УДК 517.9

М. Д. Починайко (Ін-т прикл. математики, Нац. ун-т „Львів. політехніка”),
Ю. М. Сидоренко (Львів. нац. ун-т)

ПОБУДОВА ОПЕРАТОРІВ РОЗСІЯННЯ МЕТОДОМ БІНАРНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ДАРБУ

By using the binary Darboux transformations, we construct scattering operators for the Dirac system with special potential that depends on $2n$ arbitrary functions of one variable. We establish that one of these operators coincides with the scattering operator obtained by L. Nyzhnyk in the case of degenerate scattering data. We show that the scattering operator for the Dirac system is obtained as the composition of three Darboux autotransformations or is factorized by two operators of binary transformation of the special form. We also consider several reductions of these operators.

З допомогою бінарних перетворень Дарбу побудовано оператори розсіяння для системи Дірака з спеціальним потенціалом, що залежить від $2n$ довільних функцій однієї змінної. Показано, що один із них збігається з оператором розсіяння, отриманим Л. П. Нижником, у випадку вироджених даних розсіяння. Продемонстровано, що оператор розсіяння для системи Дірака отримується як композиція трьох автоперетворень Дарбу або факторизується двома операторами бінарних перетворень спеціального вигляду. Розглянуто також декілька редукцій цих операторів.

1. Вступ. Опишемо структуру цієї роботи. У вступі коротко наведено результати щодо прямої й оберненої задач розсіяння для системи Дірака, а також означення операторів бінарних перетворень типу Дарбу для загальної системи Дірака.

У другому пункті описано конструкцію бінарних перетворень для оператора Дірака зі спеціальною додатковою редукцією ермітового спряження. У третьому пункті наведено деякі типи операторів, що діють інваріантно, як і оператор розсіяння, у просторі розв'язків незбуреної системи Дірака. Ці оператори факторизуються операторною парою бінарних перетворень і визначають автоперетворення Дарбу. Показано також, що при спеціальній редукції вони тісно пов'язані з оператором Дірака, потенціал якого розглядав Л. П. Нижник. У четвертому пункті продовжено побудову інших типів автоперетворень Дарбу на основі операторів загальних бінарних перетворень. Показано, що оператор розсіяння для системи Дірака отримується як композиція трьох автоперетворень Дарбу або факторизується двома операторами бінарних перетворень спеціального вигляду. Також розглянуто деякі цікаві редукції цих операторів.

Зауважимо, що всі результати з третього та четвертого пунктів можна отримати і для випадку загальної системи рівнянь Дірака (1), але для нас більш цікавим (і зрозуміло, дещо складнішим) є випадок оператора Дірака (12) з додатковою редукцією. Це обумовлено можливістю використання його в якості оператора Лакса при інтегруванні нелінійної моделі Деві – Стюартсона.

Пряму й обернену задачі розсіяння для нестаціонарної системи рівнянь Дірака $LY = 0$ в характеристичних змінних, що має вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_1(x,y)}{\partial x} + u_1(x,y)Y_2(x,y) &= 0, \\ \frac{\partial Y_2(x,y)}{\partial y} + u_2(x,y)Y_1(x,y) &= 0, \qquad u_1,\ u_2 \in L_2(\mathbb{R}^2), \end{aligned} \tag{1}$$

розглядав Л. П. Нижник [1, 2]. Нагадаємо ці результати. Розв'язок $Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix}$ системи (1) допускає асимптотики

$$\begin{aligned} a_1(y) &= Y_1(-\infty, y), \qquad b_1(y) = Y_1(+\infty, y), \\ a_2(x) &= Y_2(x, -\infty), \qquad b_2(x) = Y_2(x, +\infty). \end{aligned} \tag{2}$$

У роботі [2] показано, що для кожної з пар (a_1, a_2), (b_1, b_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2) довільно заданих функцій a_i, $b_i \in L_2(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, існує єдиний розв'язок Y, для якого ця пара є відповідною асимптотикою (2) на нескінченності. Це дає можливість розв'язати пряму задачу розсіяння, яка полягає в знаходженні розв'язків системи за однією із згадуваних пар асимптотик. Обернена задача розсіяння для системи (1) полягає в знаходженні коефіцієнтів (потенціалів) u_1, u_2 за заданим оператором розсіяння S, який визначається рівністю

$$b = Sa, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Якщо $u_1 \equiv u_2 \equiv 0$, то оператор S збігається з одиничним оператором I. Доведено [2], що у просторі $L_2(\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2)$ існує обернений оператор S^{-1}. Оператори S і S^{-1} мають вигляд

$$S = I + F, \quad S^{-1} = I + G, \tag{4}$$

де $F = \| F_{ij} \|_{i,j=1}^2$, $G = \| G_{ij} \|_{i,j=1}^2$ — матричні інтегральні оператори Гільберта – Шмідта, діагональні елементи F_{ii}, G_{ii}, $i \in \{1, 2\}$, є інтегральними операторами Вольтерра

$$F_{11} = W_{1+}, \quad F_{22} = W_{2+}, \quad G_{11} = W_{1-}, \quad G_{22} = W_{2-},$$

де $+$ $(-)$ означає змінну верхню (нижню) межу інтегрування. Для знаходження коефіцієнтів u_1, u_2 досить задати оператори F_{12}, G_{21}, або F_{21}, G_{11}, які називають даними розсіяння. Коефіцієнти u_1, u_2 визначаються за допомогою рівностей

$$u_1 = B_{12}(x, y; x + 0), \quad u_2 = -B_{21}(x, y; y - 0), \tag{5}$$

де B_{12}, B_{21} — розв'язки інтегральних рівнянь

$$\begin{gathered} B_{12}(x, y; \eta) + F_{12}(y, \eta) - \int_x^{\infty} B_{12}(x, y; \tau) \left[\int_{-\infty}^{y} G_{21}(\tau, s) F_{12}(s, \eta)\, ds \right] d\tau = 0, \\ B_{21}(x, y; \eta) + G_{21}(x, \eta) - \int_{-\infty}^{y} B_{21}(x, y; \tau) \left[\int_{x}^{\infty} F_{12}(\tau, s) G_{21}(s, \eta)\, ds \right] d\tau = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Результати (5), (6) застосовувалися, зокрема, для розв'язування методом оберненої задачі розсіяння (МОЗР) деяких еволюційних просторово-двовимірних рівнянь, що допускають зображення Лакса, де фігурує згаданий оператор Дірака (1) [2 – 4]. Крім МОЗР, який в класичному варіанті ґрунтується на дослідженні рівнянь Гельфанда – Левітана – Марченка (6) [2 – 7], для побудови широких класів точних розв'язків інтегровних систем можна застосувати інші, більш алгебризовані методи, наприклад метод бінарних перетворень Дарбу [8 – 15].

Зокрема, авторами в роботі [13] за допомогою бінарних перетворень Дарбу виписано формули точних розв'язків для просторово-двовимірного узагальненого рівняння Кортевега – де Фріза і модифікованого двовимірного рівняння Кортевега – де Фріза. У тій же роботі показано, що розв'язки цих рівнянь, а також розв'язки просторово-двовимірних рівнянь Шредінгера, отримані МОЗР, містяться серед розв'язків, отриманих за допомогою бінарних перетворень Дарбу.

Наведемо деякі означення та результати з бінарних перетворень Дарбу для системи Дірака [13, 14] у вигляді, зручному для використання в даній роботі.

Бінарні перетворення Дарбу для оператора Дірака. Нехай:

1) $Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix}$ — довільний розв'язок (вектор-стовпчик) системи

$$LY = 0, \tag{7}$$

а $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,y) \\ \varphi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \ldots & \varphi_{1K} \\ \varphi_{21} & \ldots & \varphi_{2K} \end{pmatrix}$ — деякий фіксований $(2 \times K)$-матричний розв'язок системи (7);

2) $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x,y) \\ \psi_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \ldots & \psi_{1K} \\ \psi_{21} & \ldots & \psi_{2K} \end{pmatrix}$ — деякий фіксований $(2 \times K)$-матричний розв'язок транспонованої системи рівнянь

$$L^{\tau}\psi = 0, \qquad L^{\tau} = \begin{pmatrix} -\partial_x & u_2 \\ u_1 & -\partial_y \end{pmatrix}.$$

Неважко перевірити, що $(K \times K)$-матричні функції

$$P[\psi, \varphi] := -\psi_2^{\top}\varphi_2, \qquad Q[\psi, \varphi] := \psi_1^{\top}\varphi_1$$

задовольняють співвідношення

$$P_y = Q_x. \tag{8}$$

Наслідком співвідношень (8) є існування $(K \times K)$-матричного потенціалу $\Omega := \Omega[\psi, \varphi]$:

$$d\Omega[\psi, \varphi] = P dx + Q dy.$$

Оскільки потенціал визначається з точністю до сталої $(K \times K)$-матриці C, його завжди можна зробити невиродженим (локально) в околі довільної фіксованої точки (x_0, y_0). Оператор бінарних перетворень W визначається формулою

$$WY := Y - \varphi(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}\Omega[\psi, Y] = \hat{Y}, \tag{9}$$

де потенціал реалізуємо так:

$$\Omega[\psi, \varphi] := \int_{M_0}^{M} (-\psi_2^{\top}\varphi_2)\, dx + \psi_1^{\top}\varphi_1\, dy, \tag{10}$$

$$M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \qquad M = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Оператор W переводить оператор L в оператор $\hat{L} = WLW^{-1}$ вигляду

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \partial_x & \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 & \partial_y \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= u_1 - \varphi_1(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}\psi_2^{\top}, \\ \hat{u}_2 &= u_2 + \varphi_2(C + \Omega[\psi, \varphi])^{-1}\psi_1^{\top}. \end{aligned} \tag{11}$$

При цьому функція $\hat{Y} := WY$ є розв'язком системи Дірака (1) з коефіцієнтами (потенціалами) $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$ (11).

2. Оператори перетворень для σ-косоермітового оператора Дірака. У даній роботі розглядається оператор Дірака L_1 вигляду

$$L_1 = \begin{pmatrix} \partial_x & u \\ \mu\bar{u} & \partial_y \end{pmatrix}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad u \in L_2(\mathbb{R}), \tag{12}$$

що допускає редукцію

$$L_1^* = -\sigma L_1 \sigma^{-1}, \qquad L_1^* := \bar{L}_1^{\tau},$$

де $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\mu^{-1} \end{pmatrix}$, внаслідок чого між розв'язками лінійної системи

$$L_1 Y = 0 \tag{13}$$

та транспонованої системи $L_1^{\tau} \tilde{Y}(x, y) = 0$ існує співвідношення

$$\tilde{Y} = \sigma \bar{Y}. \tag{14}$$

Нехай $Y_0 = \begin{pmatrix} Y_1(y) \\ Y_2(x) \end{pmatrix}$ — довільний, а $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}$ — фіксований матричний розмірності $(2 \times K)$ розв'язок незбуреної системи Дірака

$$L_0 Y_0 = 0, \tag{15}$$

де $L_0 = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \end{pmatrix}$.

Враховуючи редукційне співвідношення (14), яке, очевидно, задовольняють розв'язки рівнянь (15) та транспонованої системи, отримуємо, що формули (9) – (11) набирають вигляду

$$Y = WY_0 = Y_0 - \varphi(C + \Omega[\sigma\bar{\varphi}, \varphi])^{-1} \Omega[\sigma\bar{\varphi}, Y_0], \qquad C^* = C, \tag{16}$$

$$\Omega[\sigma\bar{\varphi}, \varphi] := \int_{M_0}^{M} \varphi_1^* \varphi_1 dy + \mu^{-1} \varphi_2^* \varphi_2 dx, \tag{17}$$

$$L_1 = W L_0 W^{-1}, \tag{18}$$

$$u = \mu^{-1} \varphi_1 (C + \Omega[\sigma\bar{\varphi}, \varphi])^{-1} \varphi_2^*. \tag{19}$$

За формулою (17) визначимо матричні потенціали $\Omega_1[\sigma\bar{\varphi}, \varphi]$ (поклавши $x_0 = -\infty$, $y_0 = -\infty$) і $\Omega_2[\sigma\bar{\varphi}, \varphi]$ (поклавши $x_0 = +\infty$, $y_0 = +\infty$):

$$\begin{aligned} \Omega_1[\sigma\bar{\varphi}, \varphi] &= \int_{-\infty}^{y} \varphi_1^*(s)\varphi_1(s) ds + \mu^{-1} \int_{-\infty}^{x} \varphi_2^*(\tau)\varphi_2(\tau) d\tau, \\ \Omega_2[\sigma\bar{\varphi}, \varphi] &= \int_{+\infty}^{y} \varphi_1^*(s)\varphi_1(s) ds + \mu^{-1} \int_{+\infty}^{x} \varphi_2^*(\tau)\varphi_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{20}$$

Враховуючи визначення потенціалів у формі (20), розв'язки системи (13) можна зобразити різними виразами

$$Z_1 = W_1 p, \qquad Z_2 = W_2 q, \tag{21}$$

де $p = \begin{pmatrix} p_1(y) \\ p_2(x) \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} q_1(y) \\ q_2(x) \end{pmatrix}$ — деякі вектор-функції, компоненти яких належать $L_2(\mathbb{R})$, які є розв'язками незбуреної системи (15),

$$W_1 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\Delta_1^{-1}\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \varphi_2(x)\Delta_1^{-1}\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\Delta_1 = C_1 + \int\limits_{-\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\varphi_1(s)ds + \mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau,$$

C_1 — довільна стала ермітова $(K\times K)$-матриця, I — одиничний оператор;

$$W_2 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\Delta_2^{-1}\int\limits_{+\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}\int\limits_{+\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \varphi_2(x)\Delta_2^{-1}\int\limits_{+\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}\int\limits_{+\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\Delta_2 = C_2 + \int\limits_{+\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\varphi_1(s)ds + \mu^{-1}\int\limits_{+\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau,$$

C_2 — стала $(K\times K)$-матриця, $C_2^* = C_2$.

З рівності (19) отримуємо співвідношення

$$C_2 = C_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*(s)\varphi_1(s)ds + \mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^*(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau. \tag{24}$$

Безпосередніми обчисленнями показано, що оператори W_1^{-1}, W_2^{-1} мають відповідно вигляд

$$W_1^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int\limits_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_1(y)\int\limits_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \varphi_2(x)\int\limits_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\int\limits_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{25}$$

$$W_2^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int\limits_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_1(y)\int\limits_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \varphi_2(x)\int\limits_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\int\limits_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Оператори W_1^{-1}, W_2^{-1} діють на вектор-функцію $Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y)\end{pmatrix}$ так:

$$W_1^{-1}Y = Y +$$

$$+ \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int\limits_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)Y_1(x,s)ds + \mu^{-1}\varphi_1(y)\int\limits_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)Y_2(\tau,-\infty)d\tau \\ \varphi_2(x)\int\limits_{-\infty}^{y}\Delta_1^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)Y_1(x,s)ds + \mu^{-1}\varphi_2(x)\int\limits_{-\infty}^{x}\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)Y_2(\tau,-\infty)d\tau \end{pmatrix},$$

$$W_2^{-1}Y = Y +$$
$$+\begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int\limits_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)Y_1(x,s)ds + \mu^{-1}\varphi_1(y)\int\limits_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\varphi_2^*(\tau)Y_2(\tau,+\infty)d\tau \\ \varphi_2(x)\int\limits_{+\infty}^{y}\Delta_2^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)Y_1(x,s)ds + \mu^{-1}\varphi_2(x)\int\limits_{+\infty}^{x}\Delta_2^{-1}(\tau,+\infty)\varphi_2^*(\tau)Y_2(\tau,+\infty)d\tau \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що за допомогою бінарних перетворень Дарбу для системи (13) авторами побудовано оператор розсіяння для оператора Дірака L_1 (12), виходячи з визначення (3). Також показано, що при спеціальному виборі функцій φ побудований оператор збігається з оператором розсіяння, отриманим Л. П. Нижником [2] у випадку вироджених даних розсіяння.

3. Інваріантні оператори та їх редукції. Із зображення розв'язків (21) у зв'язку з існуванням обернених операторів W_1^{-1}, W_2^{-1} (25), (26) отримуємо взаємно однозначний зв'язок між вектор-функціями p, q, що приводить до одного й того ж розв'язку

$$Y := Z_1 = Z_2.$$

Цей зв'язок визначає оператор $\mathbf{S}$:

$$q = \mathbf{S}p, \quad \mathbf{S} := W_2^{-1}W_1, \tag{27}$$

що діє інваріантно у просторі розв'язків незбуреної системи Дірака (15), тобто $[L_0, \mathbf{S}] = 0$.

Використовуючи формули (22), (26), отримуємо

$$\mathbf{S} = I -$$
$$-\begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,+\infty)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\Delta_2^{-1}(+\infty,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(+\infty,+\infty)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\Delta_2^{-1}(+\infty,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}. \tag{28}$$

З формул (23), (25) знаходимо оператор $\mathbf{S}^{-1}$ в явному вигляді

$$\mathbf{S}^{-1} = W_1^{-1}W_2 = I +$$
$$+\begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,-\infty)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\Delta_1^{-1}(-\infty,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(-\infty,-\infty)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\Delta_1^{-1}(-\infty,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Потенціал u оператора Дірака L (12) згідно з формулами (19), (21) буде таким:

$$u = \mu^{-1}\varphi_1(C_1 + \Omega_1[\sigma\overline{\varphi},\varphi])^{-1}\varphi_2^* = \mu^{-1}\varphi_1(C_2 + \Omega_2[\sigma\overline{\varphi},\varphi])^{-1}\varphi_2^*, \tag{30}$$

а сталі C_1, C_2 зв'язані співвідношенням (24).

Розглянемо деякі конкретні реалізації формул (28), (29), (30) при певному заданні функцій φ і сталої матриці C_1.

3.1. Виберемо фіксований розв'язок φ незбуреної системи (15) у вигляді $(2 \times 2n)$-матриці:

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(y) & 0 \\ 0 & g_2(x) \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} f_1(y) &= \big(f_{11}(y), f_{12}(y), \ldots, f_{1n}(y)\big), \\ g_2(y) &= \big(g_{21}(x), g_{22}(x), \ldots, g_{2n}(x)\big). \end{aligned} \tag{31}$$

Сталу $(2n \times 2n)$-матрицю C_1 задамо так:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & -\mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau) g_2(\tau) d\tau \end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$I_n = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1).$$

Зі співвідношення (24) отримуємо

$$C_2 = \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s) f_1(s) d\tau & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{33}$$

На підставі формул (31) – (33) оператори $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1}$, що зображені відповідно формулами (28), (29), наберуть вигляду

$$\mathbf{S} = I + \begin{pmatrix} 0, & \mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) g_2^*(\tau) \cdot d\tau \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2(x) f_1^*(s) \cdot ds, & \mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(x) \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s) f_1(s) ds \right] g_2^*(\tau) \cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{34}$$

$$\mathbf{S}^{-1} = I - \begin{pmatrix} -\mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau) g_2(\tau) d\tau \right] f_1^*(s) \cdot ds, & \mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(y) g_2^*(\tau) \cdot d\tau \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2(x) f_1^*(s) \cdot ds, & 0 \end{pmatrix}.$$

Потенціал u оператора L (12), що виражається формулою (30), при умовах (31) – (33) має вигляд

$$u = -\mu^{-1} f_1(y) \left[I_n - \mu^{-1} \int\limits_{+\infty}^{x} g_2^*(\tau) g_2(\tau) d\tau \int\limits_{-\infty}^{y} f_1^*(s) f_1(s) ds \right]^{-1} g_2^*(x) \tag{35}$$

і збігається з потенціалом, отриманим Л. П. Нижником [2] у випадку вироджених даних розсіяння. З цих міркувань ми і вибирали вигляд сталої матриці C_1 (32).

3.2. Вибираючи сталу матрицю C_1 в іншій формі, ми, очевидно, можемо будувати оператори $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}^{-1}$ в іншому вигляді (з відповідним потенціалом u оператора Дірака (12)). Наприклад, розглянемо випадок побудови операторів $\mathbf{S}$ (28), $\mathbf{S}^{-1}$ (29), якщо фіксований розв'язок системи (15) виберемо у вигляді (31), а сталу $(2n \times 2n)$-матрицю C_1 задамо так:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Тоді згідно з співвідношенням (24) стала C_2 набере вигляду

$$C_2 = \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s) f_1(s) ds & I_n \\ I_n & \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau) g_2(\tau) d\tau \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Використовуючи рівності (28), (29), (31), (36), (37), отримуємо

$$\mathbf{S} = I + \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \tag{38}$$

де

$$M_{11} = f_1(y)[I_n - B_{22} B_{11}]^{-1} B_{22} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s) \cdot ds,$$

$$M_{12} = \mu^{-1} f_1(y)[I_n - B_{22} B_{11}]^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau) \cdot d\tau,$$

$$M_{21} = g_2(x)[I_n - B_{11} B_{22}]^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s) \cdot ds,$$

$$M_{22} = \mu^{-1} g_2(x)[I_n - B_{11} B_{22}]^{-1} B_{11} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau) \cdot d\tau,$$

$$B_{11} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s) f_1(s) ds, \qquad B_{22} = \mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau) g_2(\tau) d\tau,$$

$$\mathbf{S}^{-1} = I - \begin{pmatrix} 0, & \mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(y) g_2^*(\tau) \cdot d\tau \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f_1^*(s) \cdot ds, & 0 \end{pmatrix}.$$

При цьому потенціал u (30) має вигляд

$$u = -\mu^{-1} f_1(y) \left[I_n - \mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{x} g_2^*(\tau) g_2(\tau) d\tau \int\limits_{-\infty}^{y} f_1^*(s) f_1(s) ds \right]^{-1} g_2^*(x). \tag{39}$$

3.3. Нехай сталу $(2n \times 2n)$-матрицю C_1 задано так:

$$C_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s) f_1(s) ds & I_n \\ I_n & -\frac{1}{2} \mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_2^*(\tau) g_2(\tau) d\tau \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Тоді

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s) f_1(s)\,ds & I_n \\ I_n & \frac{1}{2}\mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_2^*(\tau) g_2(\tau)\,d\tau \end{pmatrix}. \tag{41}$$

Аналогічно, використовуючи рівності (28), (29), (31), (40), (41), отримуємо

$$\mathbf{S} = I + \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S}^{-1} = I + \begin{pmatrix} N_{11} & -N_{12} \\ N_{21} & -N_{22} \end{pmatrix}, \tag{42}$$

де

$$N_{11} = \frac{1}{2} f_1(y)\left[I_n - \frac{1}{4}B_{22}B_{11}\right]^{-1} B_{22}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s)\cdot ds,$$

$$N_{12} = \mu^{-1} f_1(y)\left[I_n - \frac{1}{4}B_{22}B_{11}\right]^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau)\cdot d\tau,$$

$$N_{21} = g_2(x)\left[I_n - \frac{1}{4}B_{11}B_{22}\right]^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s)\cdot ds,$$

$$N_{22} = \frac{1}{2}\mu^{-1} g_2(x)\left[I_n - \frac{1}{4}B_{11}B_{22}\right]^{-1} B_{11}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau)\cdot d\tau.$$

У цьому випадку потенціал оператора L (12) обчислюється за формулою

$$u = -\mu^{-1} f_1(y)\left[I_n - \frac{1}{4}\mu^{-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{x} g_2^*(\tau)g_2(\tau)\,d\tau + \int\limits_{+\infty}^{x} g_2^*(\tau)g_2(\tau)\,d\tau\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_{-\infty}^{y} f_1^*(s)f_1(s)\,ds + \int\limits_{+\infty}^{y} f_1^*(s)f_1(s)\,ds\right)\right]^{-1} g_2^*(x). \tag{43}$$

4. Факторизація оператора розсіяння бінарними перетвореннями Дарбу. ***4.1.*** Якщо в матричному потенціалі $\Omega[\sigma\bar{\varphi},\varphi]$ (17) покласти $x_0 = +\infty$, $y_0 = -\infty$ ($x_0 = -\infty$, $y_0 = +\infty$), аналогічно до попередніх міркувань отримаємо оператори бінарних перетворень Дарбу, які позначатимемо відповідно $\tilde{W}_1$ ($\tilde{W}_2$):

$$\tilde{W}_1 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}\int\limits_{+\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}\int\limits_{+\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{44}$$

$$\tilde{\Delta}_1 = \tilde{C}_1 + \int\limits_{-\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\varphi_1(s)\,ds + \mu^{-1}\int\limits_{+\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\varphi_2(\tau)\,d\tau,$$

$\tilde{C}_1$ — довільна стала $(2n\times 2n)$-матриця;

$$\tilde{W}_2 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}\int\limits_{+\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}\int\limits_{+\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{45}$$

$$\tilde{\Delta}_2 = \tilde{C}_2 + \int\limits_{+\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\varphi_1(s)ds + \mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau,$$

$\tilde{C}_2$ — стала матриця.

У цьому випадку сталі $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$ задовольняють співвідношення

$$\tilde{C}_2 = \tilde{C}_1 + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*(s)\varphi_1(s)ds - \mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^*(\tau)\varphi_2(\tau)d\tau. \tag{46}$$

Безпосередніми обчисленнями отримуємо обернені оператори $\tilde{W}_1^{-1}$, $\tilde{W}_2^{-1}$:

$$\tilde{W}_1^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int\limits_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_1(y)\int\limits_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \varphi_2(x)\int\limits_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\int\limits_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$\tilde{W}_2^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int\limits_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_1(y)\int\limits_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \varphi_2(x)\int\limits_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(x,s)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\int\limits_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Аналогічно до формул (27), (29) визначимо оператори $\tilde{\mathbf{S}}$, $\tilde{\mathbf{S}}^{-1}$:

$$q = \tilde{\mathbf{S}}p, \qquad \tilde{\mathbf{S}} := \tilde{W}_2^{-1}\tilde{W}_1, \qquad \tilde{\mathbf{S}}^{-1} := \tilde{W}_1^{-1}\tilde{W}_2. \tag{49}$$

Використовуючи формули (44), (45), (47), (48), отримуємо явний вигляд операторів (49):

$$\begin{gathered} \tilde{\mathbf{S}} = I - \\ - \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,+\infty)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & -\mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,+\infty)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & -\mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,+\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{S}}^{-1} = I + \\ + \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,-\infty)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & -\mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,-\infty)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & -\mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{50}$$

4.2. Виберемо сталу $(2n \times 2n)$-матрицю $\tilde{C}_1$ у вигляді $\tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$, а фіксований розв'язок φ системи (15) у вигляді (31). Тоді за формулами (50) отримаємо

$$\tilde{\mathbf{S}} = I - \begin{pmatrix} \tilde{M}_{11} & \tilde{M}_{12} \\ \tilde{M}_{21} & \tilde{M}_{22} \end{pmatrix},$$

де

$$\tilde{M}_{11} = -f_1(y)[I_n + B_{22}B_{11}]^{-1}B_{22}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s)\cdot ds,$$

$$\tilde{M}_{12} = \mu^{-1}f_1(y)[I_n + B_{22}B_{11}]^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau)\cdot ds,$$

$$\tilde{M}_{21} = -g_2(x)[I_n + B_{11}B_{22}]^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s)\cdot ds, \tag{51}$$

$$\tilde{M}_{22} = \mu^{-1}g_2(x)[I_n + B_{11}B_{22}]^{-1}B_{11}\int_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau)\cdot d\tau,$$

$$\tilde{\mathbf{S}}^{-1} = I + \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)g_2^*(\tau)\cdot d\tau \\ -\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g_2(x)f_1^*(s)\cdot ds & 0 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку потенціал u оператора L (12) обчислюється за формулою (35).

Обчислимо елементи матричного оператора $\tilde{W}_1$, які позначимо $\tilde{W}_{11}^1$, $\tilde{W}_{12}^1$, $\tilde{W}_{21}^1$, $\tilde{W}_{22}^1$.

Враховуючи (31), (36), (44), знаходимо

$$\tilde{W}_{11}^1 = 1 + f_1(y)[I_n - A_{22}A_{11}]^{-1}A_{22}\int_{-\infty}^{y} f_1^*(s)\cdot ds,$$

$$\tilde{W}_{12}^1 = \mu^{-1}f_1(y)[I_n - A_{22}A_{11}]^{-1}\int_{+\infty}^{x} g_2^*(\tau)\cdot d\tau, \tag{52}$$

$$\tilde{W}_{21}^1 = g_2(x)[I_n - A_{11}A_{22}]^{-1}\int_{-\infty}^{y} f_1^*(s)\cdot ds,$$

$$\tilde{W}_{22}^1 = 1 + \mu^{-1}g_2(x)[I_n - A_{11}A_{22}]^{-1}A_{11}\int_{+\infty}^{x} g_2^*(\tau)\cdot d\tau,$$

де

$$A_{11} = \int_{-\infty}^{y} f_1^*(s)f_1(s)ds, \qquad A_{22} = \mu^{-1}\int_{+\infty}^{x} g_2^*(\tau)g_2(\tau)d\tau.$$

На підставі формул (16), (44), (52) розв'язок $Y = \begin{pmatrix} Y_1(x,y) \\ Y_2(x,y) \end{pmatrix}$ системи Дірака $L_1 Y = 0$ (13), де L_1 — оператор вигляду (12), набере вигляду

$$Y_1 = p_1(y) + f_1(y)[I_n - A_{22}A_{11}]^{-1}\left[A_{22}\int\limits_{-\infty}^{y} f_1^*(s)\,p_1(s)\,ds + \mu^{-1}\int\limits_{+\infty}^{x} g_2^*(\tau)\,p_2(\tau)\,d\tau\right],$$

$$Y_2 = p_2(x) + g_2(x)[I_n - A_{11}A_{22}]^{-1}\left[A_{11}\mu^{-1}\int\limits_{+\infty}^{x} g_2^*(\tau)\,p_2(\tau)\,d\tau + \int\limits_{-\infty}^{y} f_1^*(s)\,p_1(s)\,ds\right], \tag{53}$$

при цьому потенціал u оператора L_1 (12), як і в пп. 3.1, має вигляд (35). Отже, оператор L_1 (12) з потенціалом u (35) можна отримати як за допомогою операторів бінарних перетворень W_1, W_2 (22), (23), так і за допомогою операторів $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_2$ (44), (45). Для цього необхідно правильно вибирати сталі матриці C_1, $\tilde{C}_1$. А саме, C_1 задається формулою (32), а

$$\tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

4.3. Розглянемо пари $(b_1(y), a_2(x))$, $(a_1(y), b_2(x))$ асимптотик (2) і визначимо оператор розсіяння $\hat{S}$ рівністю

$$\begin{pmatrix} a_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix} = \hat{S}\begin{pmatrix} b_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix}. \tag{54}$$

У цьому підпункті ми покажемо, що оператор розсіяння $\hat{S}$ для системи Дірака розкладається в композицію трьох автоперетворень Дарбу, одне з яких задається інваріантним оператором $\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{W}_2^{-1}\tilde{W}_1$.

Оператор розсіяння $\hat{S}$ побудуємо за допомогою бінарних перетворень Дарбу (44), (45). Для цього в рівності (49) покладемо

$$p = \begin{pmatrix} p_1(y) \\ p_2(x) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{S}}_1^{-1}\begin{pmatrix} b_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix}, \qquad q = \begin{pmatrix} q_1(y) \\ q_2(x) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{S}}_2^{-1}\begin{pmatrix} a_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix}, \tag{55}$$

де

$$\tilde{\mathbf{S}}_1^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int\limits_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty, s)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & 0 \\ 0, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\int\limits_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau, -\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_2^{-1} = I + \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\int\limits_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty, s)\varphi_1^*(s)\cdot ds, & 0 \\ 0, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\int\limits_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau, +\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \tag{56}$$

і, відповідно,

$$\tilde{\mathbf{S}}_1 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty, y)\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\cdot ds, & 0 \\ 0, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x, -\infty)\int\limits_{+\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}, \quad (57)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_2 = I - \begin{pmatrix} \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty, y)\int\limits_{+\infty}^{y}\varphi_1^*(s)\cdot ds, & 0 \\ 0, & \mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x, +\infty)\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Оператори $\tilde{\mathbf{S}}_1$, $\tilde{\mathbf{S}}_2$ та їх обернені є операторами бінарних автоперетворень типу Дарбу у просторі розв'язків незбуреної системи Дірака (15). Їх визначення дозволяє задовольнити умову (54), яка виділяє серед усіх операторів, що діють інваріантно у просторі розв'язків незбуреної системи (15), єдиний оператор розсіяння $\hat{S}$. А саме, з рівностей (49), (54), (55) отримуємо

$$\hat{S} = \tilde{\mathbf{S}}_2\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{S}}_1^{-1}. \quad (59)$$

Безпосередніми обчисленнями (див. додаток), використовуючи (44), (48), (50), (56) – (58), отримуємо оператор розсіяння $\hat{S}$ у явному вигляді

$$\hat{S} = I - \begin{pmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} \\ \hat{S}_{21} & \hat{S}_{22} \end{pmatrix}, \quad (60)$$

де

$$\hat{S}_{11} = \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty, y)\left[\mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^*\varphi_2\,d\tau\right]\int\limits_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(+\infty, s)\varphi_1^*(s)\cdot ds,$$

$$\hat{S}_{12} = -\mu^{-1}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty, y)\tilde{\Delta}_2(-\infty, -\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau, -\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau,$$

$$\hat{S}_{21} = \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x, +\infty)\tilde{\Delta}_2(+\infty, +\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Delta}_2^{-1}(+\infty, s)\varphi_1^*(s)\cdot ds,$$

$$\hat{S}_{22} = -\mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x, -\infty)\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*\varphi_1\,dy\right]\int\limits_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\eta, +\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau.$$

З рівності (59), враховуючи формули (45), (47), (50), (56), (57), знаходимо обернений оператор $\hat{S}^{-1}$:

$$\hat{S}^{-1} = \tilde{S}_1\tilde{S}^{-1}\tilde{S}_2^{-1} = I + \begin{pmatrix} \hat{S}_{11}^{-1} & \hat{S}_{12}^{-1} \\ \hat{S}_{21}^{-1} & \hat{S}_{22}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (61)$$

де

$$\hat{S}_{11}^{-1} = \varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty, y)\left[\mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^*\varphi_2\,dx\right]\int\limits_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty, s)\varphi_1^*(s)\cdot ds,$$

$$\hat{S}_{12}^{-1} = -\mu^{-1}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty, y)\tilde{\Delta}_1(+\infty, +\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau, +\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau,$$

$$\hat{S}_{21}^{-1} = \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x, -\infty)\tilde{\Delta}_1(-\infty, -\infty)\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Delta}_1^{-1}(-\infty, s)\varphi_1^*(s)\cdot ds,$$

$$\hat{S}_{22}^{-1} = -\mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x, -\infty)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*\varphi_1 ds\right]\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\eta, +\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau.$$

Зауважимо, що рівність (59), враховуючи (49), можна записати так:

$$\hat{S} = \tilde{\mathbf{S}}_2\tilde{W}_2^{-1}\tilde{W}_1\tilde{\mathbf{S}}_1^{-1} = \hat{W}_2^{-1}\hat{W}_1,$$

де

$$\hat{W}_1 = \tilde{W}_1\tilde{\mathbf{S}}_1^{-1}, \qquad \hat{W}_2 = \tilde{W}_2\tilde{\mathbf{S}}_2^{-1} \tag{62}$$

є звичайними операторами перетворень, що переводять відповідні асимптотики у розв'язки рівнянь Дірака [1, 2].

Оператори бінарних перетворень Дарбу $\hat{W}_1$, $\hat{W}_2$ мають відповідно вигляд

$$\hat{W}_1 = I - \begin{pmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22}\end{pmatrix}, \qquad \hat{W}_2 = I - \begin{pmatrix}\hat{B}_{11} & \hat{B}_{12}\\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22}\end{pmatrix}, \tag{63}$$

де

$$\begin{aligned}
\hat{A}_{11} &= -\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x, y)\left[\mu^{-1}\int_{+\infty}^{x}\varphi_2^*\varphi_2 d\tau\right]\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty, s)\varphi_1^*(s)\cdot ds,\\
\hat{A}_{12} &= \mu^{-1}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x, y)\tilde{\Delta}_1(x, -\infty)\int_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau, -\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau,\\
\hat{A}_{21} &= \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x, y)\tilde{\Delta}_1(+\infty, y)\int_{-\infty}^{y}\tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty, s)\varphi_1^*(s)\cdot ds,\\
\hat{A}_{22} &= -\mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_1^{-1}(x, y)\left[\int_{-\infty}^{y}\varphi_1^*\varphi_1 ds\right]\int_{+\infty}^{x}\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau, -\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau,
\end{aligned} \tag{64}$$

$$\begin{aligned}
\hat{B}_{11} &= -\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x, y)\left[\mu^{-1}\int_{-\infty}^{y}\varphi_2^*\varphi_2 d\tau\right]\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty, s)\varphi_1^*(s)\cdot ds,\\
\hat{B}_{12} &= \mu^{-1}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x, y)\tilde{\Delta}_2(x, +\infty)\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau, +\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau,\\
\hat{B}_{21} &= \varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x, y)\tilde{\Delta}_2(-\infty, y)\int_{+\infty}^{y}\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty, s)\varphi_1^*(s)\cdot ds,\\
\hat{B}_{22} &= -\mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde{\Delta}_2^{-1}(x, y)\left[\int_{+\infty}^{y}\varphi_1^*\varphi_1 ds\right]\int_{-\infty}^{x}\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau, +\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau.
\end{aligned} \tag{65}$$

Зауваження. З очевидних співвідношень

$$[L_0, \tilde{\mathbf{S}}_1] = [L_0, \tilde{\mathbf{S}}_2] = 0 \tag{66}$$

випливає, що кожен із факторів $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_2$ (44), (45) та $\hat{W}_1$, $\hat{W}_2$ (63), (64) операторів $\tilde{\mathbf{S}}$ і $\hat{S}$ можна використати в якості одягаючого бінарного перетворення типу Дарбу $L_0 \to L_1$:

$$L_1 = \tilde{W}_1 L_0 \tilde{W}_1^{-1} = \tilde{W}_2 L_0 \tilde{W}_2^{-1} = \hat{W}_1 L_0 \hat{W}_1^{-1} = \hat{W}_2 L_0 \hat{W}_2^{-1}. \tag{67}$$

4.4. У цьому підпункті ми наведемо явний вигляд оператора розсіяння $\hat{S}$ і оберненого оператора $\hat{S}^{-1}$ для системи Дірака (13) з оператором L_1 вигляду (12), потенціалом u (35) і загальним розв'язком Y (53).

Вибираючи, як і в пп. 4.2, сталу $\tilde{C}_1$ у вигляді

$$\tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix},$$

а фіксований розв'язок системи (15) у вигляді (31), згідно з формулами (46), (60), (61) отримуємо

$$\tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^* f_1 dy & I_n \\ I_n & -\mu^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} g_2^* g_2 dx \end{pmatrix},$$

$$\hat{S}_r = I - \begin{pmatrix} \hat{F}_{11} & \hat{F}_{12} \\ \hat{F}_{21} & \hat{F}_{22} \end{pmatrix},$$

де

$$\hat{F}_{11} = \mu^{-1} f_1(y) \left[I_n + \mu^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2^* g_2 dx \int_{-\infty}^{y} f_1^* f_1 ds \right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2^* g_2 dx \int_{-\infty}^{y} f_1^*(s) \cdot ds,$$

$$\hat{F}_{12} = \mu^{-1} f_1(y) \left[I_n + \mu^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2^* g_2 dx \int_{-\infty}^{y} f_1^* f_1 ds \right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} g_2^*(\tau) \cdot d\tau,$$

$$\hat{F}_{21} = -\, g_2(x) \left[I_n - \mu^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^* f_1 dy \int_{+\infty}^{x} g_2^* g_2 d\tau \right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(s) \cdot ds,$$

$$\hat{F}_{22} = -\, \mu^{-1} g_2(x) \left[I_n - \mu^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^* f_1 dy \int_{+\infty}^{x} g_2^* g_2 d\tau \right]^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^* f_1 ds \int_{+\infty}^{x} g_2^*(\tau) \cdot d\tau,$$

$$\hat{S}_r^{-1} = I + \begin{pmatrix} \hat{G}_{11} & \hat{G}_{12} \\ \hat{G}_{21} & \hat{G}_{22} \end{pmatrix},$$

де

$$\hat{G}_{11} = \mu^{-1} f_1(y) \int_{-\infty}^{+\infty} g_2^* g_2 dx \int_{+\infty}^{y} \left[I_n + \mu^{-1} \int_{-\infty}^{s} f_1^* f_1 d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} g_2^* g_2 dx \right]^{-1} f_1^*(s) \cdot ds,$$

$$\hat{G}_{12} = \mu^{-1} f_1(y) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[I_n - \mu^{-1} \int_{+\infty}^{\tau} g_2^* g_2 d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^* f_1 dy \right]^{-1} g_2^*(\tau) \cdot d\tau,$$

$$\hat{G}_{21} = -g_2(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[I_n + \mu^{-1} \int_{-\infty}^{s} f_1^* f_1 d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} g_2^* g_2 dx \right]^{-1} f_1^*(s) \cdot ds,$$

$$\hat{G}_{22} = -\mu^{-1} g_2(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^* f_1 ds \int_{-\infty}^{x} \left[I_n - \mu^{-1} \int_{+\infty}^{\tau} g_2^* g_2 d\eta \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^* f_1 ds \right]^{-1} g_2^*(\tau) \cdot d\tau.$$

Зауважимо, що компоненти операторів $\hat{S}$, $\hat{S}^{-1}$ задовольняють співвідношення

$$\hat{G}_{21} = -\mu \hat{F}_{12}^*, \qquad \hat{G}_{12} = -\mu^{-1} \hat{F}_{21}^*, \qquad \hat{G}_{11} = \hat{F}_{11}^*, \qquad \hat{G}_{22} = \hat{F}_{22}^*.$$

Аналогічні співвідношення задовольняють і компоненти оператора розсіяння S, визначеного рівністю (3), та його оберненого S^{-1} при наявності додаткової редукції σ-косоермітового спряження (12) [2].

5. Заключні зауваження. У роботі продемонстровано тісний зв'язок між такими областями математичної фізики, як теорія розсіяння та теорія перетворень Дарбу диференціальних операторів. Зокрема, на прикладі системи рівнянь Дірака показано як у точно розв'язуваному випадку класичні оператори перетворень, що факторизують оператор розсіяння, і сам оператор розсіяння $\hat{S}$, визначений формулою (54), можна отримати в явному вигляді за допомогою бінарних перетворень Дарбу. При іншому визначенні оператора розсіяння, а саме, оператора S (3), авторами отримано аналогічні результати. Ми сподіваємось, що методологію цієї роботи можна також успішно застосувати для дослідження інших важливих операторів математичної фізики, і плануємо продемонструвати це у наступних статтях.

Один з авторів (Ю. М. Сидоренко) вдячний також Австрійській академічній службі за фінансову підтримку під час його перебування в Технічному університеті міста Відень, де і було завершено роботу над цією статтею.

Додаток. Враховуючи формули (56), рівність (55) записуємо у вигляді

$$p_1(y) = b_1(y) + \varphi_1(y) \int_{-\infty}^{y} \tilde{\Delta}_1^{-1}(+\infty, s) \varphi_1^*(s) b_1(s) ds,$$
$$p_2(x) = a_2(x) + \mu^{-1} \varphi_2(x) \int_{+\infty}^{x} \tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau, -\infty) \varphi_2^*(\tau) a_2(\tau) d\tau. \tag{68}$$

З рівності (49) отримуємо

$$q_1(y) = p_1(y) - \varphi_1(y) \tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty, +\infty) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(s) p_1(s) ds - \mu^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^*(\tau) p_2(\tau) d\tau \right],$$
$$q_2(x) = p_2(x) - \varphi_2(x) \tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty, +\infty) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1^*(s) p_1(s) ds - \mu^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2^*(\tau) p_2(\tau) d\tau \right]. \tag{69}$$

Підставляючи вирази для функцій $p_1(y)$, $p_2(x)$ (68) у рівності (69), після елементарних перетворень (заміни порядку інтегрування в подвійних інтегралах) одержуємо

$$
\begin{aligned}
q_1(y) \;=\; & b_1(y) + \varphi_1(y)\int\limits_{-\infty}^{y}\tilde\Delta_1^{-1}(+\infty, s)\varphi_1^*(s)b_1(s)\,ds - \varphi_1(y)\tilde\Delta_2^{-1}(-\infty,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*(s)b_1(s)\,ds \;+ \\
& + \varphi_1(y)\tilde\Delta_2^{-1}(-\infty,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}B(s)\tilde\Delta_1^{-1}(+\infty,s)\varphi_1^*(s)b_1(s)\,ds \;+ \\
& + \mu^{-1}\varphi_1(y)\tilde\Delta_2^{-1}(-\infty,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^*(\tau)a_2(\tau)\,d\tau \;- \\
& - \mu^{-1}\varphi_1(y)\tilde\Delta_2^{-1}(-\infty,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A(\tau)\tilde\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)a_2(\tau)\,d\tau, \\
q_2(x) \;=\; & a_2(x) + \mu^{-1}\varphi_2(x)\int\limits_{+\infty}^{x}\tilde\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)a_2(\tau)\,d\tau \;- \\
& - \varphi_2(x)\tilde\Delta_2^{-1}(-\infty,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*(s)b_1(s)\,ds \;+ \\
& + \varphi_2(x)\tilde\Delta_2^{-1}(-\infty,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}B(s)\tilde\Delta_1^{-1}(+\infty,s)\varphi_1^*(s)b_1(s)\,ds \;- \\
& - \mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde\Delta_2^{-1}(-\infty,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}A(\tau)\tilde\Delta_1^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)a_2(\tau)\,d\tau \;+ \\
& + \mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde\Delta_2^{-1}(-\infty,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2^*(\tau)a_2(\tau)\,d\tau,
\end{aligned}
\tag{70}
$$

де

$$
B(s) \;=\; \int\limits_{+\infty}^{s}\varphi_1^*(\xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi, \qquad A(\tau) \;=\; \mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\varphi_2^*(\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta.
$$

Оператор розсіяння $\hat S$ знаходимо з рівності

$$
\begin{pmatrix} a_1(y) \\ b_2(x) \end{pmatrix} \;=\; \tilde{\mathbf{S}}_2\begin{pmatrix} q_1(y) \\ q_2(x) \end{pmatrix} \;:=\; \hat S\begin{pmatrix} b_1(y) \\ a_2(x) \end{pmatrix}, \tag{71}
$$

де оператор $\tilde{\mathbf{S}}_2$ задано формулою (57).

Перша рівність у співвідношеннях (71) набирає вигляду

$$
\begin{aligned}
a_1(y) \;&=\; q_1(y) - \varphi_1(y)\tilde\Delta_2^{-1}(-\infty, y)\int\limits_{+\infty}^{y}\varphi_1^*(s)q_1(s)\,ds, \\
b_2(x) \;&=\; q_2(x) - \mu^{-1}\varphi_2(x)\tilde\Delta_2^{-1}(x,+\infty)\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_2^*(\tau)q_2(\tau)\,d\tau.
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Підставляючи формули (70) у рівності (72), знаходимо матричні елементи оператора розсіяння $\hat{S}$ (71) у вигляді (60). Наприклад, після згаданої підстановки оператор $\hat{S}_{12}$ визначається рівністю

$$\hat{S}_{12} = \mu^{-1}\varphi_1(y)\Big[\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,+\infty) - \tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,y)B(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,+\infty)\Big] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\Big[I - A(\tau)\tilde{\Delta}_1^{-1}(\tau,-\infty)\Big]\varphi_2^*(\tau)\,d\tau. \tag{73}$$

Враховуючи, що

$$\tilde{\Delta}_1(x,y) = \tilde{C}_1 + \int_{-\infty}^{y}\varphi_1^*\varphi_1\,ds + \mu^{-1}\int_{+\infty}^{x}\varphi_2^*\varphi_2\,d\tau =$$

$$= \tilde{\Delta}_2(x,y) = \tilde{C}_2 + \int_{+\infty}^{y}\varphi_1^*\varphi_1\,ds + \mu^{-1}\int_{-\infty}^{x}\varphi_2^*\varphi_2\,d\tau,$$

з рівності (73) отримуємо

$$\hat{S}_{12} = \mu^{-1}\varphi_1(y)\left[I - \left(\tilde{C}_2 + \int_{+\infty}^{y}\varphi_1^*\varphi_1\,ds\right)^{-1}\left(\tilde{C}_2 + \int_{+\infty}^{y}\varphi_1^*\varphi_1\,ds - \tilde{C}_2\right)\right]\tilde{C}_2^{-1} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty}\left[I - \left(\tilde{C}_2 - \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*\varphi_1\,ds + \mu^{-1}\int_{-\infty}^{\tau}\varphi_2^*\varphi_2\,d\eta - \tilde{C}_2 + \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*\varphi_1\,ds\right) \times\right.$$

$$\left.\times\left(\tilde{C}_2 - \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1^*\varphi_1\,ds + \mu^{-1}\int_{-\infty}^{\tau}\varphi_2^*\varphi_2\,d\eta\right)^{-1}\right]\varphi_2^*(\eta)\cdot d\eta =$$

$$= \mu^{-1}\varphi_1(y)\tilde{\Delta}_2^{-1}(-\infty,y)\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{\Delta}_2(-\infty,-\infty)\tilde{\Delta}_2^{-1}(\tau,-\infty)\varphi_2^*(\tau)\cdot d\tau.$$

Аналогічно знаходимо інші матричні елементи оператора розсіяння $\hat{S}$ (71).

1. *Нижник Л. П.* Обратная нестационарная задача рассеяния. – Киев: Наук. думка, 1973. – 182 с.
2. *Нижник Л. П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
3. *Нижник Л. П., Починайко М. Д.* Интегрирование пространственно-двумерного нелинейного уравнения Шредингера методом обратной задачи // Функцион. анализ. – 1982. – **16**, вып. 1. – С. 80 – 82.
4. *Ablowitz M. J., Haberman R.* Nonlinear evolution equations – two and three dimensions // Phys. Rev. Lett. – 1975. – **35**, № 18. – P. 1185 – 1188.
5. *Cornille H.* Solutions of the generalized non-linear Schrödinger equation in two spatial dimensions // J. Math. Phys. – 1979. – **20**, № 1. – P. 199 – 209.
6. *Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов. Метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
7. *Zakharov V. Ye.* Inverse scattering problem method // Solitons / Ed. R. K. Bullough, P. J. Caudrey. – Berlin etc.: Springer, 1980.

8. *Matveev V. B., Salle M. A.* Darboux transformations and solitons. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1991. – 120 p.
9. *Nimmo J. J. C.* Darboux transformations for a two-dimensional Zakharov – Shabat AKNS spectral problem // Inverse Problems. – 1992. – **8**. – P. 219 – 243.
10. *Guil F., Manas M.* Darboux transformation for the Davey – Stewartson equations // Phys. Lett. A. – 1996. – **217**. – P. 1 – 6.
11. *Сидоренко Ю. М.* Бінарні перетворення і $(2+1)$-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 11. – С. 1531 – 1550.
12. *Sydorenko Yu. M.* Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations // Mat. Stud. – 2003. – **19**, № 2. – C. 181 – 192.
13. *Починайко М. Д., Сидоренко Ю. М.* Інтегрування деяких $(2+1)$-вимірних інтегровних систем методами оберненої задачі розсіяння та бінарних перетворень Дарбу // Мат. студ. – 2003. – **19**, № 2. – С. 119 – 132.
14. *Pochynayko M., Sydorenko Yu.* Operators of binary Darboux transformations for Dirac's system // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. – 2004. – **50**, Pt 1. – P. 458 – 462.
15. *Sydorenko Yu.* Generalized binary Darboux-like theorem for constrained Kadomtsev – Petviashvili (cKP) flows // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. – 2004. – **50**, Pt 1. – P. 470 – 477.

Одержано 09.09.2005,
після доопрацювання — 25.11.2005