УДК 517.9

М. І. Сєров, Т. О. Жадан, Л. М. Блажко (Полтав. нац. техн. ун-т)

КЛАСИФІКАЦІЯ ЛІНІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ АЛГЕБР ГАЛІЛЕЯ, ПУАНКАРЕ ТА КОНФОРМНОЇ У ВИПАДКУ ДВОВИМІРНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

We classify linear representations of the Galilei, Poincaré, and conformal algebras nonequivalent with respect to linear transformations in the case of two-dimensional vector field. The results obtained are used when investigating symmetry properties of systems of nonlinear equations of the parabolic and hyperbolic types.

Проведено класифікацію лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної, нееквівалентних відносно лінійних перетворень, у випадку двовимірного векторного поля. Одержані результати застосовано до дослідження симетрійних властивостей систем нелінійних рівнянь параболічного та гіперболічного типів.

1. Вступ. При дослідженні симетрійних властивостей рівнянь та систем рівнянь математичної фізики

$$S\left(x, u, \underset{1}{u}, \ldots, \underset{n}{u}\right) = 0,$$

де $x \in R^n$ — незалежні змінні, $u = u(x) \in R^m$ — невідомі функції, $\underset{k}{u}$ — сукупність усіх похідних функцій u порядку k, виникає задача класифікації зображень їх алгебр інваріантності.

Поставимо задачу: описати нееквівалентні лінійні зображення алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної, відносно яких рівняння параболічного та гіперболічного типів є інваріантними у випадку $U \in R^2$.

У роботах [1 – 5] при дослідженні симетрійних властивостей лінійних гіперболічних та параболічних рівнянь описано деякі зображення цих алгебр. Опишемо ці нееквівалентні зображення при умові, що початкова система допускає лінійні перетворення еквівалентності

$$W = KU + L, \tag{1}$$

де K — невироджена стала матриця розмірності 2×2, L — стала матриця розмірності 2×1, $W = W(x)$ — нові невідомі функції. Більш детально про перетворення еквівалентності див. у роботах [6 – 8].

Базисні елементи алгебри Галілея $AG(1,1)$

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad G = x_0 \partial_1 + S_1, \tag{2}$$

доповнені оператором масштабних перетворень

$$D = 2x_0 \partial_0 + x_1 \partial_1 + S_2,$$

при умові

$$[S_1, S_2] = -S_1 \tag{3}$$

утворюють розширену алгебру Галілея

$$AG_1(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G, D \rangle. \tag{4}$$

Елементи цієї алгебри, доповнені оператором проективних перетворень

$$\Pi = x_0^2 \partial_0 + x_0 x_1 \partial_1 + x_0 S_2 + x_1 S_1 + S_3,$$

при умовах (3) та

$$[S_1, S_3] = 0, \quad [S_2, S_3] = 2S_3 \tag{5}$$

утворюють узагальнену алгебру Галілея

$$AG_2(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G, D, \Pi \rangle. \tag{6}$$

Аналогічно, якщо базисні оператори алгебри Галілея $A\tilde{G}(1,1)$ з оператором маси T_1

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad G = x_0\partial_1 + x_1 T_1 + T_2, \quad T_1 \tag{7}$$

доповнити оператором масштабних перетворень

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + T_3$$

при умовах

$$[T_1, T_2] = 0 \tag{8}$$

та

$$[T_1, T_3] = 0, \quad [T_2, T_3] = -T_2, \tag{9}$$

то одержимо розширену алгебру Галілея з оператором маси:

$$A\tilde{G}_1(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G, T_1, D \rangle. \tag{10}$$

Елементи алгебри (10), доповнені оператором проективних перетворень

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0 x_1\partial_1 + x_0 T_3 + x_1 T_2 + \frac{x_1^2}{2}T_1 + T_4,$$

при умовах (8), (9), а також

$$[T_1, T_4] = 0, \quad [T_2, T_4] = 0, \quad [T_3, T_4] = 2T_4 \tag{11}$$

утворюють узагальнену алгебру Галілея з оператором маси:

$$A\tilde{G}_2(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, G, T_1, D, \Pi \rangle. \tag{12}$$

Аналогічно доповнюємо базисні елементи алгебри Пуанкаре $AP(1,1)$

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + Q_1 \tag{13}$$

оператором масштабних перетворень

$$D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + Q_2$$

і одержуємо при умові

$$[Q_1, Q_2] = 0 \tag{14}$$

розширену алгебру Пуанкаре

$$AP_1(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, J_{01}, D \rangle. \tag{15}$$

Оператори цієї алгебри, доповнені операторами конформних перетворень

$$K_0 = 2x_0 D - x^2\partial_0 + 2x_1 Q_1 + Q_3,$$

$$K_1 = 2x_1 D + x^2\partial_1 + 2x_0 Q_1 + Q_4,$$

при умовах (14) та

$$[Q_1, Q_3] = Q_4, \quad [Q_2, Q_3] = Q_3, \quad [Q_3, Q_4] = 0, \qquad (16)$$
$$[Q_1, Q_4] = Q_3, \quad [Q_2, Q_4] = Q_4$$

утворюють конформну алгебру

$$AC(1,1) = \langle \partial_0, \partial_1, J_{01}, D, K_0, K_1 \rangle. \qquad (17)$$

Тут Q_a, T_a, S_a — оператори вигляду

$$Q_a = (\alpha_{abc}u^b + \beta_{ac})\partial_{u^c}, \qquad (18)$$

$$T_a = (m_{abc}u^b + n_{ac})\partial_{u^c}, \qquad (19)$$

$$S_d = (p_{dbc}u^b + s_{dc})\partial_{u^c}, \qquad (20)$$

$a = \overline{1,4}$, $d = \overline{1,3}$, $b, c = \overline{1,2}$, α_{abc}, β_{ac}, m_{abc}, n_{ac}, p_{dbc} і s_{dc} — сталі.

Зауваження. Вказані алгебри є найбільш загальними в класі алгебр (2), (4), (6), (7), (10), (12), (13), (15), (17) з операторами вигляду

$$Q_a = (\alpha^{abc}(x)u^b + \beta^{ac}(x))\partial_{u^c}, \quad T_a = (m^{abc}(x)u^b + n^{ac}(x))\partial_{u^c},$$
$$S_d = (p^{dbc}(x)u^b + s^{dc}(x))\partial_{u^c},$$

з довільними функціями $\alpha^{abc}(x)$, $\beta^{ac}(x)$, $m^{abc}(x)$, $n^{ac}(x)$, $p^{dbc}(x)$, $s^{dc}(x)$, $a = \overline{1,4}$, $d = \overline{1,3}$, $b, c = \overline{1,2}$. У цьому можна переконатися, вимагаючи виконання комутаційних співвідношень між операторами відповідних алгебр.

2. Класифікація лінійних зображень алгебр Галілея, Пуанкаре та конформної у випадку двовимірного векторного поля. Проведемо класифікацію алгебр, описаних у вступі, та наведемо їх зображення.

У роботі [9] описано нееквівалентні лінійні зображення алгебри Галілея (2). При цьому одержано 6 нееквівалентних зображень оператора S_1:

I. $S_1 = \partial_{u^1}$.

II. $S_1 = k_1\partial_{u^1} + m_1 u^2\partial_{u^2}$.

III. $S_1 = k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$.

IV. $S_1 = u^1\partial_{u^1} + k_1 u^2\partial_{u^2}$.

V. $S_1 = k_1 I + m_1 u^2\partial_{u^1}$.

VI. $S_1 = k_1 I + m_1 J$.

Тут $I = u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$, $J = u^1\partial_{u^2} - u^2\partial_{u^1}$, k_1, m_1 — довільні сталі.
Даний результат будемо використовувати при проведенні класифікації лінійних зображень алгебр (4), (6), (7), (10), (12), (13), (15), (17).

Теорема 1. *З точністю до перетворень еквівалентності* (1) *існують* 6 *нееквівалентних зображень розширеної алгебри Галілея* (4), *які задаються операторами* S_1, S_2, *наведеними в табл.* 1, *де* k_i — *довільні сталі.*

Таблиця 1

№ з/п	S_1	S_2
1	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + k_2\partial_{u^2}$
2	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + k_2u^2\partial_{u^2}, \quad k_2 \neq 0; -1$
3	∂_{u^1}	$k_2u^2\partial_{u^1} - I$
4	$k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$	$-u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2}$
5	$u^1\partial_{u^2}$	$k_2I - u^2\partial_{u^2}$
6	$k_1u^2\partial_{u^1}$	$k_2I + u^2\partial_{u^2}$

Доведення. Розглянемо детально перший випадок, коли $S_1 = \partial_{u^1}$. Використовуючи формули (3) та (20), знаходимо

$$\left[\partial_{u^1}, (p_{2ab}u^b + s_{2a})\partial_{u^a}\right] = p_{2a1}\partial_{u^a} = -\partial_{u^1},$$

звідки одержуємо $p_{211} = -1$, $p_{221} = 0$. Отже, оператор S_2 має вигляд

$$S_2 = (-u^1 + p_{212}u^2 + s_{21})\partial_{u^1} + (p_{222}u^2 + s_{22})\partial_{u^2}. \tag{21}$$

Оскільки формула (21) містить довільні сталі, то вона описує деякий клас операторів S_2. Знайдемо всі нееквівалентні зображення даного оператора відносно перетворень (1), вимагаючи при цьому інваріантність оператора $S_1 = \dfrac{\partial}{\partial u^1}$ відносно цих перетворень.

Оскільки після заміни (1)

$$\frac{\partial}{\partial u^a} = k_{ba}\frac{\partial}{\partial w^b},$$

то з рівності

$$k_{b1}\frac{\partial}{\partial w^b} = \frac{\partial}{\partial w^1}$$

маємо $k_{11} = 1$, $k_{21} = 0$.

Таким чином, лінійні невироджені перетворення, відносно яких оператор S_1 є інваріантним, у даному випадку мають вигляд

$$\begin{aligned} w^1 &= u^1 + k_{12}u^2 + l_1, \\ w^2 &= k_{22}u^2 + l_2, \quad k_{22} \neq 0, \end{aligned} \tag{22}$$

причому $\partial_{u^1} = \partial_{w^1}$, $\partial_{u^2} = k_{12}\partial_{w^1} + k_{22}\partial_{w^2}$.

Тепер подіємо перетвореннями (22) на оператор S_2. Одержимо

$$S_2 = \left[-w^1 + \frac{1}{k_{22}}(p_{212} + k_{12}(1 + p_{222}))w^2 - \right.$$

$$- \frac{l_2}{k_{22}}(p_{212} + k_{12}(1 + p_{222})) + l_1 + s_{21} + k_{12}s_{22}\Big]\partial_{w^1} +$$

$$+ \left[p_{222}w^2 + k_{22}s_{22} - l_2 p_{222}\right]\partial_{w^2}. \tag{23}$$

Виберемо сталі k_{12}, k_{22}, l_1 і l_2 таким чином, щоб максимально спростити оператор (23). Це можливо за умов

$$\begin{gathered} p_{212} + k_{12}(1 + p_{222}) = 0, \\ -\frac{l_2}{k_{22}}(p_{212} + k_{12}(1 + p_{222})) + l_1 + s_{21} + k_{12}s_{22} = 0, \\ k_{22}s_{22} - l_2 p_{222} = 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Очевидно, що другу рівність у (24) можна задовольнити при довільних значеннях сталих p_{abc} і s_{ab}. Для того щоб виконувались перша та третя рівності, необхідно вибирати значення сталих k_{ab}, l_a, враховуючи одну з умов:

1) $p_{222} \neq -1; 0$, $s_{22} \neq 0$,
2) $p_{222} = 0$, $s_{22} \neq 0$,
3) $p_{222} = -1$, $s_{22} \neq 0$,

кожна з яких приводить відповідно до таких нееквівалентних канонічних зображень оператора S_2:

1) $S_2 = -u^1\partial_{u^1} + k_2u^2\partial_{u^2}$, $k_2 \neq 0; -1$,
2) $S_2 = -u^1\partial_{u^1} + k_2\partial_{u^2}$,
3) $S_2 = k_2u^2\partial_{u^1} - I$.

Ці зображення відповідають зображенням 1 – 3 з табл. 1.

Аналогічно доповнюємо алгебру (2) оператором ділатації D для п. II – VI. При цьому для операторів п. III одержуємо два нееквівалентних відносно перетворень (1) канонічних зображення оператора S_2, що відповідають зображенням 4, 5 із табл. 1; для операторів п. V існує єдине канонічне зображення оператора S_2, що відповідає зображенню 6 із табл. 1. У випадках п. II, IV, VI умова (3) не виконується для жодних зображень оператора S_2.

Теорему доведено.

Теорема 2. *З точністю до перетворень еквівалентності* (1) *існують* 8 *нееквівалентних зображень узагальненої алгебри Галілея* (6), *які задаються операторами* S_1, S_2, S_3, *наведеними в табл.* 2, *де* m_1, k_i — *довільні сталі.*

Таблиця 2

№ з/п	S_1	S_2	S_3
1	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + k_2\partial_{u^2}$	0
2	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + k_2u^2\partial_{u^2}$, $k_2 \neq 0; -1$	0
3	∂_{u^1}	$-u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$	$k_3u^2\partial_{u^1}$
4	∂_{u^1}	$k_2u^2\partial_{u^1} - I$	0
5	$k_1\partial_{u^1} + m_1u^1\partial_{u^2}$	$-u^1\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2}$	$k_3\partial_{u^2}$
6	$u^1\partial_{u^2}$	$k_2 I - u^2\partial_{u^2}$	0

Закінчення табл. 2

№ з/п	S_1	S_2	S_3
7	$k_1 u^2 \partial_{u^1}$	$k_2 I + u^2 \partial_{u^2}$	0
8	$k_1 u^2 \partial_{u^1}$	$-2u^1 \partial_{u^1} - u^2 \partial_{u^2}$	$k_3 \partial_{u^1}$

Доведення. Розглянемо детально зображення алгебри Галілея (4), що відповідає зображенню 1 із табл. 1:

$$S_1 = \partial_{u^1}, \qquad S_2 = -u^1 \partial_{u^1} + k_2 \partial_{u^2}.$$

Доповнимо оператори цієї алгебри оператором проективних перетворень Π таким чином, щоб виконувались умови (5):

$$[S_1, S_3] = \left[\partial_{u^1}, (p_{3ab} u^b + s_{3a}) \partial_{u^a}\right] = p_{3a1} \partial_{u^a} = 0,$$

звідки $p_{3a1} = 0$. Отже, оператор S_3 має вигляд

$$S_3 = (p_{3a2} u^2 + s_{3a}) \partial_{u^a}.$$

Комутуючи його з S_2:

$$[S_2, S_3] = \left[-u^1 \partial_{u^1} + k_2 \partial_{u^2}, (p_{3a2} u^2 + s_{3a}) \partial_{u^a}\right] =$$

$$= k_2 p_{3a2} \partial_{u^a} + (p_{312} u^2 + s_{31}) \partial_{u^1} = 2(p_{3a2} u^2 + s_{3a}) \partial_{u^a},$$

одержуємо систему рівнянь

$$k_2 p_{312} + p_{312} u^2 + s_{31} = 2(p_{312} u^2 + s_{31}),$$

$$k_2 p_{322} = 2(p_{322} u^2 + s_{32}),$$

розв'язком якої є такий набір сталих: $p_{3ab} = 0$, $s_{3a} = 0$. Таким чином, маємо

$$S_1 = \partial_{u^1}, \qquad S_2 = -u^1 \partial_{u^1} + k_2 \partial_{u^2}, \qquad S_3 = 0,$$

що відповідає зображенням 1 із табл. 2. Діючи аналогічним чином, одержуємо решту зображень узагальненої алгебри Галілея (6).

Теорему доведено.

При класифікації зображень алгебри Галілея з оператором маси (7) потребують уточнення оператори T_1 і T_2, при класифікації алгебри Пуанкаре (13) — оператор Q_1. Для операторів T_1 і Q_1 використаємо класифікацію зображень I – VI, тобто

$$T_1 = Q_1 = S_1. \tag{25}$$

Розглянемо алгебру Галілея з оператором маси (7) та розширену алгебру Пуанкаре (15). Для того щоб оператори утворювали алгебру, необхідно виконання комутаційних співвідношень, з яких уточнюємо вигляд оператора T_2 для алгебри (7) і оператора Q_2 для алгебри (15).

Умови комутування для алгебри (7) мають вигляд (8), а для алгебри (15) задаються формулою (14). Враховуючи (25), одержуємо

$$T_2 = Q_2. \tag{26}$$

Теорема 3. *З точністю до перетворень еквівалентності* (1) *існують* 6 *нееквівалентних зображень алгебри Галілея з оператором маси* (7) *та розширеної алгебри Пуанкаре* (15), *які задаються операторами* Q_1 *і* Q_2, *наведеними в табл.* 3, *де* k_i, m_i — *довільні сталі.*

Таблиця 3

№ з/п	Q_1	Q_2
1	∂_{u^1}	$k_2\partial_{u^2} + m_2u^2\partial_{u^1}$
2	$k_1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}$	$k_2\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}$
3	$k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$	$k_2\partial_{u^2} + m_2(k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2})$
4	$k_1u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}$	$k_2u^1\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}$
5	$k_1I + m_1u^2\partial_{u^1}$	$k_2I + m_2u^2\partial_{u^1}$
6	$k_1I + m_1J$	$k_2I + m_2J$

Доведення. Враховуючи (25), (26), будемо доводити теорему для алгебр (7) і (15) одночасно.

Розглянемо зображення $Q_1 = \partial_{u^1}$. Запишемо комутаційні співвідношення (14) для операторів алгебр (7), (15):

$$[Q_1, Q_2] = \left[\partial_{u^1}, (\alpha_{2ab}u^b + \beta_{2a})\partial_{u^a}\right] = \alpha_{2a1}\partial_{u^a} = 0, \qquad a = \overline{1,2}.$$

Звідси одержимо $\alpha_{2a1} = 0$. Отже, оператор Q_2 має вигляд

$$Q_2 = (\alpha_{2a2}u^2 + \beta_{2a})\partial_{u^a}.$$

Знайдемо зображення оператора Q_2, нееквівалентні відносно перетворень (1), вимагаючи при цьому інваріантність відносно цих перетворень оператора $Q_1 = \partial_{u^1}$. З доведення теореми 1 відомо, що оператор Q_1 є інваріантним відносно невироджених перетворень (22). Застосовуючи ці перетворення до оператора Q_2, знаходимо

$$Q_2 = \left[\frac{1}{k_{22}}(\alpha_{212} + k_{12}\alpha_{222})w^2 + \beta_{21} - \frac{l_2}{k_{22}}(\alpha_{212} + k_{12}\alpha_{222}) + k_{12}\beta_{22}\right]\partial_{w^1} +$$
$$+ \left[\alpha_{222}w^2 + k_{22}\beta_{22} - \alpha_{222}l_2\right]\partial_{w^2}. \tag{27}$$

У залежності від того, чи виконується умова $\alpha_{222} = 0$, одержуємо два канонічних нееквівалентних зображення оператора Q_2:

1) $Q_2 = k_2\partial_{u^1} + m_2u^2\partial_{u^2}$,

2) $Q_2 = k_2\partial_{u^2} + m_2u^2\partial_{u^1}$,

з яких перший разом з оператором Q_1 є частинним випадком операторів 2 з табл. 3 при $k_1 = 1$, $m_1 = 0$, а другий разом з оператором Q_1 відповідає операторам, наведеним у першому рядку табл. 3.

Решту випадків одержуємо аналогічно.

Теорему доведено.

Теорема 4. *З точністю до перетворень еквівалентності* (1) *існують* 10 *нееквівалентних зображень розширеної алгебри Галілея з оператором маси* (10) *за умов* (25), (26), *які задаються операторами* Q_1, Q_2, T_3, *наведеними в табл.* 4, *де* k_i, m_i — *довільні сталі.*

Таблиця 4

№ з/п	Q_1	Q_2	T_3
1	∂_{u^1}	0	$k_3\partial_{u^2} + m_3u^2\partial_{u^1}$
2	∂_{u^1}	$k_2u^2\partial_{u^1}$	$k_3\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$
3	∂_{u^1}	$k_2\partial_{u^2}$	$k_3\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$
4	$k_1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}$	0	$k_3\partial_{u^1} + m_3u^2\partial_{u^2}$
5	$k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$	0	$k_3(k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}) + m_3\partial_{u^2}$
6	$k_1u^1\partial_{u^1}$	$k_2\partial_{u^2}$	$k_3u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$
7	I	$k_2u^2\partial_{u^1}$	$k_3I + u^2\partial_{u^2}$
8	$k_1u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}$	0	$k_3u^1\partial_{u^1} + m_3u^2\partial_{u^2}$
9	$k_1I + m_1u^2\partial_{u^1}$	0	$k_3I + m_3u^2\partial_{u^1}$
10	$k_1I + m_1J$	0	$k_3I + m_3J$

Доведення. Розглянемо детально зображення алгебри Галілея (7), що відповідає зображенню 1 із табл. 3. Цю алгебру розширюємо оператором D, вимагаючи виконання комутаційних співвідношень (9) та враховуючи умови (25), (26). В результаті маємо

$$[Q_1, T_3] = \left[\partial_{u^1}, (m_{3ab}u^b + n_{3a})\partial_{u^a}\right] = m_{3a1}\partial_{u^a} = 0,$$

звідки $m_{3a1} = 0$,

$$[Q_2, T_3] = \left[k_2\partial_{u^2} + m_2u^2\partial_{u^1}, (m_{3a2}u^2 + n_{3a})\partial_{u^a}\right] =$$

$$= k_2m_{3a2}\partial_{u^a} - m_2(m_{322}u^2 + n_{32})\partial_{u^1} = -k_2\partial_{u^2} - m_2u^2\partial_{u^1}.$$

Звідси, в свою чергу, одержуємо систему

$$k_2m_{312} - m_2(m_{322}u^2 + n_{32}) = -m_2u^2,$$

$$k_2m_{322} = -k_2,$$

розв'язком якої будуть три різних набори сталих, яким відповідають оператори Q_a, $a = 1, 2$, T_3:

$$k_2 = m_2 = 0, \tag{28}$$
$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = 0, \quad T_3 = \left(m_{3a2}u^2 + n_{3a}\right)\partial_{u^a},$$

$$k_2 = 0, \quad n_{32} = 0, \quad m_{322} = 1, \tag{29}$$
$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = k_2u^2\partial_{u^1}, \quad T_3 = \left(m_{312}u^2 + n_{31}\right)\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2},$$

$$m_2 = 0, \quad m_{312} = 0, \quad m_{322} = -1, \tag{30}$$
$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = k_2\partial_{u^2}, \quad T_3 = n_{31}\partial_{u^1} - \left(u^2 - n_{32}\right)\partial_{u^2}.$$

У кожному з випадків (28) – (30) оператор T_3 містить довільні сталі, тобто формули (28) – (30) задають деякі класи операторів. Знайдемо всі нееквівалентні зображення цих операторів відносно перетворень (1), вимагаючи при цьому, щоб оператори Q_1 та Q_2 були інваріантними відносно даних перетворень. Із теореми 1 випливає, що перетворення, відносно яких оператор Q_1 є інваріантним, мають вигляд (22). Вимагаючи інваріантність оператора Q_2 відносно перетворень (22), для кожного з трьох випадків одержуємо відповідно перетворення інваріантності операторів Q_1 і Q_2:

1) $w^1 = u^1 + k_{12}u^2 + l_1, \quad w^2 = k_{22}u^2 + l_2,$
2) $w^1 = u^1 + k_{12}u^2 + l_1, \quad w^2 = u^2,$
3) $w^1 = u^1 + l_1, \quad w^2 = u^2 + l_2.$

Діючи даними перетвореннями на оператор T_3, знаходимо зображення алгебри (10). Намагаючись максимально спростити вигляд оператора T_3, міркуємо, як і при доведенні теореми 1. Після вибору певним чином сталих для випадку (28) виникають три різних підвипадки. Таким чином, одержимо п'ять нееквівалентних канонічних зображень операторів Q_1, Q_2, T_3, заданих формулами

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = 0, \quad T_3 = k_3u^2\partial_{u^2}, \tag{31}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = 0, \quad T_3 = k_3\partial_{u^1} + m_3u^2\partial_{u^2}, \tag{32}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = 0, \quad T_3 = k_3\partial_{u^2} + m_3u^2\partial_{u^1}, \tag{33}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = k_2u^2\partial_{u^1}, \quad T_3 = k_3\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}, \tag{34}$$

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = k_2\partial_{u^2}, \quad T_3 = k_3\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}, \tag{35}$$

з яких (31), (32) є частинними випадками зображень 4 з табл. 4, а (33) – (35) збігаються з зображеннями 1 – 3 з даної таблиці.

Решту випадків одержуємо аналогічно.

Теорему доведено.

Теорема 5. *З точністю до перетворень еквівалентності* (1) *та за умов* (25), (26) *існують* 16 *нееквівалентних зображень узагальненої алгебри Галілея з оператором маси* (12), *що задаються операторами, наведеними в табл.* 5, *де* k_i, m_i — *довільні сталі.*

Таблиця 5

№ з/п	Q_1	Q_2	T_3	T_4
1	∂_{u^1}	0	$k_3\partial_{u^2} + m_3u^2\partial_{u^1}$	0
2	∂_{u^1}	0	$k_3\partial_{u^1} - 2u^2\partial_{u^2}$	$k_4\partial_{u^2}$

Закінчення табл. 5

№ з/п	Q_1	Q_2	T_3	T_4
3	∂_{u^1}	0	$k_3\partial_{u^1} + 2u^2\partial_{u^2}$	$k_4u^2\partial_{u^1}$
4	∂_{u^1}	$k_2u^2\partial_{u^1}$	$k_3\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$	0
5	∂_{u^1}	$k_2\partial_{u^2}$	$k_3\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$	0
6	$u^2\partial_{u^2}$	0	$-2u^1\partial_{u^1} + k_3u^2\partial_{u^2}$	$k_4\partial_{u^1}$
7	$k_1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}$	0	$k_3\partial_{u^1} + m_3u^2\partial_{u^2}$	0
8	$u^1\partial_{u^2}$	0	$-2I + k_3u^1\partial_{u^2}$	$k_4\partial_{u^2}$
9	$k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$	0	$k_3(k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}) + k_3\partial_{u^2}$	0
10	$k_1u^1\partial_{u^1}$	$k_2\partial_{u^2}$	$k_3u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$	0
11	I	$k_2u^2\partial_{u^1}$	$k_3I + u^2\partial_{u^2}$	0
12	$k_1u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}$	0	$k_1u^1\partial_{u^1} + m_3u^2\partial_{u^2}$	0
13	I	0	$k_3I - 2u^2\partial_{u^2}$	$k_4u^1\partial_{u^2}$
14	I	0	$k_3I + 2u^2\partial_{u^2}$	$k_4u^2\partial_{u^1}$
15	$k_1I + m_1u^2\partial_{u^1}$	0	$k_3I + m_3u^2\partial_{u^1}$	0
16	$k_1I + m_1J$	0	$k_3I + m_3J$	0

Доведення. Розглянемо зображення розширеної алгебри Галілея з оператором маси (10), що відповідає наведеному у першому рядку табл. 4. Цю алгебру (з урахуванням умов (25), (26)) розширюємо оператором проективних перетворень Π, вимагаючи виконання комутаційних співвідношень (11):

$$[Q_1, T_4] = \left[\partial_{u^1}, \left(m_{4ab}u^b + n_{4a}\right)\partial_{u^a}\right] = m_{4a1}\partial_{u^a} = 0,$$

звідки знаходимо $m_{4a1} = 0$. Тоді оператор T_4 має вигляд

$$T_4 = \left(m_{4a2}u^2 + n_{4a}\right)\partial_{u^a},$$

$$[Q_2, T_4] = 0,$$

$$[T_3, T_4] = \left[k_3\partial_{u^2} + m_3u^2\partial_{u^1}; \left(m_{4a2}u^2 + n_{4a}\right)\partial_{u^a}\right] =$$

$$= k_3m_{4a2}\partial_{u^a} - m_3\left(m_{422}u^2 + n_{42}\right)\partial_{u^1} = 2\left(m_{4a2}u^2 + n_{4a}\right)\partial_{u^a}.$$

Звідси одержуємо систему

$$k_3m_{412} - m_3(m_{422}u^2 + n_{42}) = 2(m_{412}u^2 + n_{41}),$$

$$k_3m_{422} = 2(m_{422}u^2 + n_{42}),$$

розв'язком якої є $m_{4ab} = n_{4a} = 0$.

Таким чином, маємо перше нееквівалентне зображення алгебри (12):

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \quad Q_2 = 0, \quad T_3 = k_3\partial_{u^2} + m_3 u^2 \partial_{u^1}, \quad T_4 = 0,$$

що відповідає наведеному у першому рядку табл. 5.

Решту зображень отримуємо аналогічно.

Теорему доведено.

Теорема 6. *З точністю до перетворень еквівалентності* (1) *існують* 16 *нееквівалентних зображень конформної алгебри* (17), *які задаються операторами* Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, *наведеними в табл.* 6, *де* k_i, m_i — *довільні сталі.*

Таблиця 6

№ з/п	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
1	∂_{u^1}	$k_2 u^2\partial_{u^1} + m_2\partial_{u^2}$	0	0
2	$k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2}$	$k_2\partial_{u^2} + m_2(k_1\partial_{u^1} + u^1\partial_{u^2})$	0	0
3	$u^1\partial_{u^2}$	$k_2 I + m_2 u^1\partial_{u^2}$	0	0
4	$k_1\partial_{u^1} + m_1 u^2\partial_{u^2}$	$k_2\partial_{u^1} + m_2 u^2\partial_{u^2}$	0	0
5	$k_1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$	$k_2\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$	$k_3\partial_{u^2}$	$-k_3\partial_{u^2}$
6	$u^1\partial_{u^1} + k_1 u^2\partial_{u^2}$	$k_2 u^1\partial_{u^1} + m_2 u^2\partial_{u^2}$	0	0
7	I	$-I$	$k_3\partial_{u^1} + m_3\partial_{u^2}$	$-(k_3\partial_{u^1} + m_3\partial_{u^2})$
8	$(k_1+1)u^1\partial_{u^1} + k_1 u^2\partial_{u^2}$	$k_2 I - u^2\partial_{u^2}$	$k_3 u^1\partial_{u^2}$	$k_3 u^1\partial_{u^2}$
9	$(k_1+1)u^1\partial_{u^1} + k_1 u^2\partial_{u^2}$	$k_2 I + u^2\partial_{u^2}$	$k_3 u^2\partial_{u^1}$	$-k_3 u^2\partial_{u^1}$
10	$u^1\partial_{u^1} + k_1 u^2\partial_{u^2}$	$-u^1\partial_{u^1} + k_2 u^2\partial_{u^2}$	$k_3\partial_{u^1}$	$-k_3\partial_{u^1}$
11	$u^2\partial_{u^2} + I$	$-I - u^2\partial_{u^2}$	$k_3\partial_{u^1} + m_3 u^1\partial_{u^2}$	$-(k_3\partial_{u^1} + m_3 u^1\partial_{u^2})$
12	$u^2\partial_{u^2} + I$	$-u^1\partial_{u^1}$	$(k_3 u^2 + m_3)\partial_{u^1}$	$(k_3 u^2 - m_3)\partial_{u^1}$
13	$u^1\partial_{u^1}$	$u^1\partial_{u^1} + k_2\partial_{u^2}$	$k_3 u^1\partial_{u^2}$	$k_3 u^1\partial_{u^2}$
14	$I + k_1 u^2\partial_{u^1}$	$-I + k_2 u^2\partial_{u^1}$	$k_3\partial_{u^1}$	$-k_3\partial_{u^1}$
15	$k_1 I$	$k_2 I + m_2 u^2\partial_{u^1}$	0	0
16	$k_1 I + m_1 J$	$k_2 I + m_2 J$	0	0

Доведення. Розглянемо зображення розширеної алгебри Пуанкаре (15), що відповідає наведеному у першому рядку табл. 1.

Елементи цієї алгебри доповнимо операторами конформних перетворень, вимагаючи виконання умов комутування (16), тобто

$$[Q_1, Q_3] = \left[\partial_{u^1}, \left(\alpha_{3bc}u^c + \beta_{3b}\right)\partial_{u^b}\right] = \alpha_{3b1}\partial_{u^b}.$$

Тоді оператор Q_4 має вигляд

$$Q_4 = \alpha_{3b1}\partial_{u^b},$$

$$[Q_1, Q_4] = \left[\partial_{u^1}, \alpha_{3b1}\partial_{u^b}\right] = 0.$$

Отже,

$$Q_3 = 0,$$

тобто

$$Q_3 = \left(\alpha_{3bc}u^b + \beta_{3c}\right)\partial_{u^c} = 0.$$

Звідси $\alpha_{3bc} = \beta_{3c} = 0$, тобто

$$Q_3 = 0, \qquad Q_4 = 0,$$

$$[Q_2, Q_3] = 0, \qquad [Q_2, Q_4] = 0, \qquad [Q_3, Q_4] = 0.$$

Таким чином, маємо перше нееквівалентне зображення алгебри (4):

$$Q_1 = \partial_{u^1}, \qquad Q_2 = k_2u^2\partial_{u^1} + m_2\partial_{u^2}, \qquad Q_3 = 0, \qquad Q_4 = 0,$$

яке наведене в першому рядку табл. 6.

Решту зображень отримуємо аналогічно.

Теорему доведено.

Отже, як випливає з теорем 1 – 6, існують 10 нееквівалентних лінійних зображень узагальненої алгебри Галілея (6), 16 нееквівалентних лінійних зображень узагальненої алгебри Галілея з оператором маси (12) та 16 нееквівалентних зображень конформної алгебри (17). Тому, досліджуючи симетрійні властивості рівнянь та систем параболічного типу, як канонічні, можемо використовувати зображення, наведені в табл. 2 та 5, а при дослідженні симетрійних властивостей систем хвильових рівнянь — зображення, подані в табл. 6 (за умови, що початкові системи рівнянь допускають лінійні перетворення еквівалентності (1)).

3. Системи квазілінійних хвильових рівнянь, інваріантні відносно конформної алгебри. Наведемо приклад застосування одержаної класифікації лінійних зображень конформної алгебри у випадку $U \in R^2$ для дослідження симетрійних властивостей системи хвильових квазілінійних рівнянь.

Розглянемо систему квазілінійних хвильових рівнянь

$$\Box U = (F\partial)U, \tag{36}$$

де

$$U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}, \qquad F(U) = (F^0, F^1), \qquad F^{\alpha} = \begin{pmatrix} F^{11\alpha} & F^{12\alpha} \\ F^{21\alpha} & F^{22\alpha} \end{pmatrix},$$

$$\alpha = 0;1, \qquad \partial = (\partial_0, \partial_1), \qquad \Box = \partial_{00} - \partial_{11}.$$

Покажемо, що вона допускає лінійні перетворення еквівалентності (1). Підставивши $U = K^{-1}(W - L)$, знайдене з (1), у систему (36), одержимо

$$\Box K^{-1}W = F(K^{-1}(W-L))\partial K^{-1}W$$

або

$$\Box W = \tilde{F}(W)\partial W,$$

де $\tilde{F}(W) = KF(K^{-1}(W-L))K^{-1}$, тобто (1) є перетвореннями еквівалентності для системи (36).

Теорема 7. *Система* (36) *інваріантна відносно комформної алгебри* (17) *тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна з точністю до перетворень* (1) *одній із наступних систем*:

$$\Box u^a = e^{-u^1}\left\{\Psi^a(u^2)(u_0^1 - u_1^1) + \Phi^a(u^2)(u_0^2 - u_1^2)\right\}, \tag{37}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1}$, $Q_2 = \partial_{u^1}$, $Q_3 = Q_4 = 0$;

$$\Box u^a = \alpha_a e^{u^1}(u_0^1 + u_1^1) + \beta_a e^{u^2}(u_0^2 - u_1^2), \tag{38}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1} - \partial_{u^2}$, $Q_2 = -\partial_{u^1} - \partial_{u^2}$, $Q_3 = Q_4 = 0$;

$$\begin{aligned} \Box u^1 &= \left(\frac{u^2}{u^1}(u_0^1 + u_1^1) - (u_0^2 + u_1^2)\right)\left(\Phi(u^1) - 2\right), \\ \Box u^2 &= \left(\frac{u^2}{u^1}\right)^2 \Phi(u^1)(u_0^1 + u_1^1) - \frac{u^2}{u^1}\left(\Phi(u^1) + 2\right)(u_0^2 + u_1^2), \end{aligned} \tag{39}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}$, $Q_2 = -u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = u^1\partial_{u^2}$, $Q_4 = -u^1\partial_{u^2}$;

$$\begin{aligned} \Box u^1 &= \Phi(u^1)(u_0^2 + u_1^2), \\ \Box u^2 &= -4u^2(u_0^2 + u_1^2), \end{aligned} \tag{40}$$

причому $Q_1 = u^2\partial_{u^2}$, $Q_2 = -u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = \partial_{u^2}$, $Q_4 = -\partial_{u^2}$;

$$\begin{aligned} \Box u^1 &= \alpha u^1(u_0^1 + u_1^1), \\ \Box u^2 &= 0, \end{aligned} \tag{41}$$

причому $Q_1 = u^1\partial_{u^1}$, $Q_2 = -u^1\partial_{u^1} + \gamma\partial_{u^2}$, $Q_3 = -\frac{4}{\alpha}\partial_{u^1}$, $Q_4 = \frac{4}{\alpha}\partial_{u^1}$, $\alpha \neq 0$;

$$\begin{aligned} \Box u^1 &= \alpha_1 e^{u^1}(u_0^1 + u_1^1) + \alpha_2(u_0^2 + u_1^2), \\ \Box u^2 &= \alpha_3 e^{2u^1}(u_0^1 + u_1^1) + (\alpha_4 e^{u^1} - 4u^2)(u_0^2 + u_1^2), \end{aligned} \tag{42}$$

причому $Q_1 = \partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}$, $Q_2 = -\partial_{u^1} - u^2\partial_{u^2}$, $Q_3 = \partial_{u^2}$, $Q_4 = -\partial_{u^2}$;

$$\begin{aligned} \Box u^1 &= \alpha(u^2\ln u^2 - u^1)(u_0^1 + u_1^1) + (u^2(\alpha\ln u^2 + \beta) - \alpha u^1)\beta(u_0^2 + u_1^2), \\ \Box u^2 &= \alpha(u^2\ln u^2 - u^1)(u_0^2 + u_1^2), \end{aligned} \tag{43}$$

причому $Q_1 = I + u^2\partial_{u^1},\ Q_2 = -I - u^2\partial_{u^1},\ Q_3 = \frac{4}{\alpha}\partial_{u^1},\ Q_4 = -\frac{4}{\alpha}\partial_{u^1},\ \alpha \neq 0;$

$$\begin{aligned} \Box u^1 &= (\alpha_1 u^2 - 4u^1)(u_0^1 + u_1^1) + \alpha_2 u^2 (u_0^2 + u_1^2), \\ \Box u^2 &= (\alpha_3 u^2 - 4u^1)(u_0^2 + u_1^2), \end{aligned} \tag{44}$$

причому $Q_1 = I,\ Q_2 = -I,\ Q_3 = \partial_{u^1},\ Q_4 = -\partial_{u^1}$. *Тут* Φ^a, Ψ^a, Φ — *довільні гладкі функції*; α, β, α_a, β_a — *довільні сталі.*

Доведення. Будемо використовувати алгоритм С. Лі (див., наприклад, [10 – 12]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (36) має вигляд

$$X = \xi^\mu(x,u)\partial_\mu + \eta^a(x,u)\partial_{u^a}. \tag{45}$$

З умови інваріантності системи (36) відносно оператора (45) одержимо систему визначальних рівнянь

$$\xi_1^0 = \xi_0^1, \qquad \xi_0^0 = \xi_1^1, \tag{46}$$

$$\eta^a_{u^b u^c} = 0, \tag{47}$$

$$B\Phi = C\Phi + 2M, \tag{48}$$

$$\eta^b_\alpha F^{ab\alpha} = \Box \eta^a, \tag{49}$$

де $B = \eta^a \partial_{u^a}$, $\Phi =^t (F^{110}, F^{111}, F^{120}, F^{121}, F^{210}, F^{211}, F^{220}, F^{221})$,

$$C = \begin{pmatrix} -\xi_0^0 & \xi_1^0 & -\eta^2_{u^1} & 0 & \eta^1_{u^2} & 0 & 0 & 0 \\ \xi_0^1 & -\xi_0^0 & 0 & -\eta^2_{u^1} & 0 & \eta^1_{u^2} & 0 & 0 \\ -\eta^1_{u^2} & 0 & A & \xi_0^0 & 0 & 0 & \eta^1_{u^2} & 0 \\ 0 & -\eta^1_{u^2} & \xi_0^1 & A & 0 & 0 & 0 & \eta^1_{u^2} \\ \eta^2_{u^1} & 0 & 0 & 0 & D & \xi_0^1 & -\eta^2_{u^1} & 0 \\ 0 & \eta^2_{u^1} & 0 & 0 & \xi_0^1 & D & 0 & -\eta^2_{u^1} \\ 0 & 0 & \eta^2_{u^1} & 0 & -\eta^1_{u^2} & 0 & -\xi_0^0 & \xi_1^0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^2_{u^1} & 0 & -\eta^1_{u^2} & \xi_0^1 & -\xi_0^0 \end{pmatrix},$$

$$M =^t \left(\eta^1_{0u^1}, \eta^1_{1u^1}, \eta^1_{0u^2}, -\eta^1_{1u^2}, \eta^2_{0u^1}, -\eta^2_{1u^1}, \eta^2_{0u^2}, -\eta^2_{1u^2}\right),$$

$$A = -\xi_0^0 + \eta^1_{u^1} - \eta^2_{u^2}, \qquad D = -\xi_0^0 - \eta^1_{u^1} + \eta^2_{u^2}.$$

Використаємо зображення конформної алгебри (17), наведені в табл. 6, для визначення нелінійностей F, при яких система (36) інваріантна відносно цієї алгебри.

Запишемо ξ^μ і η^a для кожного набору операторів конформної алгебри з табл. 6 і підставимо їх у систему визначальних рівнянь (46) – (49). При цьому рівняння (46), (47) виконуються тотожно. Вигляд функцій F та координати оператора X визначимо, розв'язуючи рівняння (48), (49).

Для прикладу розглянемо детально четвертий випадок.

Розв'язуючи систему (48), уточнюємо вигляд операторів Q_a, при цьому

$$k_1 = 1, \quad m_1 = 0,$$

$$k_2 = 1, \quad m_2 = 0.$$

Запишемо одержані базисні оператори конформної алгебри:

$$\partial_0, \partial_1, J_{01} = x_1\partial_0 + x_0\partial_1 + \partial_{u^1}, \qquad D = x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + \partial_{u^1},$$

$$K_0 = 2x_0 D - x^2\partial_0 + 2x_1\partial_{u^1}, \qquad K_1 = 2x_1 D + x^2\partial_1 + 2x_0\partial_{u^1}.$$

Тоді координати оператора X визначаються за формулами

$$\xi^\mu = -b_\mu x^2 + (2bx + a)x_\mu + c_{\mu\nu}x^\nu + d_\mu,$$

$$\eta^1 = c_{01} + a + 2(bx + b_0 x_1 - b_1 x_0),$$

$$\eta^2 = 0,$$

де b_μ, a, $c_{\mu\nu}$, d_μ — довільні сталі. При цьому функції $F^{ab\alpha}$, $\alpha = 0, 1$, мають вигляд

$$F^{ab0} = e^{-u^1}\Phi^{ab1}(u^2),$$

$$F^{ab1} = -e^{-u^1}\Phi^{ab1}(u^2).$$

Одержані з рівняння (48) функції $F^{ab\alpha}$ перетворюють (49) в тотожні рівності. Отже, систему визначальних рівнянь (46) – (49) розв'язано.

Решту випадків розглядаємо аналогічно.

Теорему доведено.

4. Системи нелінійних рівнянь дифузії-конвекції, інваріантні відносно узагальненої алгебри Галілея з оператором маси. Наведемо приклад застосування одержаної класифікації лінійних зображень узагальненої алгебри Галілея з оператором маси у випадку $U \in R^2$ для дослідження симетрійних властивостей системи дифузії-конвекції.

Розглянемо систему рівнянь дифузії-конвекції

$$U_0 = \Lambda U_{11} + F(U)U_1, \tag{50}$$

де $U \in R^2$, $x = (x_0, x_1)$, Λ — стала матриця розмірності 2×2; F — матриця розмірності 2×2, елементами якої є функції $F^{ab}(U)$, $a, b = 1, 2$.

Система рівнянь (50) при конкретних нелінійностях знаходить широке застосування при описі відповідних фізичних процесів. Проте повний аналіз симетрійних властивостей даної системи до цього часу не проведено. У частинному випадку, коли матриця $F(U)$ має вигляд

$$\begin{pmatrix} u^1 & F^{12} \\ F^{21} & u^2 \end{pmatrix},$$

у роботі [13] проведено класифікацію її симетрійних властивостей у класі операторів Лі.

Система рівнянь (50) допускає лінійні перетворення еквівалентності (1). Доведення цього факту аналогічне доведенню, проведеному в п. 3 для системи квазілінійних хвильових рівнянь (36).

Поставимо задачу: провести класифікацію нелінійностей F^{ab} та довільних сталих λ_{ab}, при яких система (50) інваріантна відносно алгебри (12).

Теорема 8. *Система рівнянь дифузії-конвекції* (50) *інваріантна відносно узагальненої алгебри Галілея з оператором маси* (12) *тоді і тільки тоді, коли вона еквівалентна* (*з точністю до перетворень* (1)) *одній із наступних систем*:

$$\begin{aligned} u_0^1 &= \lambda_1 u_{11}^1 + l_1 u^1 u_1^2, \\ u_0^2 &= \lambda_2 u_{11}^2 + l_2 u^2 u_1^2, \end{aligned} \tag{51}$$

причому

$$Q_1 = -\frac{1}{2\lambda_1} u^1 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = -\frac{1}{l_2}\partial_{u^2}, \quad T_3 = -\left(\frac{l_1}{l_2} - \frac{1}{2}\right) u^1 \partial_{u^1} - u^2 \partial_{u^2}, \quad T_4 = 0;$$

$$\begin{aligned} u_0^1 &= n_1 u_{11}^1 + l_1 u^1 \partial_1 \omega^n, \\ u_0^2 &= n_2 u_{11}^2 + l_2 u^2 \partial_1 \omega^n, \end{aligned} \tag{52}$$

причому

$$Q_1 = -\frac{1}{2n_1 n_2}\left(n_2 u^1 \partial_{u^1} + n_1 u^2 \partial_{u^2}\right), \quad Q_2 = 0, \quad T_3 = -\frac{1}{2} I, \quad T_4 = 0,$$

$$\omega = \frac{(u^2)^{n_2}}{(u^1)^{n_1}}, \quad n = \frac{2}{n_2 - n_1}, \quad n_1 \neq n_2;$$

$$\begin{aligned} u_0^1 &= n u_{11}^1 + 2n^2 u_{11}^2 + \lambda\left(u^1 + l u^2\right)\partial_1 e^{\omega}, \\ u_0^2 &= n u_{11}^2 + \lambda u^2 \partial_1 e^{\omega}, \end{aligned} \tag{53}$$

причому

$$Q_1 = -\frac{1}{2n} I + u^2 \partial_{u^1}, \quad Q_2 = 0, \quad T_3 = -\frac{1}{2} I, \quad T_4 = 0,$$

$$\omega = \frac{1}{n}\frac{u^1}{u^2} + 2\ln u^2, \quad n \neq 0,$$

де λ_a, l_a, n_a, λ, l, n — *довільні сталі.*

Доведення. Будемо використовувати алгоритм С. Лі (див., наприклад, [10 – 12]). Інфінітезимальний оператор алгебри інваріантності системи (50) має вигляд (45). З умови інваріантності системи (50) відносно оператора (45) одержуємо систему визначальних рівнянь для знаходження координат оператора X та нелінійностей F^{ab}:

$$\xi_0^1 = \xi_{u^a}^{\mu} = 0, \tag{54}$$

$$\lambda_{da} \eta_{u^b u^c}^a = 0, \tag{55}$$

$$\eta_0^a - \lambda_{ab} \eta_{11}^b - F^{ab} \eta_1^b = 0, \tag{56}$$

$$\lambda_{bc} \eta_{u^b}^a - \lambda_{ab} \eta_{u^c}^b + \lambda_{ac}\left(2\xi_1^1 - \xi_0^0\right) = 0, \tag{57}$$

$$\eta^b F_{u^b}^{ac} + \eta_{u^c}^b F^{ab} - \eta_{u^b}^a F^{bc} + \left(\xi_0^0 - \xi_1^1\right) F^{ac} + 2\lambda_{ab} \eta_{1u^c}^b + \delta_{ac} \xi_0^1 - \lambda_{ac} \xi_{11}^1 = 0. \tag{58}$$

Тут $\mu = 0; 1$, $a, b, c = 1; 2$.

Зображення узагальненої алгебри Галілея з оператором маси (12) подано в табл. 5. Розглянемо детально зображення 12 з цієї таблиці. Базисні оператори алгебри (12) у даному випадку мають вигляд

$$\partial_0,\ \partial_1,\ G = x_0\partial_1 + x_1\left(k_1u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2}\right),$$

$$Q_1 = k_1u^1\partial_{u^1} + m_1u^2\partial_{u^2},$$

$$D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + k_3u^1\partial_{u^1} + m_3u^2\partial_{u^2},$$

$$\Pi = x_0^2\partial_0 + x_0x_1\partial_1 + \left(k_3x_0 + k_1\frac{x_1^2}{2}\right)u^1\partial_{u^1} + \left(m_3x_0 + m_1\frac{x_1^2}{2}\right)u^2\partial_{u^2}.$$

Використовуючи загальний вигляд операторів алгебри, запишемо координати оператора X (45):

$$\begin{aligned}\xi^0 &= ax_0^2 + 2bx_0 + d_0,\\ \xi^1 &= ax_0x_1 + bx_1 + gx_0 + d_1,\\ \eta^1 &= \left(a\left(k_3x_0 + k_1\frac{x_1^2}{2}\right) + bk_3 + gk_1x_1 + ck_1\right)u^1,\\ \eta^2 &= \left(a\left(m_3x_0 + m_1\frac{x_1^2}{2}\right) + bm_3 + gm_1x_1 + cm_1\right)u^2,\end{aligned} \tag{59}$$

де $a,\ b,\ g,\ c,\ d_\mu$ — довільні сталі.

Для знаходження функцій F^{ab} підставляємо (59) у систему визначальних рівнянь (54) – (58). При цьому рівняння (54), (55) системи перетворюються на тотожності. Розв'язуючи систему (58), знаходимо вигляд нелінійностей

$$F = \begin{pmatrix} -l_1\dfrac{n_1}{n_2}\omega^n & l_1\dfrac{u^1}{u^2}\omega^n \\ -l_2\dfrac{n_1}{n_2}\dfrac{u^2}{u^1}\omega^n & l_2\omega^n \end{pmatrix} \tag{60}$$

та матрицю

$$\Lambda = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & n_2 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

де

$$n_1 = -\frac{1}{2k_1},\quad n_2 = -\frac{1}{2m_1},\quad \omega = \frac{(u^2)^{n_2}}{(u^1)^{n_1}},\quad n_1 \neq n_2.$$

Система (56) уточнює сталі, що входять до операторів алгебри:

$$k_3 = m_3 = -\frac{1}{2},$$

а рівняння системи (57) при підстановці в них знайдених значень сталих λ_{ab} та координат оператора X задовольняються тотожно.

Отже, систему визначальних рівнянь розв'язано і знайдено функції (60) та сталі (61), при яких система (50) інваріантна відносно узагальненої алгебри

Галілея з оператором маси (12). Слід зазначити, що при $n_1 = n_2$ система визначальних рівнянь є несумісною.

Решту випадків розглядаємо аналогічно. При цьому оператори 10 з табл. 5 приводять до системи (51) за таких значень сталих:

$$k_1 = -\frac{1}{2\lambda_1}, \qquad k_2 = -\frac{1}{l_2}, \qquad k_3 = -\left(\frac{l_1}{l_2} + \frac{1}{2}\right),$$

а оператори 15 з цієї ж таблиці — до системи (53) при

$$k_1 = -\frac{1}{2n}, \qquad m_1 = 1, \qquad k_3 = -\frac{1}{2}, \qquad m_3 = 0.$$

Для решти операторів із табл. 5 система визначальних рівнянь (54) – (58) є несумісною.

Теорему доведено.

1. *Fushchych W., Cherniha R.* Galilei-invariant systems of nonlinear of evolution equations // J. Phys. A: Math. and Gen. – 1995. – P. 5569 – 5579.
2. *Rideau G.,Winternitz P.* Evolution equations invariant under two-dimensional space-time Schoding group // J. Math. Phys. – 1993. – P. 558 – 569.
3. *Cherniha R. M., King J. R.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction diffusion systems: II // J. Phys. A: Math. and Gen. – 2003. – P. 405 – 425.
4. *Cherniha R., Serov M.* Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, ansatze and solutions // J. Math. Anal. and Appl. – 2003. – P. 305 – 328.
5. *Nikitin A. G., Wiltshire R.* J. Math. Phys. – 2001. – P. 1666 – 1688.
6. *Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 2002. – **45**. – 360 с.
7. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Групповые свойства и точные решения уравнений нелинейной фильтрации // Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. – Новосибирск, 1987. – С. 24 – 27.
8. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* Нелокальные симметрии. Эвристический подход // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. математики. Новейшие достижения / ВИНИТИ. – 1989. – **34**. – С. 3 – 83.
9. *Глеба А. В.* Симетрійні властивості і точні розв’язки нелінійних галілей-інваріантних рівнянь: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 2003. – 120 с.
10. *Fushchych W., Shtelen W., Serov M.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – 334 p.
11. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
12. *Olver P.* Applications of Lie groups to differential equations. – Berlin: Springer, 1993. – 513 p.
13. *Сєров М. І., Черніга Р. М.* Симетрії Лі, Q-умовні симетрії та точні розв’язки системи нелінійних рівнянь дифузії-конвекції // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 10. – С. 1340 – 1355.

Одержано 17.02.2005