УДК 512.542

Вэньбинь Го (Сюйчжов. пед. ун-т, Китай),
К. П. Шам (Китай. ун-т Гонконга, Шатин, Китай),
А. Н. Скиба (Гомел. ун-т им. Ф. Скорины, Беларусь)

X-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

We study finite groups whose maximal subgroups of Sylow subgroups are permutable with maximal subgroups.

Вивчаються скінченні групи, у яких максимальні підгрупи силовських підгруп є переставними з максимальними підгрупами.

1. Введение. Все рассматриваемые в работе группы конечны.

Строение конечной группы тесно связано с условиями, налагаемыми на максимальные подгруппы силовских подгрупп самой группы или силовских подгрупп некоторых выделенных подгрупп этой группы. Впервые это было замечено в работе Хупперта [1], где, в частности, было доказано, что разрешимая группа G является сверхразрешимой, если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G перестановочны со всеми членами некоторой силовской системы группы G. Несколько позднее Сринивазан [2] доказал, что группа G является сверхразрешимой при условии, что в G имеется такая нормальная подгруппа N со сверхразрешимой фактор-группой G/N, что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из N нормальны в G. Этих два результата получили развитие во многих исследованиях. В частности, в работе [3] был получен аналог отмеченного результата работы [2] для c-нормальных подгрупп (см. также работы [4, 5]). Асаад и Хелиел [6] доказали, что группа G является сверхразрешимой, если G имеет такой набор силовских подгрупп Σ (содержащий в точности одну силовскую p-подгруппу для каждого простого делителя p ее порядка $|G|$), что все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы из Σ перестановочны со всеми членами Σ. Сверхразрешимость группы G, в которой все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы из G дополняемы в G, была доказана Болестером-Болинчес и Го Шуином [7]. Отметим, что в работе [8] (см. также [9]) была доказана сверхразрешимость группы G при условии, что G разрешима и имеет такую нормальную подгруппу со сверхразрешимой фактор-группой G/N, что все ненормальные в G максимальные подгруппы силовских подгрупп из $F(N)$ имеют сверхразрешимые добавления в G. Целью данной работы является дальнейший анализ некоторых результатов данного направления на основе вводимого ниже понятия X-перестановочной подгруппы.

2. X-перестановочные подгруппы. Напомним, что подгруппы A и B называются перестановочными, если $AB = BA$. Подгруппа группы G называется перестановочной [10] или квазинормальной [11], если она перестановочна со всеми подгруппами из G. Часто встречается ситуация, когда подгруппы A и B группы G не являются перестановочными, но в G имеется такой элемент x, для которого имеет место $AB^x = B^xA$.

Рассмотрим несколько типичных ситуаций такого рода:

1. Если $G = AB$ — группа, A_p и B_p — силовские p-подгруппы в A и B соответственно, то в общем случае $A_pB_p \neq B_pA_p$, но G имеет такой элемент x, что $A_pB_p^x = B_p^xA_p$ (см. [13], лемма 11.6).

2. Если P и Q — силовские подгруппы разрешимой группы G, то для некоторого $x \in G$ имеем $PQ^x = Q^xP$ (см. [13], теорема 2.4).

3. Если M — максимальная подгруппа в $G = PSL(2,7)$, то для каждой силовской подгруппы P из G в G имеется такой элемент x, что $MP^x = P^xM$. Понятно также, что в общем случае подгруппа M не является перестановочной с P.

4. Если A и B — нормально погруженные подгруппы разрешимой группы G (см. [10], определение (7.1)), то согласно теореме (17.10) из [10] A перестановочна с некоторым B^x.

При анализе ситуаций подобного рода удобно пользоваться следующим естественным определением [14, 15].

Определение 1. *Пусть A, B — подгруппы группы G и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Будем говорить, что A X-перестановочна с B, если в X имеется такой элемент x, что $AB^x = B^xA$.*

Заметим, что 1-перестановочные подгруппы — это в точности перестановочные подгруппы. В другом предельном случае мы имеем дело с G-перестановочными подгруппами. Такие подгруппы были впервые рассмотрены в работе авторов [15] (см. также [16]) и нашли ряд интересных приложений [9, 16 – 18].

Рассмотрим следующий элементарный пример, демонстрирующий отличие X-перестановочных подгрупп от перестановочных подгрупп.

***Пример* 1.** Пусть p — нечетное простое число и $A = \langle x, y \mid x^{p^2} = y^p = 1, x^y = x^{1+p}\rangle$. Рассмотрим $L = \langle y \rangle$. Пусть g — инволюция в $\mathrm{Aut}L$, $B = [L]\langle g \rangle$, $\alpha\colon B \to \mathrm{Sym}(p)$ — транзитивное подстановочное представление группы B степени p, $G = A \wr_\alpha B = [K]B$ — сплетение групп A и B относительно α, где K — база $A \wr_\alpha B$, $R = L^\natural$ (мы используем здесь терминологию из [10]) и $N = N_G(R)$. Понятно, что $B \subseteq N$ и $N \cap K = (N_A(L))^\natural$. Поскольку $|A| = p^3$ и $N_A(L) \neq A$, $N_A(L)$ — абелева группа, и поэтому $N \cap K$ также является абелевой группой. Ясно, что R G-перестановочна со всеми силовскими подгруппами группы G и R субнормальна в G. Допустим, что R перестановочна со всеми силовскими 2-подгруппами из G. Тогда для каждого $x \in G$ имеем $\langle g \rangle^x \subseteq N$. Следовательно, для нормального замыкания $\langle g \rangle^G$ подгруппы $\langle g \rangle$ в G $L \subseteq \langle g \rangle^G \subseteq N$ и поэтому $B^G \subseteq N$. Пусть теперь $M = \{(a_1, \ldots, a_p) \mid a_i \in A$ и $a_1 \ldots a_p \in A'\}$. Тогда согласно теореме (18.4) [10] $B^G = MB$. Следовательно, $M \subseteq N$. Но если $a_1 = \ldots = a_p$, то $a_1^p \subseteq A'$, и поэтому M содержит подгруппу, изоморфную A. Это означает, что $N \cap K$ не является абелевой группой. Полученное противоречие показывает, что R не перестановочна с некоторой силовской 2-подгруппой группы G.

Используя понятие X-перестановочности, можно охарактеризовать многие важные классы групп по наличию в них тех или иных X-перестановочных подгрупп для подходящих H. Например, используя это понятие, можно дать следующую интерпретацию классической теоремы Холла о разрешимых группах (см., например, [13], теорема 2.4): *группа G разрешима тогда и только тогда, когда любые ее две силовские подгруппы G-перестановочны*. Согласно теореме 3.8 из [15], *группа G является сверхразрешимой тогда и только тогда, когда все ее максимальные подгруппы G-перестановочны со всеми другими подгруппами этой группы*. Новые характеризации в терминах X-перестановочных подгрупп для класов разрешимых, сверхразрешимых и нильпотентных групп можно найти в работах [9, 14 – 18].

Наш первый результат в рассматриваемом во введении направлении дает новое описание сверхразрешимых групп на основе понятия X-перестановочных подгрупп.

Теорема 1. *Пусть G — группа и $X = F(G)$ — ее подгруппа Фиттинга. Тогда G является сверхразрешимой в том и только в том случае, когда $G = AB$, где A и B — такие субнормальные в G подгруппы* (*по крайней мере, одна из которых нильпотентна*), *что все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из A и B X-перестановочны со всеми максимальными подгруппами из G.*

Отметим следующий частный случай теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть G — группа и $X = F(G)$ — ее подгруппа Фиттинга. Тогда G является сверхразрешимой в том и только в том случае, когда все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G X-перестановочны со всеми максимальными подгруппами из G.*

В работе [12] дано описание групп, в которых все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп нормальны. В связи с этим результатом естественно исследовать строение групп, в которых максимальные подгруппы силовских подгрупп X-перестановочны со всеми силовскими подгруппами.

Теорема 3. *Пусть G — группа и $X = F(G)$ — ее подгруппа Фиттинга. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *все максимальные подгруппы все силовских подгрупп из G X-перестановочны со всеми силовскими подгруппами из G*;

2) *$G = [D]M$ — сверхразрешимая группа, где D и M — нильпотентные холловские подгруппы в G и каждая максимальная подгруппа из D нормальна в G.*

3. Доказательство теоремы 1. Следующая лемма является очевидной.

Лемма 1. *Пусть A, B и X — подгруппы группы G и $K \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *если A X-перестановочна с B, то B X-перестановочна с A*;

2) *если A X-перестановочна с B, то A^x H^x-перестановочна с B^x при всех $x \in G$*;

3) *если A X-перестановочна с B, то AK/K XK/K-перестановочна с BK/K в G/K*;

4) *пусть $K \leq A$; тогда A/K XK/K-перестановочна с BK/K в G/K, если и только если A X-перестановочна с B в G.*

Лемма 2. *Пусть G — разрешимая группа, $X = F(G)$ и M — максимальная в G подгруппа. Предположим, что M имеет в G простой индекс. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *подгруппа M G-перестановочна со всеми подгруппами из G*;

2) *если группа G сверхразрешима, то M X-перестановочна со всеми подгруппами из G.*

Доказательство. 1. Пусть T — произвольная подгруппа в G, $|G : M| = p$. Если $\{M_1, \ldots, M_t\}$ — некоторая силовская система в M и $\{T_1, \ldots, T_l\}$ — некоторая силовская система T, то согласно [19] группа G имеет такие силовские системы $\Sigma = \{P_1, \ldots, P_n\}$ и $\Sigma_1 = \{Q_1, \ldots, Q_n\}$, что $M_i = P_i \cap M$ для всех $i = 1, \ldots, t$ и $T_i = Q_i \cap T$ для всех $i = 1, \ldots, l$. Более того, системы Σ и Σ_1 сопряжены, т. е. G имеет элемент x такой, что $Q_i^x = P_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Не теряя общности можем предполагать, что P_1 — силовская p-подгруппа в G. Тогда $M_2 = P_2, \ldots, M_t = P_t$.

Предположим, что $T_1^x \subseteq M_1$. Тогда имеем

$$T^x \subseteq M_1 P_2 \ldots P_t = M,$$

и поэтому $T^x M = M = M T^x$.

С другой стороны, если $T_1^x \not\subseteq M_1$, то поскольку $|G : M| = p$, имеем $|P_1 : M_1| = p$ и, следовательно, $P_1 = T_1^x M_1$. Таким образом, $T^x M = T_2^x \ldots T_l^x T_1^x M_1 M_2 \ldots \ldots M_t = T_2^x \ldots T_l^x P_1 P_2 \ldots P_t = G = M T^x$.

2. Пусть $N = N_G(\Sigma_1)$. Тогда согласно [19] N покрывает все центральные главные факторы группы G. Но группа G сверхразрешима, и поэтому согласно [20] имеем $G' \subseteq X = F(G)$. Таким образом, $G = XN$, и поэтому $x = an$, где $a \in X$ и $n \in N$. Следовательно, $MT^a = T^a M$.

Лемма 3. *Пусть A — субнормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $\Phi(A) \subseteq \Phi(G)$;

2) *для любой минимальной нормальной в G подгруппы H имеет место $H \subseteq N_G(A)$*;

3) *если A является π-группой, то $A \subseteq O_\pi(G)$.*

Доказательство. 1. Предположим, что $A \neq G$ и t — такое наименьшее натуральное число, что G имеет ряд подгрупп $A = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_t = G$. Согласно [20] $\Phi(A) \subseteq \Phi(G_1)$. В свою очередь, используя индукцию по t, видим, что $\Phi(G_1) \subseteq \Phi(G)$. Утверждения 2 и 3 хорошо известны. Доказательство первого из них можно найти, например, в книге [10, с. 47]. Утверждение 3 доказано в книге [19, с. 71].

***Доказательство теоремы* 1.** Если G — сверхразрешимая группа, то $G = XG$, и в силу леммы 2 все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из X и G X-перестановочны со всеми максимальными подгруппами группы G.

Предположим теперь, что $G = AB$, где A и B — субнормальные в G подгруппы, причем одна из этих подгрупп нильпотентна и все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из A и B X-перестановочны со всеми максимальными подгруппами группы G. Покажем, что группа G сверхразрешима. Предположим, что это не так, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда

1. *Фактор-группа G/H сверхразрешима для любой минимальной нормальной подгруппы H из G.*

Пусть $H \neq G$. Тогда, поскольку $|G/H| < |G|$, необходимо лишь проверить, что условие верно для G/H. Прежде всего заметим, что $G/H = (AH/H)(BH/H)$ — произведение субнормальных в G/H подгрупп AH/H и BH/H, и одна из этих подгрупп нильпотентна. Понятно также, что одна из групп AH/H, BH/H нетривиальна. Пусть, например, $AH/H \neq 1$. Пусть p — произвольный простой делитель порядка группы AH/H, P/H — силовская p-подгруппа в AH/H и P_1/H — произвольная максимальная в P/H подгруппа. Покажем, что подгруппа P_1/H $F(G/H)$-перестановочна с любой максимальной подгруппой M/H из G/H. Если P_0 — силовская p-подгруппа в P, то $P = HP_0$ и P_0 является силовской p-подгруппой в AH. Значит, найдутся такая силовская p-подгруппа A_p в A и такая силовская p-подгруппа H_p в H, что $P_0 = A_pH_p$, и поэтому $P/H = A_pH/H$. Покажем, что $P_1 \cap A_p$ — максимальная в A_p подгруппа. Прежде заметим, что $P_1 \cap A_p \neq A_p$. Действительно, в противном случае $A_p \subseteq P_1$ и, значит, $P_1/H = A_pH/H = /H$, что противоречит выбору подгруппы P_1/H. Допустим, что в группе G имеется такая подгруппа T, что $P_1 \cap A_p \subset T \subset A_p$. Тогда $P_1 = H(_1 \cap A_p) \subseteq TH \subseteq HA_p = P$. Но P_1 — максимальная в P подгруппа, и поэтому либо $P_1 = TH$, либо $TH = HA_p$. Если $P_1 = TH$, то $T \subseteq P_1 \cap A_p \subset T$, что невозможно. Итак, $TH = HA_p$, и поэтому $A_p = A_p \cap TH = T(A_p \cap H) \subseteq (P_1 \cap A_p) = T$. Вновь полученное противоречие показывает, что $P_1 \cap A_p$ — максимальная в A_p подгруппа. Согласно условию подгруппа $P_1 \cap A_p$ X-перестановочна с M в G. Значит, по лемме 1 подгруппа $(P_1 \cap A_p)H/H$ XH/X-перестановочна с M/H в G/H. Но $XH/H \subseteq F(G/H)$, и поэтому можно заключить, что все максимальные подгруппы любой силовской подгруппы из AH/H $F(G/H)$-перестановочны со всеми максимальными подгруппами из G/H. Это завершает доказательство утверждения 1.

2. *В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа* (это непосредственно следует из того известного факта, что класс всех сверхразрешимых групп замкнут относительно образования подпрямых произведений).

3. *Минимальная нормальная подгруппа H группы G является абелевой p-группой для некоторого простого числа p.*

Предположим, что группа H не является абелевой и p — наименьший простой делитель ее порядка $|H|$. Тогда в силу утверждения 2 $X = 1$. Пусть $H = H_1 \times \ldots \times H_t$, где $H_1, \ldots, H_t$ — простые компоненты группы H. Понятно, что H_i не имеет нормального p-дополнения и поэтому силовская p-подгруппа P_i из H_i не является циклической. Это, в частности, означает, что $|P_i| \neq p$. Поскольку подгруппа H является неабелевой и ее централизатор $C = C_G(H)$ — нормальной в G подгруппой, в силу утверждения 2 $C \subseteq H$. Значит, в силу леммы 3 и факторизации $G = AB$ имеем либо $H \cap A \neq 1$, либо $H \cap B \neq 1$. Не уменьшая общность можем считать, что имеет место первый случай. Поскольку, очевидно, пересечение $D = H \cap A$ является субнормальной в H подгруппой, то для некоторого i имеем $H_i \subseteq A$. Пусть $P_i \subseteq A_p$, где A_p — силовская p-подгруппа в A. Выберем в H силовскую p-подгруппу H_p, которая содержит P_i, и пусть $N = N_G(H_p)$. Тогда согласно лемме Фраттини $G = HN$. Поскольку, очевидно, $N \neq G$, можно выбрать в G максимальную подгруппу M со свойством $N \subseteq M$. Пусть P — такая силовская p-подгруппа в G, которая содержит H_p. Тогда, поскольку $P \cap H = H_p$, $P \subseteq N$, и поэтому p не делит $|G : M|$. Пусть теперь L — произвольная максимальная подгруппа в A_p. Тогда на основании изложенного выше $L \neq 1$. Согласно условию для всех $x \in G$ имеет место $LM^x = M^xL$. Это, в свою очередь, влечет равенство $LM^x = M^x$. Таким образом, $L \subseteq M_G$. Но поскольку $G = HN$ и H — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, то $M_G = 1$ и, следовательно, $L = 1$. Полученное противоречие показывает, что H — абелева p-группа.

4. *$G = [H]M$, где M — сверхразрешимая максимальная в G подгруппа и $H = O_p(G) = C_G(H) = X$.*

Пусть $C = C_G(H)$. В силу утверждения 1 для некоторой максимальной в G подгруппы M имеет место $G = HM$. Понятно, что $H \cap M = 1$. Кроме того, в силу утверждения 1 подгруппа M сверхразрешима. Согласно утверждению 2

$M_G = 1$ и поэтому $C \cap M = 1$. Следовательно, $C = C \cap HM = H(C \cap M) = H$. Теперь утверждение 4 вытекает из того известного факта, что подгруппа Фиттинга содержится в централизаторе любого главного фактора группы.

5. $F(A) = O_p(A) = H \cap A$ *и* $F(B) = O_p(B) = H \cap B$.

Предположим, что $F(A) \neq O_p(A)$. Тогда для некоторого простого делителя $q \neq \neq p$ порядка группы A имеет место $O_q(A) \neq 1$. Но поскольку $O_q(A)$ — нормальная в A подгруппа, $O_q(A) \neq 1$ субнормальна в G, и поэтому согласно лемме 3 $O_q(G) \neq 1$, что невозможно в силу утверждений 2 и 3. Итак, $F(A) = O_p(A)$. Снова применяя лемму 3 и учитывая утверждение 4, видим, что $O_p(A) \subseteq O_p(G) = H$. Это влечет $O_p(A) = H \cap A$. Аналогично устанавливаем, что $F(B) = O_p(B) = H \cap B$.

6. $O_p(A) = C_A(O_p(A))$ *и* $O_p(B) = C_B(O_p(B))$ — *группы простого порядка*.

Покажем, например, что $O_p(A) = C_A(O_p(A))$ — группа порядка p. Но прежде установим, что $|O_p(A)| = p$. Предположим, что это не так, и пусть A_p — силовская p-подгруппа в A. Тогда $O_p(A) \subseteq A_p$. Если $O_p(A) \subseteq \Phi(A_p)$, то согласно [20] $O_p(A) \subseteq \Phi(A)$. Применяя теперь лемму 3, видим, что $O_p(A) \subseteq \Phi(G)$. Но в силу утверждения 5 $O_p(A) = H \cap A$, что влечет $H \cap \Phi(G) \neq 1$. Следовательно, $H \subseteq \Phi(G)$, что противоречит утверждению 4. Значит, подгруппа $O_p(A)$ не содержится в $\Phi(A_p)$. Пусть P_1 — произвольная максимальная в A_p подгруппа, не содержащая $O_p(A)$. Согласно условию в подгруппе X найдется такой элемент x, для которого произведение $M^x P_1$ является подгруппой в G. Поскольку согласно нашему предположению $|O_p(A)| > p$, то $L = P_1 \cap O_p(A) \neq 1$. Но согласно утверждению 5 $O_p(A) = H \cap A$, и поэтому $H \cap P_1 \neq 1$. Так как, очевидно, $M^x \cap H = 1$, то это влечет $M^x P_1 \neq M^x$. Значит, $M^x P_1 = G$, и поэтому согласно лемме 1.19 из [13] $MP_1 = MA_p = G$. Пусть $D = M \cap A_p$ и P_2 — такая максимальная в A_p подгруппа, которая содержит подгруппу D. Согласно условию $M^x P_2 = P_2 M^x$ для некоторого элемента $x \in X$. Если $M^x P_2 = G$, то согласно лемме 1.19 из [13] $MP_2 = G$, и тогда $|G| = (|M||A_p|)/|D| = (|M||P_2|)/|M \cap P_2| = (|M||P_2|)/|D|$, что влечет $A_p = P_2$. Полученное противоречие показывает, что $M^x P_2 \neq G$, и поэтому $P_2 \subseteq M^x$. При этом поскольку $MA_p = G$, то $M^x A_p = G$. Вместе с предыдущим замечанием это показывает, что $|G : M| = p$. Но из утверждения 4 следует, что $|G : M| = |H|$, и поэтому H — циклическая группа простого порядка. Значит, согласно утверждению 4 $G/H = G/C_G(H)$ — циклическая группа, поскольку $G/C_G(H)$ вкладывается в группу автоморфизмов группы H. Значит, группа G сверхразрешима. Полученное противоречие показывает, что $O_p(A)$ — группа порядка p.

Теперь покажем, что $O_p(A) = C_A(O_p(A))$. Прежде всего заметим, что согласно утверждениям 1 и 3 A — разрешимая группа и поэтому любая минимальная нормальная подгруппа группы A содержится в $F(A)$. Но согласно утверждению 4 $F(A) = O_p(A)$, и на основании доказанного выше $O_p(A)$ — группа порядка p. Значит, $O_p(A)$ — единственная минимальная нормальная подгруппа группы A. Так как при этом, согласно лемме 3, подгруппа $O_p(A)$ не содержится в $\Phi(A)$, используя рассуждения, примененные при доказательстве утверждения 4, получаем требуемое равенство $O_p(A) = C_A(O_p(A))$.

Заключительное противоречие.

Согласно условию одна из подгрупп A, B нильпотентна. Не уменьшая общность можно считать, что A — нильпотентная группа. Тогда в силу утверждения 6

$|A| = p$, что вместе с утверждением 5 влечет $A \subseteq H$. Но тогда $G = AB = HB$, и поэтому согласно утверждению 5 подгруппа $O_p(B) = H \cap B$ является нормальной в G. Применяя теперь утверждение 6 и учитывая, что H — минимальная нормальная подгруппа в G, видим, что $|H| = p$, но это невозможно.

Теорема доказана.

4. Доказательство теоремы 3.

Лемма 4. *Пусть $\Sigma = \{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$ — набор силовских подгрупп группы G (по одной для каждого простого делителя порядка G), где P_i — p_i-группа и $p = p_1$ — наименьший простой делитель $|G|$. Пусть $X = F(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

I. *Если все максимальные подгруппы из P_1 X-перестановочны со всеми подгруппами из Σ, то группа G p-нильпотентна.*

II. *Если все максимальные подгруппы любой группы из Σ X-перестановочны со всеми подгруппами из Σ, то G сверхразрешима.*

Доказательство. I. Предположим, что это утверждение не верно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда

1. *Фактор-группа G/H является p-нильпотентной для любой минимальной нормальной подгруппы H из G.*

Мы можем предполагать, что p делит $|G/H|$. Для любой силовской подгруппы P/H из G/H можно подобрать такие элемент $x \in G$ и индекс i, что $P_iH/H = (P/H)^x$. При этом p — наименьший простой делитель порядка фактор-группы G/H. Следовательно, применяя лемму 1 и используя соответствующие рассуждения из доказательства теоремы 1, видим, что условие леммы наследуется фактор-группой G/H. Но $|G/H| < |G|$, и поэтому в силу выбора группы G имеем утверждение 1.

2. *В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа H и $H \nsubseteq \Phi(G)$.*

Это непосредственно следует из утверждения 1 и того известного факта (см., например, [19, с. 34]), что класс всех p-нильпотентных групп замкнут относительно образования подпрямых произведений и всегда из p-нильпотентности фактор-группы $G/\Phi(G)$ следует p-нильпотентность самой группы G.

3. *Подгруппа P_1 не является циклической* (поскольку p — наименьший простой делитель порядка группы G, это непосредственно следует из [20]).

4. *Подгруппа H является p-группой.*

Предположим, что это не так и L — минимальная нормальная в H подгруппа. Если L — абелева группа, то p не делит H, что в силу утверждения 1 влечет p-нильпотентность группы G. Значит, L — простая неабелева группа. Применяя теперь утверждение 2, видим, что $X = 1$. Поскольку L является субнормальной подгруппой в G, $P_i \cap L$ — силовская p_i-подгруппа в L. Предположим, что $P_1 \cap L \neq P_1$ и M — максимальная в P_1 подгруппа, содержащая $P_1 \cap L$. Согласно условию $P_iM = MP_i$, и поэтому $P_iM \cap L = (P_1 \cap L)(P_i \cap L)$. Это означает, что в L имеются холловские $\{p, p_i\}$-подгруппы для всех p_i, делящих порядок группы L. Последнее противоречит [21]. Таким образом, $P_1 \subseteq L$, и поэтому условие леммы переносится на L. В силу выбора группы G мы должны заключить, что $L = G$. Это вновь приводит нас к противоречию с [21].

5. *$G = [H]M$, где M — p-нильпотентная максимальная в G подгруппа и* $H = O_p(G) = C_G(H) = X$ (см. доказательство теоремы 1).

6. *Заключительное противоречие.*

Пусть $i \neq 1$ и $T = P_1P_i$. Понятно, что $X = H \subseteq P_1$, и поэтому согласно условию в силу утверждения 3 $P_1P_i = P_1P_i$. Таким образом, T является подгруппой в G. Понятно также, что условие леммы выполняется и в T. Предположим, что $T \neq G$. Тогда в силу выбора G T — p-нильпотентная группа, и поэтому P_i — нормальная в T подгруппа, что влечет $P_i \subseteq C_G(H) = H$. Это противоречие показывает, что $T = G$ и $G = P_1P_2$. Пусть M_p — силовская p-подгруппа в M, L — такая максимальная подгруппа в P_1, которая содержит M_p, и D — силовская p_2-подгруппа в M. Тогда D — силовская подгруппа в G, и поэтому согласно условию и в силу леммы 1 $LD = DL$. Но, очевидно, $M \subseteq LD$, и поэтому в силу максимальности M имеет место $M = LD$. Но тогда $|G : M| = p$, и поэтому $|H| = |G : M| = p$. Таким образом, в силу утверждения 5 G/H вкладывается в группу автоморфизмов циклической группы порядка p, и поэтому $|G/H|$ делит $p - 1$, что невозможно, поскольку p — наименьший простой делитель $|G|$. Это противоречие завершает доказательство первого утверждения данной леммы.

II. Предположим, что это утверждение не верно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *В группе G имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа H, причем для некоторого простого делителя q порядка группы G имеет место $G = [H]M$, где M — сверхразрешимая максимальная в G подгруппа и $H = O_q(G) = C_G(H) = F$* (см. доказательство теоремы 1).

2. *Группа G дисперсивна по Оре.*

В силу утверждения 1 леммы группа G имеет такую нормальную подгруппу N, которая является холловской p'-подгруппой в G. Понятно, что $N \neq 1$, и поэтому $H \subseteq N$. Таким образом, $H \subseteq F(N)$. С другой стороны, поскольку $F(N)$ является характеристической подгруппой в N, $F(N)$ — нильпотентная нормальная подгруппа в G, и поэтому $F(N) \subseteq H$. Значит, $F(N) = H = F(G)$. Понятно также, что $P_2, \ldots, P_t$ — набор силовских подгрупп в N (по одной для каждого простого делителя порядка группы N). Таким образом, условие выполняется в N, что влечет сверхразрешимость подгруппы N. Но тогда, очевидно, группа G является дисперсивной по Оре.

3. *q Является наибольшим простым делителем порядка группы G.*

Действительно, согласно утверждению 2 в группе G нормальной является силовская r-подгруппа, где r — наибольший простой делитель $|G|$. Теперь применяем утверждение 1.

4. *H является силовской подгруппой в G.*

Пусть G_q — силовская q-подгруппа в G. Тогда в силу утверждений 2 и 3 G_q нормальна в G, и поэтому $G_q \subseteq H$.

5. *Заключительное противоречие.*

Пусть H_1 — максимальная в H подгруппа, $i \neq 1$. Тогда в силу утверждения 4 и условия $T = H_1P_i = P_iH_1$. При этом $H_1 = H \cap T$ является нормальной в T подгруппой. Таким образом, все подгруппы $P_2, \ldots, P_t$ содержатся в $N_G(H_1)$, и поэтому H_1 нормальна в G. В силу минимальности H это влечет $H_1 = 1$ и, следовательно, $|H| = q$. В силу утверждения 1 из последнего следует сверхразрешимость группы G, что противоречит ее выбору.

Теорема доказана.

Мы будем использовать символ $\mathfrak{N}(G)$ для обозначения наименьшей нормальной в G подгруппы N с нильпотентной фактор-группой G/N. Следующая лемма хорошо известна (см., например, лемму 1.2 из [19]).

Лемма 5. *Пусть N — нормальная в G подгруппа. Тогда* $\mathfrak{N}(G/N) = \mathfrak{N}(G)/N$.

***Доказательство теоремы* 3.** $1) \Rightarrow 2)$. Предположим, что это не верно и G — контрпример минимального порядка, $D = \mathfrak{N}(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Группа G сверхразрешима* (это вытекает из леммы 4).

2. *D является холловской подгруппой в G.*

Понятно, что $D \neq 1$ и $D \subseteq G'$. Но поскольку группа G сверхразрешима, то $G' \subseteq F(G)$, и поэтому $D \subseteq X = F(G)$.

Предположим, что G имеет две такие минимальные нормальные подгруппы H и R, что H — p-группа и R — q-группа с $p \neq q$. Не уменьшая общность можно предположить, что $H \subseteq D$. Легко видеть, что условие 1 переносится на любую фактор-группу группы G, и поэтому в силу выбора G утверждение 2 относительно группы G/R верно.

Согласно лемме 5 $\mathfrak{N}(G/R) = \mathfrak{N}(G)R/R = DR/R$. Следовательно, DR/R — холловская подгруппа в G/R. Пусть D_p является силовской p-подгруппой D. Тогда RD_p/R — силовская p-подгруппа DR/R, и поэтому RD_p/R является силовской p-подгруппой G/R. Следовательно, D_p — силовская p-подгруппа в G. Предположим, что $D_p \neq D$ и D_r — силовская r-подгруппа в D, где $r \neq p$. Теперь, рассматривая фактор-группу G/H, заключаем, как и выше, что D_r — силовская p-подгруппа в G. Таким образом, в рассматриваемом случае D является холловской подгруппой в G.

Предположим, что все минимальные нормальные подгруппы группы G являются p-группами. В этом случае в силу сверхразрешимости группы G $F(G) = O_p(G)$ — силовская p-подгруппа в G и $D \subseteq O_p(G)$. Если $H \neq D$, то D — силовская p-подгруппа в G. Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $H = D$. Покажем, что $\Phi = \Phi(O_p(G)) = 1$. Предположим, что $\Phi \neq 1$. Тогда $\Phi D/\Phi = \Phi\mathfrak{N}(G)/\Phi = \mathfrak{N}(G/\Phi)$ является холловской подгруппой в G/Φ. Если $H \subseteq \Phi$, то G/Φ — нильпотентная группа. Но $O_p(G) \trianglelefteq G$, и поэтому $\Phi \subseteq \Phi(G)$. Следовательно, группа G нильпотентна, что ведет к случаю $H = \mathfrak{N}(G) = 1$, который противоречит нашему выбору группы G. Значит, $H \nsubseteq \Phi$, и поэтому $H\Phi/\Phi$ — неединичная p-группа. Это показывает, что $H\Phi = O_p(G)$. Но это также невозможно, поскольку $\Phi = \Phi(O_p(G))$ и $H \neq O_p(G)$. Следовательно, $\Phi(O_p(G)) = 1$.

Пусть M — произвольная максимальная в $O_p(G)$ подгруппа. Поскольку $O_p(G)$ является силовской подгруппой в G, согласно условию M X-перестановочна в G со всеми ее силовскими подгруппами. Пусть Q является силовской q-подгруппой в G, где $q \neq p$. Тогда, поскольку $X = O_p(G)$, $QM = MQ$. Значит, $M = O_p(G) \cap \cap QM \trianglelefteq QM$, и поэтому $q \nmid |G : N_G(M)|$. Поскольку q выбиралось произвольно, имеем $|G : N_G(M)| = p^\alpha$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{N}$. Но $M \trianglelefteq O_p(G)$, следовательно, $M \trianglelefteq G$.

Теперь покажем, что каждая собственная немаксимальная подгруппа L из $O_p(G)$ является пересечением некоторых максимальных подгрупп из $O_p(G)$. Действительно, если $L = 1$, то поскольку $\Phi(O_p(G)) = 1$, видим, что L — пересечение всех максимальных подгрупп группы $O_p(G)$. Предположим, что $L \neq 1$. Тогда $|O_p(G)/L| < |O_p(G)|$, и поэтому по индукции L — пересечение всех тех максимальных подгрупп T группы $O_p(G)$, для которых имеет место $L \subseteq T$. Таким образом, каждая подгруппа группы $O_p(G)$ нормальна в G.

В силу теоремы Машке для подгруппы $O_p(G)$ имеет место разложение $O_p(G) = \langle a\rangle \times \langle a_2\rangle \times \ldots \times \langle a_t\rangle$, где каждый сомножитель $\langle a_i\rangle$ является минимальной нормальной подгруппой в G и $\langle a\rangle = H$. Пусть $a_1 = aa_2 \ldots a_t$. Тогда, поскольку $\langle a_1\rangle \cap \langle a_2\rangle \ldots \langle a_t\rangle = 1$, имеем $O_p(G) = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \ldots \times \langle a_t\rangle$. Поскольку G не является нильпотентной группой, $O_p(G) \nsubseteq Z(G)$. Следовательно, найдется индекс i такой, что $a_i \notin Z(G)$. Ясно, что G имеет элемент g такой, что $\big(|g|, p\big) = 1$ и $g \notin C_G(a_i)$. Пусть $y = \big[[a_i, y_1], \ldots, y_n\big]$, где $y_1 = \ldots = y_n = g$ и $n = |G|$. Тогда $y \in H = D$. Но, с другой стороны, в силу изложенного в предыдущем абзаце $y \in \langle a_i\rangle$ и $y \neq 1$, так как $g \notin C_G(a_i)$. Следовательно, $\langle a_i\rangle = H$, что невозможно. Это завершает доказательство того, что D — холловская подгруппа в G.

3. *$G = [D]M$, где D и M — нильпотентные холловские подгруппы в G* (это следует из теоремы Шура – Цассенхауза, утверждения 2 и определения подгруппы D).

4. *Заключительное противоречие.*

Пусть M — произвольная максимальная подгруппа в D и $p = |D : M|$. Обозначим через M_p силовскую p-подгруппу из M. Тогда имеем $M = M_pM_{p'}$, где $M_{p'}$ — холловская p'-подгруппа в M. Ясно, что $M_{p'}$ является холловской p'-подгруппой в D. Поскольку $M_{p'}$ char $D \trianglelefteq G$, имеем $M_{p'} \trianglelefteq G$. Таким образом, чтобы доказать, что подгруппа M является нормальной в G, необходимо показать, что подгруппа M_p нормальна в G. Понятно, что M_p является максимальной подгруппой в силовской p-подгруппе группы D. Поэтому в силу нильпотентности подгруппы D, M_p нормальна в D. Кроме того, если Q — силовская подгруппа из G, не входящая в D, то для некоторого $x \in X$ имеет место $M_pQ^x = Q^xM_p$, что влечет $Q^x \subseteq N_G(M_p)$. Следовательно, $M_p \trianglelefteq G$, и поэтому каждая максимальная подгруппа из D нормальна в G. Следовательно, относительно группы G выполняется утверждение 2, что невозможно в силу выбора группы G. Этим доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ 2) завершено.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть P_1 — произвольная максимальная подгруппа силовской p-подгруппы P группы G и Q — произвольная силовская q-подгруппа группы G. Покажем, что P_1 является X-перестановочной с Q. Если $p = q$, то в силу теоремы Силова $P = Q^x$ для некоторого $x \in G$, и поэтому $P_1Q^x = Q^xP_1 = Q^x$. Более того, используя рассуждения из доказательства леммы 2, можно показать, что равенство $P_1Q^x = Q^xP_1 = Q^x$ выполняется для некоторого $x \in X$.

Пусть $p \neq q$, $\pi_1 = \pi(D)$ и $\pi_2 = \pi(M)$. Предположим, что $p, q \in \pi_2$. Поскольку в разрешимой группе G любые ее две силовские подгруппы G-перестановочны, найдется элемент $x \in G$ такой, что $D_1 = PQ^x = Q^xP$. Так как при этом $M \simeq G/D$ — нильпотентная группа и $D \cap D_1 = 1$, видим, что подгруппа D_1 является нильпотентной. Следовательно, $[P_1, Q^x] =$, и поэтому $P_1Q^x = Q^xP_1$. Если $p, q \in \pi_1$, приходим к тому же самому заключению. Пусть $Q \subseteq M^y$. Тогда вследствие факторизации $G = DM$ согласно лемме 1.19 из [13] имеем факторизацию $G = DM^y$.

Значит, $x = dm$ для некоторых $d \in D$ и $m \in M^y$. Но группа M^y нильпотентна, и поэтому Q нормальна в M^y. Следовательно, $Q^x = Q^d$. Итак, $P_1Q^x = P_1Q^d$ — подгруппа в G и $d \in D \subseteq X$. Таким образом, подгруппа P_1 X-перестановочна с Q. Рассмотрим теперь случай, когда $p \in \pi_1$, $q \in \pi_2$. В этом случае P — силовская p-подгруппа в D, и поэтому $P \trianglelefteq G$. Пусть $D_{p'}$ — холловская p'-подгруппа в D. Тогда $D_{p'} \trianglelefteq G$. Пусть $M_1 = P_1D_{p'}$. Тогда имеем $|D : M_1| = |PD_{p'} : P_1D_{p'}| = p$ и, следовательно, M_1 — максимальная подгруппа в D. В соответствии с гипотезой $M_1 \trianglelefteq G$. Значит, $P \cap P_1D_{p'} = P_1(P \cap D_{p'}) = P_1 \trianglelefteq G$, и поэтому $P_1Q = QP_1$. Аналогично, если $q \in \pi_1$, $p \in \pi_2$, можно показать, что $Q \trianglelefteq G$, что вновь влечет $P_1Q = QP_1$. Таким образом, теорема доказана.

Следствие. *Пусть G — группа и $X = F(G)$ — ее подгруппа Фиттинга. Если все максимальные подгруппы всех силовских подгрупп из G X-перестановочны со всеми силовскими подгруппами из G, то G — сверхразрешимая группа.*

1. *Huppert B.* Zur Sylowstruktur auflosbarer Gruppen // Arch. Math. – 1961. – **12**. – S. 161 – 169.
2. *Srinivasan S.* Two sufficient conditions for supersolubility of finite groups // Isr. J. Math. – 1980. – **35**, № 3. – P. 210 – 214.
3. *Wang Y.* c-Normality of groups and its properties // J. Algebra. – 1996. – **180**. – P. 954 – 965.
4. *Wei H.* On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // Communs Algebra. – 2001. – **29**, № 5. – P. 2193 – 2200.
5. *Wei H., Yanming W., Yangming Li.* On c-normal maximal and minimal subgroups of Sylow subgroups of finite groups // Ibid. – 2003. – **31**, № 10. – P. 4807 – 4816.
6. *Asaad M., Heliel A. A.* On permutable subgroups of finite groups // Arch. Math. – 2002. – **80**. – S. 113 – 118.
7. *Ballester-Bolinches A., Guo X.* On complemented subgroups of finite groups // Ibid. – 1999. – № 72. – P. 161 – 166.
8. *Guo W., Shum K. P., Skiba A.* G-covering subgroup systems for the classes of supersoluble and nilpotent groups // Isr. J. Math. – 2003. – **138**. – P. 125 – 138.
9. *Веньбинь Го, Шам К. П., Скиба А. Н.* G-накрывающие системы подгрупп для классов p-сверхразрешимых и p-нильпотентных конечных групп // Сиб. мат. журн. – 2004. – **45**, № 3. – С. 75 – 92.
10. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
11. *Ore O.* Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. – 1939. – **5**. – P. 431 – 460.
12. *Wall G.* Groups with maximal subgroups of Sylow subgroups normal // Isr. J. Math. – 1982. – **43**. – P. 166 – 168.
13. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. – Киев: Наук. думка, 1987. – 208 с.
14. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* X-semipermutable subgroups. – Gomel, 2004. – 16 p. – (Preprint / GGU im. F. Skoriny, № 10).
15. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Conditionally permutable subgroups and supersolubility of finite groups // SEAMS Bull. Math. – 2005. – **29**, № 2. – P. 240 – 255.
16. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* X-permutable subgroups. – Gomel, 2002. – (Preprint / GGU im. F. Skoriny, № 61).
17. *Guo W., Shum K. P., Skiba A. N.* Criterions of supersolubility for products of supersoluble groups // Math. Debreceen. – 2006. – **68**, № 3-4. – P. 433 – 449.
18. *Al-Sheikahmad A.* Finite groups with given c-permutable subgroups // Algebra Discrete Math. – 2004. – № 3. – P. 12 – 19.
19. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука,1978. – 272 с.
20. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. – Heidelberg; New York: Springer, 1967. – 793 S.
21. *Тютянов В. Н.* К гипотезе Холла. – Гомель, 2001. – 14 с. – (Препринт / Гомел. ун-т им. Ф. Скорины, № 111).

Получено 22.03.2005,
после доработки — 04.07.2005