УДК 519.21

І. В. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ВЕЛИКІ ВІДХИЛЕННЯ ДЛЯ ІМПУЛЬСНИХ ПРОЦЕСІВ У СХЕМІ ПУАССОНОВОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Asymptotic analysis of the large deviation problem for impulsive processes in the scheme of Poisson approximation is performed. Large deviations for impulsive processes in the scheme of Poisson approximation are defined by an exponential generator for a jump process with independent increments.

Проведен асимптотический анализ проблемы больших уклонений для импульсных процессов в схеме пуассоновской аппроксимации. Большие уклонения для импульсных процессов в схеме пуассоновской аппроксимации определяются экспоненциальным генератором для скачкообразного процесса с независимыми приращениями.

1. Вступ. У цій статті проведено асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень для імпульсних процесів у схемі пуассонової апроксимації (див. [5], гл. 7).

Асимптотичний аналіз імпульсних процесів у схемі пуассонової апроксимації проведено в роботах [6, 10].

У монографії [2] для дослідження проблеми великих відхилень розвинуто ефективний метод, що базується на теорії збіжності експоненціальних (нелінійних) операторів. У роботах [7, 8] експоненціальний оператор у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon > 0)$ має вигляд

$$\mathbb{H}^\varepsilon \varphi(x) := e^{-\varphi(x)/\varepsilon} \varepsilon \mathbb{L}^\varepsilon e^{\varphi(x)/\varepsilon},$$

де $\mathbb{L}^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, — оператори, що визначають марковські процеси $x^\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$, у схемі серій.

Імпульсні процеси (див. [5], гл. 2) задаються співвідношенням

$$\xi(t) = \xi_0 + \sum_{k=1}^{\nu(t)} \alpha_k(x_{k-1}), \qquad t \geq 0, \quad \xi_0 \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Тут випадкові величини $\alpha_k(x)$, $k \geq 1$, $x \in E$, є незалежними та однаково розподіленими з функцією розподілу

$$G_x(dv) = P(\alpha_k(x) \in dv).$$

Перемикаючим процесом $x(t)$, $t \geq 0$, є марковський процес стрибків на стандартному фазовому просторі станів $(\mathcal{E}, E)$. Нехай цей процес визначається генератором

$$Q\varphi(x) = q(x) \int_{\mathbb{E}} [\varphi(y) - \varphi(x)] P(x, dy), \quad x \in E. \tag{2}$$

Напівмарковське ядро

$$Q(x, B, t) = P(x, B)(1 - e^{-q(x)t}), \qquad x \in E, \quad B \in \mathcal{E}, \quad t \geq 0,$$

визначає асоційований марковський процес відновлення (x_k, τ_k), $k \geq 0$, де x_k, $k \geq 0$, — вкладений ланцюг Маркова, заданий стохастичним ядром

$$P(x,B) = P(x_{k+1} \in B \mid x_k = x),$$

а τ_k, $k \geq 0$, — точковий процес моментів стрибків, який визначається функцією розподілу часу перебування $\theta_{k+1} = \tau_{k+1} - \tau_k$, $k \geq 0$,

$$P(\theta_{k+1} \leq t | x_k = x) = 1 - e^{-q(x)t}.$$

Нарешті лічильний процес стрибків $\nu(t) = \max\{k \colon \tau_k \leq t\}$.

Основним припущенням щодо перемикаючого марковського процесу є умова

C_1) марковський процес $x(t)$, $t \geq 0$, рівномірно ергодичний зі стаціонарним розподілом $\pi(A)$, $A \in \mathcal{E}$.

***Зауваження* 1.** Якщо $x(t)$, $t \geq 0$, має стаціонарний розподіл $\pi(x)$, то x_n, $n \geq 1$, також має стаціонарний розподіл $\rho(x)$ і мають місце співвідношення

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), \qquad q := \int\limits_E \pi(dx)q(x).$$

Позначимо через Π проектор на підпростір нулів зведено-оборотного оператора Q, означеного в (2):

$$\Pi\varphi(x) = \int\limits_E \pi(dx)\varphi(x).$$

Виконується співвідношення

$$Q\Pi = \Pi Q = 0.$$

Потенціал R_0 має властивість [5] (гл. 1)

$$QR_0 = R_0 Q = \Pi - I.$$

***Зауваження* 2.** З останнього співвідношення випливає, що за умови розв'язності

$$\Pi\psi = 0$$

рівняння Пуассона

$$Q\varphi = \psi$$

має єдиний розв'язок

$$\psi = R_0\varphi$$

при $\Pi\varphi = 0$.

Імпульсний процес (1) характеризується генератором двокомпонентного марковського процесу $\xi(t)$, $x(t)$, $t \geq 0$ (див. [5], гл. 2)

$$\mathbb{L}\varphi(u,x) = q(x)\int\limits_E P(x,dy)\int\limits_{\mathbb{R}} G_y(dv)[\varphi(u+v,y) - \varphi(u,x)].$$

***Зауваження* 3.** Генератор $\mathbb{L}$ можна записати у вигляді

$$\mathbb{L}\varphi(u,x) = [Q + Q_0 G_x]\varphi(u,x),$$

де

$$Q_0\varphi(x) := q(x)\int\limits_E P(x,dy)\varphi(y),$$

$$G_x\varphi(u) := \int\limits_{\mathbb{R}} G_x(dv)[\varphi(u+v) - \varphi(u)].$$

***Зауваження* 4.** Дослідження граничних властивостей марковських процесів базується на мартингальній характеризації таких процесів, а саме, розглядаються мартингали (див., наприклад, [1])

$$\mu_t = \varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int\limits_0^t \mathbb{L}\varphi(x(s))ds, \tag{3}$$

де $\mathbb{L}$ — генератор, що визначає марковський процес $x(t)$, $t \geq 0$, на стандартному фазовому просторі $(E, \mathcal{E})$, має щільну область визначення $\mathcal{D}(\mathbb{L}) \subseteq \mathcal{B}_E$, яка містить неперервні разом зі своїми похідними функції. Тут $\mathcal{B}_E$ — банахів простір дійснозначних обмежених тест-функцій $\varphi(x) \in E$ з нормою $\|\varphi\| := \sup_{x\in E}|\varphi(x)|$.

Теорія великих відхилень базується на використанні експоненціальної мартингальної характеризації (див. [2], гл. 1):

$$\widetilde{\mu}_t = \exp\left\{\varphi(x(t)) - \varphi(x(0)) - \int\limits_0^t \mathbb{H}\varphi(x(s))ds\right\} \tag{4}$$

є мартингалом. Тут експоненціальний нелінійний оператор

$$\mathbb{H}\varphi(x) := e^{-\varphi(x)}\mathbb{L}e^{\varphi(x)}, \quad \varphi(x) \in \mathcal{B}_E.$$

Еквівалентність співвідношень (3) та (4) випливає з наступного твердження.

Твердження 1 [(див. [1, с. 66])]**.**

$$\mu(t) = x(t) - \int\limits_0^t y(s)ds$$

є мартингалом тоді і тільки тоді, коли

$$\widetilde{\mu}(t) = x(t)\exp\left\{-\int\limits_0^t \frac{y(s)}{x(s)}ds\right\} \quad \text{— мартингал.}$$

***Зауваження* 5.** Проблема великих відхилень, як правило, реалізується в 4 етапи [2] (гл. 2):

1) обчислення граничного експоненціального (нелінійного) оператора, що визначає великі відхилення;

2) визначення експоненціальної компактності;

3) визначення принципу порівняння для граничного оператора;

4) конструкція варіаційного зображення функціонала дії, що визначає великі відхилення.

Етапи $2-4$ для експоненціального генератора, що відповідає різним типам випадкових блукань, реалізовано в монографії [2].

Класичним підходом до розв'язання проблеми великих відхилень є використання кумулянти процесу [3]. Зв'язок між кумулянтою та експоненціальним генератором випливає з наступного.

Генератор марковського процесу можна подати у вигляді

$$\mathbb{L}\varphi(x) = \int\limits_R e^{\lambda x} a(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda)d\lambda,$$

де $a(\lambda)$ — кумулянта процесу, $\overline{\varphi}(\lambda) = \int_R e^{\lambda x}\varphi(x)dx$.

Зворотне перетворення дає

$$\int\limits_R e^{-\lambda x}\mathbb{L}\varphi(x)dx = a(\lambda)\overline{\varphi}(\lambda).$$

Запишемо

$$\int\limits_R e^{-\lambda x}\mathbb{L}\varphi(x)dx = \int\limits_R e^{-\lambda x} a(\lambda)\varphi(x)dx$$

та за допомогою заміни

$$e^{-\lambda x}\varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x)$$

отримаємо

$$\int\limits_R e^{-\lambda x}\mathbb{L}e^{\lambda x}\widetilde{\varphi}(x)dx = \int\limits_R a(\lambda)\widetilde{\varphi}(x)dx.$$

Таким чином,

$$e^{-\lambda x}\mathbb{L}e^{\lambda x} = a(\lambda),$$

або через експоненціальний генератор

$$\mathbb{H}\varphi_0(x) = a(\lambda), \text{ де } \varphi_0(x) = \lambda x.$$

***Зауваження* 6.** У роботах [7, 8] В. С. Королюк запропонував метод розв'язання проблеми сингулярного збурення при дослідженні великих відхилень для випадкових еволюцій з незалежними приростами в схемі асимптотично малої дифузії.

У класичних роботах асимптотичний аналіз проблеми великих відхилень виконується, як правило, з використанням великого параметра серії $n \to \infty$, а іноді навіть кількох різних параметрів (див., наприклад, [9]).

Нормування імпульсного процесу (1) малим параметром серії для розв'язання проблеми великих відхилень у схемі пуассонової апроксимації реалізується з використанням двох малих параметрів $\varepsilon, \delta \to 0$ таких, що $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$:

$$\xi^{\varepsilon,\delta}(t) = \xi_0^{\varepsilon,\delta} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)} \alpha_k^\delta(x_{k-1}), \quad t \geq 0,$$

$$\mathbb{L}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}q(x)\int_E P(x,dy)\int_{\mathbb{R}} G_y^\delta(dv)[\varphi(u+\varepsilon v, y) - \varphi(u,x)],$$

де ядро $G_x^\delta(v)$ задовольняє умови пуассонової апроксимації.

2. Основні умови пуассонової апроксимації. Сформулюємо наступні умови:

$\mathrm{C}_2)$ *пуассонова апроксимація*: сім'я процесів $\alpha_k^\delta(x),\ k \geq 1,\ x \in E,\ t \geq 0$ задовольняє наступні умови пуассонової апроксимації:

$\mathrm{PA}_1)$ апроксимація середніх:

$$a_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} v G_x^\delta(dv) = \delta[a(x) + \theta_a^\delta(x)]$$

та

$$c_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} v^2 G_x^\delta(dv) = \delta[c(x) + \theta_c^\delta(x)],$$

де

$$\sup_{x\in E}|a(x)| \leq a < +\infty, \sup_{x\in E}|c(x)| \leq c < +\infty;$$

$\mathrm{PA}_2)$ для ядра інтенсивностей має місце асимптотичне зображення

$$G_{g,x}^\delta = \int_{\mathbb{R}} g(v) G_x^\delta(dv) = \delta[G_{g,x} + \theta_g^\delta(x)]$$

для всіх $g \in C_3(\mathbb{R})$ ($C_3(\mathbb{R})$ — клас функцій, що визначає міру (див. [4], гл. 7), $G_{g,x}$ — обмежене ядро

$$|G_{g,x}| \leq G_g \quad \text{(стала, що залежить від } g),$$

ядро $G_x^0(dv)$ задано на класі функцій, що визначає міру $C_3(\mathbb{R})$ співвідношенням

$$G_{g,x} = \int_{\mathbb{R}} g(v) G_x^0(dv), \quad g \in C_3(\mathbb{R});$$

знехтувально малі доданки θ_a^δ, θ_c^δ, θ_g^δ задовольняють умову

$$\sup_{x\in E}|\theta^{\delta}_{\cdot}(x)| \to 0, \quad \delta\to 0;$$

PA_3) має місце співвідношення

$$c(x) := \int_{\mathbb{R}} v^2 G_x^0(dv),$$

що зумовлює відсутність дифузійної складової в експоненціальному генераторі, який визначає розв'язання проблеми великих відхилень;

C_3) *рівномірна квадратична інтегровність*:

$$\lim_{c\to\infty}\sup_{x\in E}\int_{|v|>c} v^2 G_x^0(dv) = 0;$$

C_4) *експоненціальна обмеженість*:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{p|v|} G_x^{\delta}(dv) < \infty \quad \forall p\in\mathbb{R}.$$

3. Основний результат.

Теорема 1. *Розв'язок проблеми великих відхилень для імпульсного процесу*

$$\xi^{\varepsilon,\delta}(t) = \xi_0^{\varepsilon,\delta} + \varepsilon\sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)} \alpha_k^{\delta}(x_{k-1}), \quad t\ge 0,$$

що задається генератором двокомпонентного марковського процесу $\xi^{\varepsilon,\delta}(t)$, $x(t/\varepsilon^2)$, $t\ge 0$

$$\mathbb{L}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-2}q(x)\int_E P(x,dy)\int_{\mathbb{R}} G_y^{\delta}(dv)[\varphi(u+\varepsilon v,y)-\varphi(u,x)], \tag{5}$$

або

$$\mathbb{L}^{\varepsilon,\delta}\varphi(u,x) = \left[\varepsilon^{-2}Q + Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta}\right]\varphi(u,x), \tag{6}$$

де

$$G_x^{\varepsilon,\delta}\varphi(u) := \varepsilon^{-2}\int_{\mathbb{R}} G_x^{\delta}(dv)[\varphi(u+\varepsilon v)-\varphi(u)],$$

визначається експоненціальним генератором

$$H^0\varphi(u) = \widetilde{a}\varphi'(u) + \int_{\mathbb{R}}\left[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)\right]\widetilde{G}^0(dv) = (\widetilde{a}-\widetilde{a}_0)\varphi'(u) + \int_{\mathbb{R}}\left[e^{v\varphi'(u)}-1\right]\widetilde{G}^0(dv), \tag{7}$$

де

$$\widetilde{G}^0(dv) := q\int_E \rho(dx)G_x^0(dv), \qquad \widetilde{a}_0 := \int_{\mathbb{R}} v\varphi'(u)\widetilde{G}^0(dv),$$

$$\widetilde{a} := q\int_E \rho(dx)a(x)$$

— параметр, що визначає детермінований зсув.

Усереднення проводиться по стаціонарній мірі вкладеного ланцюга Маркова перемикаючого марковського процесу.

***Зауваження* 7.** Великі відхилення для імпульсних процесів у схемі пуассонової апроксимації визначаються експоненціальним генератором для стрибкового процесу з незалежними приростами. Вичерпне дослідження проблеми випадкових відхилень для стрибкового процесу з незалежними приростами викладено у монографії [3].

***Зауваження* 8.** Граничний генератор в евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$, $d > 1$, має вигляд

$$H^0\varphi(u) = \sum_{k=1}^{d} \left(\widetilde{a}_k - \widetilde{a}_k^0\right)\varphi_k' + \int_{\mathbb{R}^d} \left[e^{v\varphi'(u)} - 1\right] \widetilde{G}^0(dv),$$

$$\varphi_k' := \partial\varphi(u)/\partial u_k, \quad 1 \le k \le d.$$

Більш того, останній експоненціальний генератор можна розширити на простір абсолютно неперервних функцій (див. [2])

$$C_b^1(\mathbb{R}^d) = \left\{\varphi\colon\ \exists \lim_{|u|\to\infty} \varphi(u) = \varphi(\infty),\ \lim_{|u|\to\infty} \varphi'(u) = 0\right\}.$$

Для доведення теореми нам знадобиться наступна лема.

Лема 1. *Експоненціальний генератор у схемі серій*

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = e^{-\varphi/\varepsilon}\varepsilon Q_0 G_x^{\varepsilon,\delta} e^{\varphi/\varepsilon} \tag{8}$$

має асимптотичне зображення

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = H_G(x)\varphi(u) + \theta_G^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup_{x\in E} |\theta_G^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0$, $\varepsilon, \delta \to 0$,

$$H_G(x)\varphi(u) = Q_0\mathcal{H}_G(x)\varphi(u) := Q_0 \left[a(x)\varphi'(u) + \int_{\mathbb{R}} \left[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u)\right] G_x^0(dv)\right]. \tag{9}$$

Доведення. Врахувавши вигляд генератора (5), (6), запишемо (8) так:

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-1}Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)} - 1\right] G_x^\delta(dv),$$

де

$$\Delta_\varepsilon\varphi(u) := \varepsilon^{-1}[\varphi(u+\varepsilon v) - \varphi(u)].$$

Вираз для генератора запишемо таким чином:

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-1}Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)} - 1 - \Delta_\varepsilon\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2\right] G_x^\delta(dv) +$$

$$+\varepsilon^{-1}Q_0 \int_{\mathbb{R}} \left[\Delta_\varepsilon\varphi(u) + \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2\right] G_x^\delta(dv).$$

Легко бачити, що функція $\psi_u^\varepsilon(v) = e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)} - 1 - \Delta_\varepsilon\varphi(u) - \dfrac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2$ належить класу $C_3(\mathbb{R})$. Дійсно,

$$\psi_u^\varepsilon(v)/v^2 \to 0, \quad v \to 0.$$

Крім того, ця функція неперервна і обмежена для кожного ε за умови обмеженості функції $\varphi(u)$. Більш того, обмеженість функції $\psi_u^\varepsilon(v)$ є рівномірною по u за умов C_3, C_4 та обмеженості похідної $\varphi'(u)$.

Таким чином,

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-1}\delta Q_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \left[e^{\Delta_\varepsilon\varphi(u)} - 1 - \Delta_\varepsilon\varphi(u) - \frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2\right] G_x^0(dv) +$$

$$+\varepsilon^{-1}Q_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\Delta_\varepsilon\varphi(u) - v\varphi'(u) - \varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(u)\right] G_x^\delta(dv) + \varepsilon^{-1}\delta Q_0 a(x)\varphi'(u) + \delta Q_0 c(x)\varphi''(u) +$$

$$+\varepsilon^{-1}Q_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2}(\Delta_\varepsilon\varphi(u))^2 - \frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2\right] G_x^\delta(dv) + \varepsilon^{-1}\delta\frac{1}{2}Q_0 c(x)(\varphi'(u))^2.$$

Застосовуючи формулу Тейлора до тест-функцій $\varphi(u) \in C^3(\mathbb{R})$ та умову PA_2, отримуємо

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = \varepsilon^{-1}\delta Q_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \left[e^{v\varphi'(u)} - 1 - v\varphi'(u) - \frac{v^2}{2}(\varphi'(u))^2\right] G_x^0(dv) +$$

$$+\varepsilon^{-1}\delta Q_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \left(e^{v\varphi'(u)}\varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u}) - \varepsilon\frac{v^2}{2}\varphi''(\widetilde{u}) - \varepsilon^2\frac{v^4}{8}(\varphi''(\widetilde{u}))^2\right) G_x^0(dv) +$$

$$+\varepsilon^{-1}\delta Q_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \varepsilon^2\frac{v^3}{3!}\varphi'''(\widetilde{u}) G_x^0(dv) + \varepsilon^{-1}\delta Q_0 a(x)\varphi'(u) + \delta Q_0 c(x)\varphi''(u) +$$

$$+\varepsilon^{-1}\delta Q_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \varepsilon^2\frac{v^4}{4}(\varphi''(\widetilde{u}))^2 G_x^0(dv) + \varepsilon^{-1}\delta\frac{1}{2}Q_0 c(x)(\varphi'(u))^2.$$

Враховуючи умову PA_3 та граничну умову $\varepsilon^{-1}\delta \to 1$, остаточно маємо

$$H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) = H_G(x)\varphi(u) + \theta_G^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup_{x\in E}|\theta_G^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0, \varepsilon, \delta \to 0$.

Лему 1 доведено.

Доведення теореми. Граничний перехід в експоненціальному нелінійному генераторі випадкової еволюції реалізується на збурених тест-функціях

$$\varphi^{\varepsilon,\delta}(u,x) = \varphi(u) + \varepsilon\ln\left[1 + \delta\varphi_1(u,x)\right].$$

Таким чином, маємо

$$\mathbb{H}^{\varepsilon,\delta}\varphi^{\varepsilon,\delta} = e^{-\varphi^\varepsilon/\varepsilon}\varepsilon\mathbb{L}^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi^\varepsilon/\varepsilon} = e^{-\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1]^{-1}\varepsilon\mathbb{L}^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1].$$

Обчислення асимптотичної поведінки останнього експоненціального генератора дає наступний результат.

Лема 2. *Має місце асимптотичне зображення*

$$\mathbb{H}^{\varepsilon,\delta}\varphi^{\varepsilon,\delta} = Q\varphi_1 + H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) + \theta^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $\sup_{x\in E}|\theta^{\varepsilon,\delta}(x)| \to 0$, $\varepsilon,\delta\to 0$.

Доведення. Враховуючи (6), маємо

$$\mathbb{H}^{\varepsilon,\delta}\varphi^{\varepsilon,\delta} = e^{-\varphi/\varepsilon}\left[1-\delta\varphi_1+\frac{\delta^2\varphi_1^2}{1+\delta\varphi_1}\right]\left\{\varepsilon^{-1}Q+\varepsilon Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}\right\}e^{\varphi/\varepsilon}[1+\delta\varphi_1] =$$

$$= e^{-\varphi/\varepsilon}\left[1-\delta\varphi_1+\frac{\delta^2\varphi_1^2}{1+\delta\varphi_1}\right]\left\{\varepsilon^{-1}\delta e^{\varphi/\varepsilon}Q\varphi_1+\varepsilon Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}+\varepsilon\delta Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1\right\} =$$

$$= Q\varphi_1 + H_G^{\varepsilon,\delta}(x)\varphi(u) + \theta^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де

$$\theta^{\varepsilon,\delta}(x) = \delta\left[\frac{\varepsilon}{1+\delta\varphi_1}e^{-\varphi/\varepsilon}Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}\varphi_1 - \frac{\varepsilon^{-1}\delta\varphi_1}{1+\delta\varphi_1}Q\varphi_1 - \frac{\delta\varphi_1}{1+\delta\varphi_1}e^{-\varphi/\varepsilon}Q_0G_x^{\varepsilon,\delta}e^{\varphi/\varepsilon}\right].$$

Лему 2 доведено.

З огляду на лему 1 маємо

$$\mathbb{H}^{\varepsilon,\delta}\varphi^{\varepsilon,\delta} = Q\varphi_1 + H_G(x)\varphi(u) + h^{\varepsilon,\delta}(x),$$

де $h^{\varepsilon,\delta}(x) = \theta^{\varepsilon,\delta}(x) + \theta_G^{\varepsilon,\delta}(x)$.

Тепер використовуємо розв'язок задачі сингулярного збурення для зведено-оборотного оператора Q (див. [5], гл. 1). З умови розв'язності маємо

$$Q\varphi_1 + H_G(x)\varphi(u) = H^0\varphi(u),$$

де

$$H^0\varphi(u) = \Pi Q\Pi\varphi_1 + \Pi H_G(x)\Pi\varphi(u).$$

Враховуючи співвідношення (9) та зауваження 1, можемо записати

$$H^0\varphi(u) = \int_E \pi(dx)q(x)\int_E P(x,dy)\mathcal{H}_G(y)\varphi(u) = q\int_E \rho(dx)\mathcal{H}_G(x)\varphi(u).$$

Отже, остаточно отримуємо (7):

$$H^0\varphi(u) = \widetilde{a}\varphi'(u) + \int_{\mathbb{R}}\left[e^{v\varphi'(u)}-1-v\varphi'(u)\right]\widetilde{\Gamma}^0(dv).$$

Залишковий член $h^{\varepsilon,\delta}(x)$ можна обчислити в явному вигляді, використовуючи розв'язок рівняння Пуассона (див. зауваження 3, а також [5])

$$\varphi_1(u,x) = R_0\widetilde{H}(x)\varphi(u), \qquad \widetilde{H}(x) := H_G(x) - H^0.$$

Теорему доведено.

1. *Ethier S. N., Kurtz T. G.* Markov processes: characterization and convergence. – New York: J. Wiley & Sons, 1986.
2. *Feng J., Kurtz T. G.* Large deviation for stochastic processes. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2006.
3. *Freidlin M. J., Wentzel A. D.* Random perturbation of dynamical systems. – Berlin: Springer, 1998.
4. *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit theorems for stochastic processes. – Berlin: Springer, 1987.
5. *Koroliuk V. S., Limnios N.* Stochastic systems in merging phase space. – WSP, 2005.
6. *Koroliuk V. S., Limnios N., Samoilenko I. V.* Poisson approximation of impulsive recurrent process with semi-Markov switching // Stochast. Anal. and Appl. – 2011. – **29**, Issue 5. – P. 769 – 778.
7. *Королюк В. С.* Марковские случайные эволюции с независимыми приращениями в схеме асимптотически малой диффузии // Доп. НАН України. – 2010. – № 6. – С. 22 – 26.
8. *Королюк В. С.* Проблема великих відхилень для марковських випадкових еволюцій з незалежними приростами у схемі асимптотично малої дифузії // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 643 – 650.
9. *Mogulskii A. A.* Large deviation for processes with independent increments // Ann. Probab. – 1993. – **21**. – P. 202 – 215.
10. *Самойленко І. В.* Збіжність імпульсного процесу накопичення зі стрибковими перемиканнями // Укр. мат. журн. – 2008. – **60**, № 9. – С. 1283 – 1286.

Отримано 10.07.12