hat{g}_j(\cdot), \breve{g}_j(\cdot)\big\}.$$

Вектор-функції Ω і M (що означені у п. 1) задовольняють умову A$'$), якщо для їх компонент виконуються властивості 1 – 4 з умови A) і: а) $\lim\limits_{t\to+0} \dfrac{\breve{g}_j(t)}{\hat{g}_j(t)} < +\infty$; б) $\exists \gamma_j \geq 0\ \exists \{c, B\} \subset (0;+\infty)\ \forall q \in \mathbf{Z}_+\colon \sup\limits_{y>0} \big\{y^q \exp\{-\mathrm{M}_j'(y)\}\big\} \leq CB^q q^{\gamma_j q}$.

Зазначимо, що зроблені припущення на вектор-функції Ω та M, за винятком другого та п'ятого, завжди виконуються для довільних Ω й M. У цьому неважко переконатися, виходячи безпосередньо з означень цих функцій. Дійсно, згідно з властивістю в) компоненти Ω_j (див. п. 1), одержимо, що припущення 1 справджується при $\hat{g}_j(t) = t$ і $d_1 = 0$.

Якщо зважити на нерівність

$$|\tau|\Omega_j(1) \le \Omega_j(\tau), \quad |\tau| \ge 1, \tag{20}$$

тоді дістанемо, що для всіх $q \in \mathbf{Z}_+$

$$|\tau|^q \exp\left\{-\Omega_j(\tau)\right\} \le \left(\Omega_j(1)\right)^{-q} \sup_{|\tau|\ge 1} \left\{\left(\Omega_j(\tau)\right)^q \exp\left\{-\Omega_j(\tau)\right\}\right\} \le$$

$$\le \left(\Omega_j(1)\right)^{-q} \sup_{y>0}\{y^q e^{-y}\} \le \left(\Omega_j(1)\right)^{-q} q!$$

при $|\tau| \ge 1$ і

$$|\tau|^q \exp\left\{-\Omega_j(\tau)\right\} \le 1$$

при $|\tau| < 1$. Отже, припущення 3 завжди виконується при $\alpha_j = 1$.

Оскільки для компонент вектор-функції M також виконується аналог нерівності (20), то

$$|\eta|^q = q^q \left|\frac{\eta}{q}\right|^q \le q^q \left(e^{|\eta|/q}\right)^q \le q^q \exp\left\{\frac{\mathrm{M}_j(\eta)}{\mathrm{M}_j(1)}\right\}, \qquad |\eta| \ge 1, \quad q \in \mathbf{Z}_+.$$

Для решти значень η $|\eta|^q < 1$, $q \in \mathbf{Z}_+$. Таким чином, виконується й припущення 4.

Щодо співвідношень A) і A$'$), то умова A$'$) є достатньою для виконання A). Справді, досить переконатися, що властивості а), б) умови A$'$) забезпечують виконання припущення 5 з A). Зваживши на умови а) і б), для достатньо малих $y > 0$ одержимо

$$\exp\left\{-\mathrm{M'}_j\left(\delta\left(\breve{g}_j(y)\right)^{-1}\right)\right\}\left(\left(\hat{g}_j(y)\right)^2 \chi_j(y)^q\right)^{-1} \le$$

$$\le \left(\delta^{-1}\breve{g}_j(y)\right)^{q+2}\left(\left(\hat{g}_j(y)\right)^2 \chi_j(y)^q\right)^{-1} \times$$

$$\times \sup_{0<y<<1}\left\{\left(\delta\left(\breve{g}_j(y)\right)^{-1}\right)^{q+2} \exp\left\{-\mathrm{M'}_j\left(\delta\left(\breve{g}_j(y)\right)^{-1}\right)\right\}\right\} \le$$

$$\le c_1\left(B_1\delta^{-1}\right)^{q+2} \sup_{y>0}\left\{y^{q+2}\exp\left\{-\mathrm{M'}_j(y)\right\}\right\}, \qquad \delta > 0, \quad q \in \mathbf{Z}_+,$$

де $c_1 \ne c_1(y,q)$, $B_1 \ne B_1(y,q)$.

Зрозуміло, що для конкретних вектор-функцій Ω, M зазначені умови можуть допускати деталізацію (у вигляді зроблених припущень). Наприклад, для $2\vec{b}$-параболічної системи з неперервними коефіцієнтами, залежними від часу, дані умови виконуються з функціями $\hat{g}_j(t) = \breve{g}_j(t) = t^{1/(2b_j)}$, $d_1 = d_2 = 0$, $\alpha_j = \beta_j = \dfrac{1}{2b_j}$. При цьому твердження з б) набуває вигляду

$$\sup_{y>0}\left\{y^{q/(2b_j)}\exp\left\{-\left(y^{1/(2b_j)}\right)^{2b_j/(2b_j-1)}\right\}\right\}=$$

$$=\sup_{y>0}\left\{y^{q/(2b_j)}\exp\left\{-y^{1/(2b_j-1)}\right\}\right\}\leq cB^q q^{(1-1/(2b_j))q},$$

де c, B — додатні сталі, не залежні від q.

Далі, хоча й відомо, що фундаментальна матриця розв'язків $G_t(\cdot)$ системи (1) належить простору $P(W^{\Omega'}_{\mathrm{M}'})^m$ при кожному фіксованому t з $(0;T_0]$, для встановлення принципу локалізації розв'язку задачі Коші (1), (3) важливою є інформація про залежність оцінюючих сталих похідних ф. м. р. від часової змінної. Тому доведемо спочатку таке допоміжне твердження.

Лема 7. *Нехай виконується умова* A), $\hat{\alpha}\overset{\mathrm{df}}{=}\left\{\max\{\alpha_j,\beta_j\}, j=\overline{1,n}\right\}$ *(де* α_j, β_j *— величини з припущень* 3, 4 *цієї умови), а* $Z^k_q(t)\overset{\mathrm{df}}{=}\prod_{j=1}^n\left(\left(\hat{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\right)^k\times\right.$ $\left.\times\left(\chi_j\left(\frac{t}{4}\right)\right)^{q_j}\right)^{-1}$, $q\in\mathbf{Z}^n$, $k\in\mathbf{Z}$, $0<t<<1$. *Тоді*

$$\exists\{c,B,\delta\}\subset(0;+\infty)\quad\forall q\in\mathbf{Z}_+\quad\forall x\in\mathbf{R}^n\quad 0<t<<1:$$

$$\left|D^q_xG_t(x)\right|\leq cB^{|q|}q^{\hat{\alpha}q}Z^1_q(t)\exp\left\{-\sum_{j=1}^n\mathrm{M}'_j\left(\frac{x_j}{\delta\breve{g}_j(t/4)}\right)\right\}$$

$\left(\textit{тут } q^{\alpha q}=\prod_{j=1}^n q_j^{\alpha_jq_j}\right)$.

Доведення. Оскільки $G_t\in P\left(W^{\Omega'}_{\mathrm{M}'}\right)^m$, $t\in(0;T_0]$, то

$$D^q_xG_t(x)=(2\pi)^{-n}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left(i(\zeta+i\eta)\right)^qe^{i((\zeta+i\eta),x)}\Theta(t;\zeta+i\eta,0)d\zeta,$$

$$q\in\mathbf{Z}^n_+,\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad t\in(0;T_0],$$

причому $D^q_xG_t$ не залежить від $\eta\in\mathbf{R}^n$. Звідси, згідно з оцінкою (10), одержуємо

$$\left|D^q_xG_t(x)\right|\leq c_1B_1^{|q|}\exp\left\{\frac{t}{4}\left(Q^-(\delta^*_1,\delta^0_2;0,\eta)+g^*\right)-(\eta,x)\right\}\times$$

$$\times\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left(\prod_{j=1}^n|\zeta_j|^{q_j}+\prod_{j=1}^n|\eta_j|^{q_j}\right)\exp\left\{\frac{t}{4}Q^-(\delta^*_1,\delta^0_2;\zeta,0)\right\}d\zeta.$$

Враховуючи відповідні припущення з умови A) та виконуючи у попередньому інтегралі заміну змінних інтегрування згідно з правилом $\delta^*_1\hat{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\zeta_j=\tau_j$, $j=\overline{1,n}$, отримуємо таку оцінку:

$$\left|D^q_xG_t(x)\right|\leq c_2B_2^{|q|}q^{\hat{\alpha}q}Z^1_q(t)\exp\left\{\sum_{j=1}^n\mathrm{M}_j\left(\delta_3\breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\eta_j\right)-(\eta,x)\right\}\times$$

$$\times\left((q^{\alpha q})^{-1}\int\limits_{\mathbf{R}^n}\left(\prod_{j=1}^n\sup_{y>0}\left\{y^{q_j}e^{-\Omega_j(y)}\right\}\right)\times\right.$$

$$\times \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\Omega_j\left(\frac{1}{2}\tau_j\right)\right\}d\tau + \int\limits_{\mathbf{R}^n}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\Omega_j(\tau_j)\right\}d\tau\right) \leq$$

$$\leq c_3 B_3^{|q|} q^{\hat{\alpha} q} Z_q^1(t)\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_j\left(\delta_3\breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\eta_j\right) - (\eta, x)\right\},$$

де $0 < t << 1$, $x \in \mathbf{R}^n$, $q \in \mathbf{Z}_+^n$, а c_3, B_3, δ_3 — додатні сталі, не залежні від t, x і q.

Далі, скористаємося нерівністю Юнга [1]

$$\eta_j x_j \leq \mathrm{M}_j(\eta_j) + \mathrm{M}_j'(x_j), \qquad x_j \geq 0, \quad \eta_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{21}$$

та довільністю величини η. Виберемо цю величину так, щоб $(x, \eta) = \sum_{j=1}^{n}|x_j|\,|\eta_j|$, а нерівність (21), у якій η_j замінимо на $\delta_3\breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)|\eta_j|$, а x_j — на $|x_j|\left(\delta_3\breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\right)^{-1}$, перетворилася б у рівність

$$|\eta_j|\,|x_j| = \mathrm{M}_j\left(\delta_3\breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\eta_j\right) + \mathrm{M}_j'\left(x_j\left(\delta_3\breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\right)^{-1}\right), \quad j = \overline{1,n}.$$

Тоді одержимо таку оцінку:

$$\left|D_x^q G_t(x)\right| \leq c_4 B_4^{|q|} q^{\hat{\alpha} q} Z_q^1(t)\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_j'\left(x_j\left(\delta_3\breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\right)^{-1}\right)\right\},$$

$$0 < t << 1, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad q \in \mathbf{Z}_+^n,$$

де c_4, B_4, δ_3 — додатні сталі, не залежні від t, x і q.

Лему доведено.

Властивості ф. м. р. G_t, сформульовані у попередній лемі, покладемо в основу означення простору W_{M}^v. Нехай $\mathrm{M}(\cdot)$ — вектор-функція, визначена у п. 1, а $v = \{v_j, j = \overline{1,n}\} \subset (0; +\infty)$, тоді через W_{M}^v позначимо сукупність усіх функцій $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ таких, що

$$\left|D_x^q \varphi(x)\right| \leq c B_1^{|q|} q^{vq}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_j(b_1 x_j)\right\}, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \quad q \in \mathbf{Z}_+^n, \tag{22}$$

де c, B_1, b_1 — додатні сталі, залежні від φ і не залежні від q та x. Поруч з W_{M}^v розглянемо простір $W_{\mathrm{M},b}^{v,B}$, який складається з функцій $\varphi \in W_{\mathrm{M}}^v$, для яких нерівність (22) виконується зі сталими $B \geq B_1$ і $b_1 \geq b > 0$. Якщо для $\varphi \in W_{\mathrm{M},b}^{v,B}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{\substack{x \in \mathbf{R}^n \\ q \in \mathbf{Z}_+^n}}\left\{\frac{\left|D_x^q\varphi(x)\right|}{(B+\delta)^{|q|} q^{vq}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_j\big(b(1-\rho)x_j\big)\right\}}\right\},$$

$$\{\delta; \rho\} \subset \left\{\frac{1}{n}, n \geq 2\right\},$$

то, міркуючи, як і у випадку просторів типу S та W [1, 15], неважко переконатися, що з цими нормами простір $W_{\mathrm{M},b}^{v,B}$ є повним, досконалим, зліченно-нормованим, з нескінченно диференційовною операцією зсуву, а $W_{\mathrm{M}}^{v} = \bigcup\limits_{B,b>0} W_{\mathrm{M},b}^{v,B}$, причому $\varphi_v \xrightarrow[v\to+\infty]{W_{\mathrm{M}}^{v}} \varphi$ тоді і тільки тоді, коли: 1) $D_x^q\varphi_v(x) \xrightarrow[v\to+\infty]{} D_x^q\varphi(x)$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbf{K}$ з $\mathbf{R}^n$ $(\forall q \in \mathbf{Z}_+^n)$; 2) $\exists\{c, B, \delta\} \subset (0;+\infty)$ $\forall q \in \mathbf{Z}_+^n$ $\forall v \geq 1$ $\forall x \in \mathbf{R}^n$: $\left|D_x^q\varphi_v(x)\right| \leq cB^{|q|}q^{vq}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_j(\delta x_j)\right\}$. Більш того, для всіх $\{v_1, v_2\} \subset \mathbf{R}^n$ таких, що $v_1 \geq v_2 > 0$ (так далі позначатимемо те, що всі компоненти v_2 є додатними і не перевищують відповідні компоненти вектора v_1), $W_{\mathrm{M}}^{v_2} \subset W_{\mathrm{M}}^{v_1}$, причому мають місце такі неперервні і компактні вкладення:

$$W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'} \subset W_{\mathrm{M}'}^{\hat\alpha} \subset W_{\mathrm{M}'}^{v} \subset S \subset \left(W_{\mathrm{M}'}^{v}\right)' \subset \left(W_{\mathrm{M}'}^{\hat\alpha}\right)' \subset \left(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\right)', \quad \hat\alpha \leq v.$$

Зазначимо також, що, згідно з відомим критерієм Карлемана – Островського [19], при $0 < v \leq 1$ усі елементи простору W_{M}^{v} є квазіаналітичними функціями. Фінітні ж функції містяться серед елементів W_{M}^{v} лише у випадку $v > 1$.

Отже, у просторі $\left(W_{\mathrm{M}}^{v}\right)'$ при $v > 1$ коректним є таке означення [7]: узагальнені функції $\{f_1, f_2\} \subset \left(W_{\mathrm{M}}^{v}\right)'$ називатимемо рівними в області $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^n$, якщо $\langle f_1 - f_2, \varphi\rangle = 0$ для кожної основної функції φ з носієм у $\mathbf{Q}$.

Далі, нехай $R_f(t,\cdot) \overset{\mathrm{df}}{=} \left(\sum_{j=1}^{m}\left\langle f_j(\xi), G_t^{ij}(\cdot-\xi)\right\rangle\right)_{i=1}^{m}$, $t \in (0; T_0,]$, де $f \in \left(\left(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\right)^m\right)'$ а G_t^{ij} — елементи ф. м. р. G_t (при f такому, що $F[f]$ — мультиплікатор у просторі $(W_{\Omega}^{\mathrm{M}})^m$, вектор-функція $R_f(t,\cdot)$ є розв'язком задачі Коші (1), (3)). Оскільки у $W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}$ визначена і не лише неперервна, а й нескінченно диференційовна (у сенсі топології цього простору) операція зсуву [1], то, зваживши на те, що $G_t \in P\left(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\right)^m$, $t \in (0; T_0]$, приходимо до висновку, що $R_f(t,\cdot)$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbf{R}^n$ вектор-функцією при кожному t з $(0; T_0]$ й $f^T \in \left(\left(W_{\mathrm{M}'}^{\Omega'}\right)^m\right)'$.

Теорема 4. *Нехай для* $\Omega(\cdot)$, $\mathrm{M}(\cdot)$ *виконується умова* А) *і* $v_* \geq \hat\alpha + \gamma$, *якщо* $\hat\alpha + \gamma > 1$, *інакше* $-v_* > 1$ (*тут* γ — *параметр з властивості* 5 *умови* А)). *Тоді якщо узагальнена вектор-функція* $f^T \in \left(\left(W_{\mathrm{M}'}^{v_*}\right)^m\right)'$ *дорівнює нулеві в області* $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^n$, *то* $R_f(t,x) \xrightarrow[t\to+0]{} 0$ *рівномірно по* x *на кожному компакті* $\mathbf{K} \subset \mathbf{Q}$.

Доведення. Нехай $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_1 \subset \mathbf{Q}$, де $\mathbf{K}_1$ — деяка компактна множина в $\mathbf{R}^n$ така, що

$$\exists a_0 > 0 \quad \forall(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{K} \quad \forall(\xi_1,\ldots,\xi_n) \in \mathbf{R}^n \backslash \mathbf{K}_1: \tag{23}$$
$$|x_j - \xi_j| \geq a_0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Побудуємо функцію $\varphi \in W_{\mathrm{M}'}^{v_*}$ з носієм в $\mathbf{Q}$ так, щоб $\varphi = 1$ на $\mathbf{K}_1$. Оскільки $\left\{\varphi G_t^{ij}(x-\cdot); (1-\varphi)G_t^{ij}(x-\cdot)\right\} \subset W_{\mathrm{M}'}^{v_*}$ при кожному $t \in (0; T_0]$, $x \in \mathbf{R}^n$ й $\{i; j\} \subset \{1,\ldots,m\}$, то

$$R_f(t,x) = \left(\sum_{j=1}^{m}\left[\left\langle f_j, \varphi G_t^{ij}(x-\cdot)\right\rangle + \left\langle f_j, \eta G_t^{ij}(x-\cdot)\right\rangle\right]\right)_{i=1}^{m},$$

$$t \in (0; T_0], \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad \eta \overset{\mathrm{df}}{=} 1 - \varphi.$$

Зваживши на те, що узагальнена вектор-функція f дорівнює нулеві в області $\mathbf{Q}$, а $\operatorname{supp}\big(\varphi G_t^{ij}(x-\cdot)\big) \subset \mathbf{Q}$, $i, j = \overline{1, m}$, з останньої рівності дістанемо

$$R_f(t,x) = \widehat{g}(t)\left(\sum_{j=1}^{m}\Big\langle f_j, \Big(\widehat{g}(t)\Big)^{-1}\eta G_t^{ij}(x-\cdot)\Big\rangle\right)_{i=1}^{m},$$

$$\widehat{g}(\cdot) \overset{\mathrm{df}}{=} \prod_{j=1}^{n}\hat{g}_j\big((\cdot)/4\big).$$

Для доведення теореми достатньо встановити, що сукупність функцій $\omega_{t,x}^{ij}(\cdot) = \Big(\widehat{g}(t)\Big)^{-1}\eta G_t^{ij}(x-\cdot)$, $i, j = \overline{1, m}$, обмежена у просторі $W_{M'}^{v_*}$ рівномірно по t (для достатньо малих значень t), $x \in \mathbf{K}$ та $\xi \in \mathbf{R}^n$, тобто

$$\big|D_\xi^q \omega_{t,x}^{ij}(\xi)\big| \le cB^{|q|}q^{v_* q}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_j'(\delta\xi_j)\right\}, \quad q \in \mathbf{Z}_+^n, \tag{24}$$

де сталі c, B, δ не залежать від t, x і ξ. Але оскільки $\omega_{t,x}^{ij}(\xi) = 0$ для $\xi \in \mathbf{K}_1$, то оцінку (24) досить встановити лише для $\xi \in \mathbf{R}^n \backslash \mathbf{K}_1$.

Згідно з формулою Лейбніца диференціювання добутку двох функцій,

$$\Big|D_\xi^q\omega_{t,x}^{ij}(\xi)\Big| = \Big(\widehat{g}(t)\Big)^{-1}\left|\sum_{|l|=0}^{|q|}C_q^l D_\xi^l\eta(\xi)D_\xi^{q-l}G_t^{ij}(x-\xi)\right| \leqslant \widehat{\Phi}_{t,x}^{ij}(\xi) + \breve{\Phi}_{t,x}^{ij}(\xi),$$

де

$$\widehat{\Phi}_{t,x}^{ij}(\xi) = \Big(\widehat{g}(t)\Big)^{-1}\sum_{|l|=0}^{|q|}C_q^l\left|D_\xi^l\varphi(\xi)\right|\left|D_\xi^{q-l}G_t^{ij}(x-\xi)\right|,$$

$$\breve{\Phi}_{t,x}^{ij}(\xi) = \Big(\widehat{g}(t)\Big)^{-1}\left|D_\xi^q G_t^{ij}(x-\xi)\right|.$$

Звідси, зважаючи на те, що $\varphi \in W_{\mathrm{M}}^{v_*}$, а також на лему 7 та припущення 5 (з умови A)), дістаємо

$$\widehat{\Phi}_{t,x}^{ij}(\xi) \le c_1 B_1^{|q|}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_j'(\delta_1\xi_j)\right\}\sum_{|l|=0}^{|q|}l^{v_* l}(q-l)^{\hat{\alpha}(q-l)}Z_{q-l}^2(t)\times$$

$$\times\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_j'\left((x_j-\xi_j)\left(\delta\,\breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\right)^{-1}\right)\right\} \le$$

$$\le c_1 B_1^{|q|}\exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\mathrm{M}_j'(\delta_1\xi_j)\right\}\sum_{|l|=0}^{|q|}l^{v_* l}(q-l)^{\hat{\alpha}(q-l)}\times$$

$$\times\left(\prod_{j=1}^{n}\sup_{0<y<1}\left\{(\hat{g}_j(y))^{-2}(\chi_j(y))^{l_j-q_j}\exp\left\{-\mathrm{M}_j'\left(a_0\left(\delta\,\breve{g}_j(y)\right)^{-1}\right)\right\}\right\}\right) \le$$

$$\leq c_2 B_2^{|q|} q^{v_* q} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}'_j(\delta_1 \xi_j)\right\},$$

$$\xi \in \mathbf{R}^n \backslash \mathbf{K}_1, \quad x \in \mathbf{K}, \quad q \in \mathbf{Z}_+^n, \quad 0 < t << 1,$$

де сталі c_2, B_2, δ_1 не залежать від t, x, ξ і q.

Оцінимо тепер $\breve{\Phi}_{t,x}^{ij}$. Оскільки виконується (23), то існує $H > 0$ таке, що $|\xi_j| \leq H|x_j - \xi_j|$ для всіх $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n \backslash \mathbf{K}_1$ і $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}$. Тоді, знову скориставшись лемою 7 та припущенням 5, знайдемо

$$\breve{\Phi}_{t,x}^{ij}(\xi) \leqslant c B^{|q|} q^{\hat{\alpha} q} Z_q^2(t) \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}'_j\left((x_j - \xi_j)\left(\delta \breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\right)^{-1}\right)\right\} \leq$$

$$\leq c B^{|q|} q^{\hat{\alpha} q} \prod_{j=1}^{n} \sup_{0<y<<1} \left\{(\hat{g}_j(y))^{-2} (\chi_j(y))^{-q_j}\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\mathrm{M}'_j\left(a_0\left(2\delta \breve{g}_j(y)\right)^{-1}\right)\right\} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}'_j\left((x_j - \xi_j)\left(2\delta \breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\right)^{-1}\right)\right\} \leq$$

$$\leq c_1 B_1^{|q|} q^{v_* q} \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}'_j\left(\frac{\xi_j}{2H\delta p_j}\right)\right\},$$

де $\xi \in \mathbf{R}^n \backslash \mathbf{K}_1$, $x \in \mathbf{K}$, $q \in \mathbf{Z}_+^n$, $0 < t << 1$; $p_j = \sup\limits_{0<y<<1} \left(\breve{g}_j(y)\right)$, а сталі c_1, B_1, δ не залежать від t, x, ξ і q.

Отже, оцінка (24) справджується.

Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Проаналізувавши доведення попередньої теореми і зваживши на те, що $D_x^k R_f(t,x) = \left(\sum_{j=1}^{m} \left\langle f_j, D_x^k G_t^{ij}(x - \cdot)\right\rangle\right)_{i=1}^{m}$, $k \in \mathbf{Z}_+^n$, прийдемо до такого висновку: якщо узагальнена вектор-функція f^T з $\left(\left(W_{\mathrm{M}'}^{v_*}\right)^m\right)'$ збігається з нулем в області $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^n$, то $D_x^k R_f(t,x) \xrightarrow[t \to +0]{} 0$ рівномірно по x на кожному компакті $\mathbf{K} \subset \mathbf{Q}$.

Теорема 5. *Якщо для вектор-функцій* $\Omega(\cdot)$, $\mathrm{M}(\cdot)$ *виконується умова* A'), *а узагальнена вектор-функція* $f^T \in \left(\left(W_{\mathrm{M}'}^{v_*}\right)^m\right)'$ *збігається в області* $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}^n$ *з* k *разів неперервно диференційовною у цій області вектор-функцією* $r^T(\cdot)$, *то* $D_x^l R_f(t,x) \xrightarrow[t \to +0]{} D_x^l r(x)$ *рівномірно по* x *на кожному компакті* $\mathbf{K} \subset \mathbf{Q}$ *для всіх* $l \in \mathbf{Z}_+^n$, $|l| \leq |k|$.

Доведення. Для спрощення викладу доведення проведемо у випадку, коли $n = 2$ (решта випадків n реалізується аналогічно).

Нехай $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}_1$, φ, η — величини, означені при доведенні попередньої теореми. На підставі зауваження 1, а також того, що $D_x^l R_f(t,x) = \left(\sum_{j=1}^{m} \left\langle f_j, D_x^l G_t^{ij}(x - \cdot)\right\rangle\right)_{i=1}^{m}$, $D_x^l G_t^{ij}(x - \xi) = (-1)^{|l|} D_\xi^l G_t^{ij}(x - \xi)$, $D_\xi^l f = D_\xi^l r$ в $\mathbf{Q}$ та $\eta D_\xi^l f = 0$ на $\mathbf{K}_1$, доведення даної теореми зводиться до доведення того, що

$$J_t^l(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \overline{G_t(x-\xi)}\, \phi(\xi)\, d\xi \xrightarrow[t\to+0]{} \phi(x)$$

рівномірно по $x \in \mathbf{K} \subset \mathbf{Q}$, де $\phi(y) = \varphi(y) D_\xi^l r(y)$, $l \in \mathbf{Z}_+^n$, $|l| \le |k|$.

Оскільки згідно з властивістю оборотності перетворень Фур'є $\int_{\mathbf{R}^n} \overline{G_t(x-\xi)}\, d\xi =$ $= \mathrm{E} + O(t)$, де $O(t) = \int_0^t \overline{\mathcal{A}_{t_1}(0)}\, dt_1 + \int_0^t \overline{\mathcal{A}_{t_1}(0)} \int_0^{t_1} \overline{\mathcal{A}_{t_2}(0)}\, dt_2 dt_1 + \ldots$, то

$$\left| J_t^l(x) - \phi(x) \right| = \left| \int\limits_{\mathbf{R}^n} \overline{G_t(x-\xi)}\; (\phi(\xi) - \phi(x))\, d\xi + O(t)\phi(x) \right| \le$$

$$\le m \int\limits_{\mathbf{R}^n} \left|G_t(\zeta)\right| \left|\phi(x-\zeta) - \phi(x)\right| d\zeta + m \left|O(t)\right| \left|\phi(x)\right|, \qquad t \in (0, T_0], \quad x \in \mathbf{R}^n. \tag{25}$$

Вектор-функція ϕ є фінітною (з носієм в $\mathbf{Q}$) і неперервною, тому: I) $\sup\limits_{x\in\mathbf{K}} \left|\phi(x)\right| =$ $= N_1 < +\infty$; II) $\sup\limits_{\substack{x\in\mathbf{K}\\ \zeta\in\mathbf{R}^n}} \left|\phi(x-\zeta) - \phi(x)\right| = N_2 < +\infty$; III) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall \{x_1, x_2\} \in$ $\in \mathbf{K}\ \forall \{\zeta_1, \zeta_2\} \in \mathbf{R}^2$, $|x_j - \zeta_j - x_j| = |\zeta_j| < \delta$, $j = \overline{1,2}$: $\left|\phi(x-\zeta) - \phi(x)\right| < \varepsilon$.

Звідси, скориставшись лемою 7 та властивостями а) і б) з умови A$'$), одержимо, що для всіх $x \in \mathbf{K}$ і достатньо малих $t > 0$

$$\int\limits_{|\zeta_1|<\delta} \int\limits_{|\zeta_2|<\delta} \left|G_t(\zeta)\right| \left|\phi(x-\zeta) - \phi(x)\right| d\xi \le$$

$$\le \varepsilon c \left(\prod_{j=1}^{2} \frac{\breve{g}_j(t)}{\hat{g}_j(t)} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-\mathrm{M}_j'(\tau_j)} d\tau_j \right) \le \varepsilon c_1, \quad c_1 \ne c_1(t),$$

$$\int\limits_{|\zeta_1|\ge\delta} \int\limits_{|\zeta_2|\ge\delta} \left|G_t(\zeta)\right| \left|\phi(x-\zeta) - \phi(x)\right| d\xi \le$$

$$\le c N_2 \left(\prod_{j=1}^{2} \left(\hat{g}_j(t)\right)^{-1} \int\limits_{|\zeta_j|\ge\delta} \exp\left\{ -\mathrm{M}_j'\left(\zeta_j \left(\delta \breve{g}_j\left(\frac{t}{4}\right)\right)^{-1} \right) \right\} d\zeta_j \right) \le$$

$$\le c_1 N_2 \delta^{-2} \prod_{j=1}^{2} \frac{(\breve{g}_j(t))^2}{\hat{g}_j(t)} \left(\sup_{y>0} \left\{ y^2 e^{-\mathrm{M}_j'(y)} \right\} \right) \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-M_j'(\delta_2 \zeta_j)} d\zeta_j \le$$

$$\le c_2 N_2 \delta^{-2} \prod_{j=1}^{2} \breve{g}_j(t), \quad c_2 \ne c_2(t), \tag{26}$$

$$\int\limits_{|\zeta_1|<\delta} \int\limits_{|\zeta_2|\ge\delta} \left|G_t(\zeta)\right| \left|\phi(x-\zeta) - \phi(x)\right| d\xi \le$$

$$\le c_2 N_2 \delta^{-1} \breve{g}_2(t) \left(\sup_{y>0} \left\{ y^2 e^{-\mathrm{M}_2'(y)} \right\} \right) \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-M_1'(\tau_1)} d\tau_1 \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-M_2'(\delta_2 \zeta_2)} d\zeta_2 \le$$

$$\leq c_3 N_2 \delta^{-1} \breve{g}_2(t), \quad c_3 \neq c_3(t),$$

$$\int\limits_{|\zeta_1|\geq\delta} \int\limits_{|\zeta_2|<\delta} \big|G_t(\zeta)\big|\big|\phi(x-\zeta)-\phi(x)\big|d\xi \leq c_4 N_2 \delta^{-1} \breve{g}_1(t), \quad c_4 \neq c_4(t).$$

Тепер нехай $b(t) = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \big\{\breve{g}_j(t)\big\}$. Тоді, поклавши $\sqrt{b(t_0)} < \delta$, з (25) і (26) дістанемо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t_0 \in (0;\varepsilon) \quad \forall t < t_0, \quad t \in (0;1):$$

$$\sup_{x\in\mathbf{K}} \big|J_t^l(x)-\phi(x)\big| < c_1\varepsilon + N_2\Big(c_2 b(\varepsilon) + (c_3+c_4)\sqrt{b(\varepsilon)}\Big) + N_1 O_1(\varepsilon),$$

$$O_1(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to+0]{} 0.$$

Теорему доведено.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.
2. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: Физматгиз, 1961. – 382 с.
3. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40 – 43.
4. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
5. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $2\vec{b}$-Параболические системы // Тр. сем. по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.
6. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: Мир, 1968. – 427 с.
7. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Докл. АН СССР. – 1981. – **257**, № 4. – С. 799 – 804.
8. *Городецкий В. В.* Принцип локализации для решений задачи Коши для параболических по Петровскому систем в классах обобщенных функций // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 10. – С. 5 – 7.
9. *Гуревич Б. Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечноразностных систем // Докл. АН СССР. – 1954. – **99**, № 6. – С. 893 – 896.
10. *Schwartz L.* Theorie des distributions // Acta Sci. Industry. – Paris: Hermann, 1950. – **1**, № 1091.
11. *Літовченко В. А.* Коректна розв'язність задачі Коші для одного інтегрального вигляду // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 2. – С. 185 – 197.
12. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
13. *Городецький В. В., Ленюк О. М.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з оператором диференціювання нескінченного порядку // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2000. – Вип. № 4. – С. 65 – 70.
14. *Городецький В. В., Мартинюк О. В.* Задача Коші для еволюційних рівнянь з операторами диференціювання та Бесселя нескінченного порядку // Допов. НАН України. – 2003. – № 9. – С. 18 – 23.
15. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
16. *Шилов Г. Е.* Введение в теорию линейных пространств. – 2-е изд. – М.: Гостехиздат, 1956. – 249 с.
17. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
18. *Борок В. М.* Решение задачи Коши для некоторых типов систем линейных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. – 1954. – **97**, № 6. – С. 949 – 952.
19. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. – М.: Гостехиздат, 1937. – 174 с.

Одержано 15.09.2005,
після доопрацювання — 06.03.2006