8. *Рукасов В. И.* Наилучшие n-членные приближения в пространствах с несимметричной метрикой // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 6. – С. 806–816.
9. *Степанець О. І., Шидліч А. Л.* Про одну екстремальну задачу для додатних рядів // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 12. – С. 1677–1683.
10. *Стечкин С. Б.* Об абсолютной сходимости ортогональных рядов // Докл. АН СССР. – 1955. – **102**, № 1. – С. 37–40.
11. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – Москва: Мир, 1974. – 333 с.
12. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – Москва: Наука, 1970. – 303 с.

Інститут математики НАН України, Київ *Надійшло до редакції 31.07.2006*

УДК 512.9+539.3

В. М. Чехов, А. В. Пан

Про граничні вирази лімітант Кояловича

(Представлено академіком НАН України В. П. Шевченком)

A new theorem about limit expressions for the Koialovich's limitants is formulated and proved. These limit expressions allow us to estimate the solution of an infinite system without use of the successive approximations. Estimations of the solution are made for the problem of bending a thin rectangular clamped plate.

Метод лімітант було створено Б. М. Кояловичем [1] для оцінок розв'язків регулярних нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Першим прикладом його застосування була парна регулярна нескінченна система, що стосувалася задачі про поперечний згин тонкої прямокутної пластинки із затисненими краями. Огляди розвитку і застосувань методу лімітант наведено в роботах [2, 3].

У даному повідомленні сформульовано і доведено теорему про граничні вирази для лімітант, які дозволяють уникнути застосування методу послідовних наближень щодо оцінок розв'язків нескінченної системи. Ефективність граничних виразів для лімітант оцінено на прикладі задачі про згин прямокутної пластинки із затисненими краями.

Розглядається нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь з невід'ємними вільними членами ($b_k \geqslant 0$) і невід'ємними ($a_{kn} \geqslant 0$) коефіцієнтами

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} x_n + b_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

що задовольняють умову регулярності

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} < 1, \qquad k = 1, 2, \ldots .$$

Метод лімітант і його обгрунтування запропоновано Б. М. Кояловичем [1] у випадку парної нескінченної системи. Щодо системи у формі (1) обгрунтування методу лімітант можна пов'язати з допоміжною системою

$$X_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} X_n + \rho_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де $\rho_k = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{kn}$, і лемою П. С. Бондаренка [4]:

Лема 1. *Якщо система* (1) *з невід'ємними коефіцієнтами має мажорантну систему у вигляді* (2) *і відношення вільних членів цих систем знаходиться в межах*

$$h \leqslant \frac{b_k}{\rho_k} \leqslant H, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

то головний розв'язок x_k^* *системи* (1) *знаходиться в межах*

$$X_k^* h \leqslant x_k^* \leqslant X_k^* H, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Тут X_k^* — *головний розв'язок системи* (2). *Система* (2) *має очевидний розв'язок* $X_k = 1$, *що у випадку єдиності обмеженого розв'язку системи* (2) *збігається з головним її розв'язком. Вважаючи, що умови єдиності* [4, 5] *обмеженого розв'язку для регулярних нескінченних систем* (1), (2) *виконано, маємо змогу підставити* $X_k^* = 1$ *у нерівності* (4)

$$h \leqslant x_k^* \leqslant H, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

Відзначимо, що права нерівність у нерівностях (3) *є достатньою умовою існування* [5] *головного розв'язку* x_k^* *системи* (1).

Метод лімітант полягає [1] в обчисленні нижніх і верхніх оцінок для головного розв'язку системи (1). З цією метою фіксується номер p, і система (1) поділяється на дві частини (скінченну та нескінченну):

$$x_k - \sum_{n=1}^{p} a_{kn} x_n = b_k + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_{kn} x_n, \qquad k = \overline{1, p}, \tag{6}$$

$$x_k = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_{kn} x_n + b_k + \sum_{n=1}^{p} a_{kn} x_n, \qquad k = p+1, p+2, \ldots. \tag{7}$$

Розв'язки систем (6), (7) оцінюються по черзі методом послідовних наближень. Спочатку на основі нерівностей (3), (5) маємо два наближених розв'язки $\check{x}_k = h$ та $\widehat{x}_k = H$. Підставивши їх по черзі у вільні члени системи (6), можемо знайти два розв'язки, які уточнюють нерівності (5) щодо $x_1, x_2, \ldots, x_p$. З іншого боку, останні два розв'язки визначають вільні члени двох нескінченних систем (7). З цих систем можемо по черзі уточнити нерівності (5) щодо $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots$ згідно з лемою 1, в якій систему (2) потрібно замінити на відповідну системі (7) допоміжну систему

$$Y_k = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_{kn} Y_n + \rho_k + \sum_{n=1}^{p} a_{kn}, \qquad k = p+1, p+2, \ldots, \tag{8}$$

яка має очевидний головний розв'язок $Y_k^* = 1$.

Відношення вільних членів систем (7) і (8):

$$V_k^p = \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn} x_n}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}}, \qquad k = p+1, p+2, \ldots, \tag{9}$$

названі [1] лімітантами. Згідно з лемою 1 точні нижні й верхні межі лімітант

$$h^p \leqslant V_k^p \leqslant H^p, \qquad k = p+1, p+2, \ldots, \tag{10}$$

збігаються з нижніми і верхніми оцінками для членів нескінченної послідовності x_{p+1}, $x_{p+2}, \ldots$

$$h^p \leqslant x_k^* \leqslant H^p, \qquad k = p+1, p+2, \ldots. \tag{11}$$

Уточнені нерівностями (11) послідовності $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots$ підставляються у вільні члени систем (6), розпочинаючи нове наближення. Збіжність методу лімітант доведено [1] у випадку парної регулярної системи з невід'ємними коефіцієнтами і вільними членами, якщо вона має єдиний обмежений розв'язок. За тих самих умов доведення збіжності методу лімітант елементарно поширюється і на регулярні системи у формі (1).

Додатковий аналіз зв'язку між сусідніми наближеннями дозволяє побудувати граничні вирази для лімітант, які, в свою чергу, надають найкращі при фіксованому p нижні й верхні оцінки для невідомих без методу послідовних наближень. Доведемо таку теорему:

Теорема 1. *Якщо відносно регулярної нескінченної системи* (1) *з невід'ємними коефіцієнтами і невід'ємними вільними членами виконується умова існування головного розв'язку (права нерівність в* (3)*) і умови єдиності обмеженого розв'язку, то існує граничний вираз для лімітант*

$$V_k^{*p} = \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn} \breve{x}_n}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}(1 - \widetilde{x}_n)}, \qquad k = p+1, p+2, \ldots, \tag{12}$$

де $\breve{x}_n$ *— розв'язок системи* (1) *методом простої редукції:*

$$\breve{x}_k - \sum_{n=1}^{p} a_{kn} \breve{x}_n = b_k, \qquad k = \overline{1,p}; \tag{13}$$

$\widetilde{x}_n$ *— розв'язок системи методу редукції, але зі спеціальними вільними членами:*

$$\widetilde{x}_k - \sum_{n=1}^{p} a_{kn} \widetilde{x}_n = \widetilde{b}_k, \qquad k = \overline{1,p}, \qquad \widetilde{b}_k = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_{kn}. \tag{14}$$

Точні нижні і верхні межі граничних виразів для лімітант

$$h^{*p} \leqslant V_k^{*p} \leqslant H^{*p}, \qquad k = p+1, p+2, \ldots \tag{15}$$

дозволяють оцінити головний розв'язок системи (1) *нерівностями*

$$\breve{x}_k + h^{*p} \widetilde{x}_k \leqslant x_k^* \leqslant \breve{x}_k + H^{*p} \widetilde{x}_k, \qquad k = \overline{1,p}; \qquad h^{*p} \leqslant x_k^* \leqslant H^{*p}, \qquad k \geqslant p+1. \tag{16}$$

Доведення. Оцінки (10) для лімітант, знайдені в наближенні з номером m, позначимо додатковим верхнім індексом m. Тоді оцінки (11) для невідомих набувають вигляду

$$h^{mp} \leqslant x_k^* \leqslant H^{mp}, \qquad k = p+1, p+2, \ldots. \tag{17}$$

Підставляючи оцінки (17) у праву частину скінченної системи (6), приходимо до двох систем щодо нижніх і верхніх оцінок для перших p невідомих:

$$\check{x}_k - \sum_{n=1}^{p} a_{kn}\check{x}_n = b_k + \widetilde{b}_k h^{mp}, \qquad \widehat{x}_k - \sum_{n=1}^{p} a_{kn}\widehat{x}_n = b_k + \widetilde{b}_k H^{mp}, \qquad k = \overline{1,p}.$$

Вільними членами тут є лінійні комбінації вільних членів систем (13), (14). Отже, і розв'язками цих лінійних систем є лінійні комбінації відповідних розв'язків:

$$\check{x}_k = \check{x}_k + h^{mp}\widetilde{x}_k, \qquad \widehat{x}_k = \check{x}_k + H^{mp}\widetilde{x}_k.$$

При цьому на підставі теорем порівняння [5] знаходимо оцінки для перших p невідомих:

$$\check{x}_k + h^{mp}\widetilde{x}_k \leqslant x_k^* \leqslant \check{x}_k + H^{mp}\widetilde{x}_k, \qquad k = \overline{1,p}. \tag{18}$$

Підставляючи оцінки (18) у вирази (9) для лімітант, одержуємо залежності "нижніх" $\check{V}_k^{mp}$ і "верхніх" $\widehat{V}_k^{mp}$ лімітант від номера наближення m:

$$\check{V}_k^{mp} = \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}(\check{x}_n + h^{mp}\widetilde{x}_n)}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}}, \qquad \widehat{V}_k^{mp} = \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}(\check{x}_n + H^{mp}\widetilde{x}_n)}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}}, \qquad k \geqslant p+1.$$

Згідно з (10) у наближенні $m+1$ нижня границя h^{m+1p} не перевищує $\check{V}_k^{mp}$, а верхня границя H^{m+1p} не менша ніж $\widehat{V}_k^{mp}$. Отже, маємо нерівності між границями у довільних сусідніх наближеннях ($k = p+1, p+2, \ldots$):

$$h^{m+1p} \leqslant \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}(\check{x}_n + h^{mp}\widetilde{x}_n)}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}}, \qquad \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}(\check{x}_n + H^{mp}\widetilde{x}_n)}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}} \leqslant H^{m+1p}.$$

Виконуючи тут граничний перехід $m \to \infty$, приходимо до лінійних нерівностей щодо граничних меж h^{*p}, H^{*p}

$$h^{*p} \leqslant \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}\check{x}_n + h^{*p}\sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}\widetilde{x}_n}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}}, \qquad \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}\check{x}_n + H^{*p}\sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}\widetilde{x}_n}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}} \leqslant H^{*p}.$$

З огляду на невід'ємність усіх елементів у цих лінійних нерівностях знаходимо їх розв'язки:

$$h^{*p} \leqslant \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}\breve{x}_n}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}(1-\widetilde{x}_n)}, \qquad \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}\breve{x}_n}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}(1-\widetilde{x}_n)} \leqslant H^{*p}, \qquad k \geqslant p+1. \tag{19}$$

Нерівності (19) свідчать про те, що граничні межі лімітант Б. М. Кояловича виявляються нижньою і верхньою межами граничного виразу (12) для лімітант. Виконуючи граничний перехід $m \to \infty$ у нерівностях (17) і (18), приходимо до оцінок (16) розв'язку нескінченної системи (1). Доведення закінчено.

Частинним випадком нескінченної системи (1) є парна нескінченна система

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{kn} y_n + b_k, \qquad y_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn} x_n + \beta_k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \tag{20}$$

Поширення теореми 1 на систему (20) приводить до двох граничних виразів лімітант:

$$V_k^{*p} = \frac{b_k + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{kn}\breve{y}_n}{\rho_k + \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}(1-\widetilde{y}_n)}, \qquad W_k^{*p} = \frac{\beta_k + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{kn}\breve{x}_n}{r_k + \sum\limits_{n=1}^{p} \alpha_{kn}(1-\widetilde{x}_n)}, \qquad k = p+1, p+2, \ldots,$$

де $\rho_k = 1 - \sum\limits_{n=1}^{p} a_{kn}$; $r_k = 1 - \sum\limits_{n=1}^{p} \alpha_{kn}$; $\breve{x}_n$, $\breve{y}_n$ — розв'язок системи (20) методом простої редукції; $\widetilde{x}_n$, $\widetilde{y}_n$ — розв'язок системи (20) методом редукції, але із спеціальними вільними членами $\widetilde{b}_k = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} a_{kn}$, $\widetilde{\beta}_k = \sum\limits_{n=p+1}^{\infty} \alpha_{kn}$.

Точні нижні і верхні межі щодо граничних виразів лімітант

$$h^{*p} = \inf_{k \geqslant p+1} \{V_k^{*p}, W_k^{*p}\}, \qquad H^{*p} = \sup_{k \geqslant p+1} \{V_k^{*p}, W_k^{*p}\}$$

оцінюють головний розв'язок системи (20) такими нерівностями:

$$\begin{aligned} &\breve{x}_k + h^{*p}\widetilde{x}_k \leqslant x_k^* \leqslant \breve{x}_k + H^{*p}\widetilde{x}_k, \qquad \breve{y}_k + h^{*p}\widetilde{y}_k \leqslant y_k^* \leqslant \breve{y}_k + H^{*p}\widetilde{y}_k, \qquad k = \overline{1,p}; \\ &h^{*p} \leqslant x_k^* \leqslant H^{*p}, \qquad h^{*p} \leqslant y_k^* \leqslant H^{*p}, \qquad k = p+1, p+2, \ldots. \end{aligned} \tag{21}$$

Застосуємо нерівності (21) до оцінок впливу параметра p на похибки розв'язку регулярної парної нескінченної системи ($k = 1, 2, \ldots$):

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{32k^3}{\left(\operatorname{cth} 2k\pi + \dfrac{2k\pi}{\operatorname{sh}^2 2k\pi}\right)\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{(n^2+4k^2)^2}, \\ y_k &= \frac{4k^3}{\operatorname{cth} \dfrac{\pi}{2}k + \dfrac{\pi k}{2\operatorname{sh}^2(\pi/2)k}} \left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(4n^2+k^2)^2} + \frac{3}{k^4\pi^4}\right), \end{aligned} \tag{22}$$

Таблиця 1

p	9	50	200	400	900
$100 \times H^{*p}$	7,3047	7,2468	7,24554	7,24544	7,24534
$100 \times h^{*p}$	7,2141	7,2413	7,24499	7,24522	7,24531
$\ln(p/5)$	0,6	2,3	3,7	4,4	5,2

яка виникла [1, 3] у задачі про поперечний згин затисненої вздовж границі тонкої прямокутної пластинки з відношенням боків 1 : 2. У роботі [1] систему (22) розв'язано методом лімітант ($p = 9$). Найбільшою виявилася похибка в оцінках нескінченної частини розв'язку. Обчислені за формулами (21) оцінки h^{*p}, H^{*p} нескінченної частини розв'язку наведені в табл. 1. Як видно з табл. 1, збільшення параметра p призводить до збігу цифр у верхніх і нижніх оцінках. Таким чином, можна досягти достатньої точності розв'язку. Кількість цифр, що збіглися, дорівнює приблизно $\ln(p/5)$.

1. *Коялович Б. М.* Исследования о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1930. – № 3. – С. 41–167.
2. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
3. *Meleshko V. V.* Bending of an elastic rectangular clamped plate: exact versus “engineering” solutions // J. Elasticity. – 1997. – **48**, No 1. – P. 1–50.
4. *Бондаренко П. С.* К вопросу об единственности для бесконечных систем линейных уравнений // Мат. сборник. – 1951. – **29**, № 2. – С. 403–418.
5. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. – 4-е изд. – Москва; Ленинград: Гостехиздат, 1952. – 695 с.

Таврійський національний університет ім. В. І. Вернадського, Сімферополь

Надійшло до редакції 09.07.2006