УДК 517.9

А. Н. Шарковский, А. Ф. Иванов

C^∞-отображения интервала с притягивающими циклами сколь угодно больших периодов

В настоящей заметке строятся отображения интервала в себя класса C^∞, обладающие некоторыми специальными и нетипичными для динамических систем свойствами.

Первый пример — отображение, имеющее притягивающие циклы сколь угодно больших периодов. Как известно [1], аналитические отображения имеют лишь конечное число притягивающих циклов (быть может, и ни одного, как, например, отображение $x \to 4x(1-x)$, $x \in [0, 1]$). Отображения класса C^∞, как легко видеть, могут иметь счетное число притягивающих циклов, периоды которых не превосходят некоторой константы. Например, отображение $x \to f(x)$, где $f(x)=x+e^{-1/x}\sin 1/x$, $x>0$, и $f(0)=0$, имеет счетное число притягивающих неподвижных точек, сгущающихся в нуле. В [2] приведен пример отображения класса C^0, имеющего притягивающие циклы сколь угодно больших периодов.

Во втором примере, конструктивно мало отличающемся от первого, строится отображение, имеющее так называемые гомтервалы. Гомтервал — это интервал, на котором все итерации отображения f — гомеоморфизмы. Как легко сообразить, гомтервалы, притягивающиеся к циклам,— обычное явление (например, для отображения $x \to \alpha x$, $|\alpha|<1$, любой интервал — гомтервал). Проблема заключается в существовании гомтервалов, не притягивающихся к циклам. Отображения класса C^ω не могут иметь таких гомтервалов. Пример отображения класса C^1 построен в [3]. В [4] построено отображение окружности класса C^∞, обладающее нетривиальным гомтервалом, и с помощью процедуры, предложенной в [3], преобразовано в C^∞-отображение интервала в себя. Таким образом, вопрос о существовании отображений интервала класса C^∞, обладающих гомтервалами, решен положительно. В нашем примере непосредственно строится отображение интервала, имеющее гомтервал, притягивающийся к счетному множеству точек.

1. Возьмем произвольное число $\lambda>1$, последовательность $x_0=1/\lambda< < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots \to 1$ и положим

$$f(x)=\lambda x, \quad x\in[0, x_0]. \tag{1}$$

Пусть $N_1 < N_2 < \ldots$ — подпоследовательность натурального ряда, выбор которой будет уточнен ниже. Введем величины $f_n = x_n/\lambda^{N_n}$, $h_n=f_n-f_{n+1}$, функции

$$g_n(x)=\begin{cases}\exp\{-1/(x-x_n)^2(x-x_{n+1})^2\}, & x\in(x_n, x_{n+1}),\\ 0, & x=x_n,\end{cases}$$

и $J_n=\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} g_n(x)\,dx$, $n=1, 2, \ldots$ На интервале $[x_1, 1]$ положим

$$f(x)=\begin{cases} f_n-(h_n/J_n)\int\limits_{x_n}^{x} g_n(x)\,dx, & x\in[x_n, x_{n+1}), \quad n=1, 2, \ldots,\\ 0 & x=1.\end{cases} \tag{2}$$

Основные построения выполнены. Остается доопределить $f(x)$ так, чтобы получить C^∞-отображение интервала в себя. На $I_0=[x_0, x_1]$ в качестве $f(x)$ возьмем какую-либо функцию класса C^∞, удовлетворяющую условиям

$$\begin{gathered} f(x_0)=1, \quad f'(x_0)=\lambda, \quad f^{(m)}(x_0)=0 \text{ при } m>1;\\ f(x_1)=f_1, \quad f^{(m)}(x_1)=0 \text{ при } m\geqslant 1;\\ f(x)>f_1 \text{ при } x\in[x_0, x_1). \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть $a = \max\limits_{x \in I_0} f(x)$. При $x \in [1, a]$ положим

$$f(x) = \exp\{-1/(x-1)^2\}. \tag{4}$$

Функция $f(x)$, определенная на интервале $I = [0, a]$ с помощью (1)—(4), непрерывна на I и имеет непрерывные производные всех порядков всюду, кроме, возможно, точки $x = 1$. Для отображения $f: I \to I$ каждая точка x_n, $n \geqslant 1$, — периодическая притягивающая точка периода $N_n + 1$: $f^{N_n+1}(x_n) = f^{N_n}(f_n) = \lambda^{N_n} f_n = x_n$, $\quad \frac{d}{dx} f^{N_n+1}(x)\Big|_{x=x_n} = f'(x_n) \frac{d}{dx} f^{N_n}(x)\Big|_{x=x_n} = 0$.

Покажем, что $\{N_n, n = 1, 2, \ldots\}$ можно выбрать так, чтобы производные $f^{(m)}(x)$, $m > 0$, существовали и при $x = 1$ и были равны нулю. Для этого достаточно, чтобы при $m > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{x \in I_n} |f^{(m)}(x)| = 0$, где $I_n = [x_n, x_{n+1}]$.

Рассмотрим интервал (x_n, x_{n+1}). Последовательным дифференцированием находим

$$\begin{aligned}
&f'(x) = (h_n/J_n)\, g_n(x),\\
&f''(x) = (h_n/J_n)\, g_n(x)\,(Q_{n,2}(x)/P_n^{L_2}(x)),\\
&f'''(x) = (h_n/J_n)\, g_n(x)\,(Q_{n,3}(x)/P_n^{L_3}(x)),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(m)}(x) = (h_n/J_n)\, g_n(x)\,(Q_{n,m}(x)/P_n^{L_m}(x)),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned}
&Q_{n,2}(x)/P_n^{L_2}(x) = (x_n + x_{n+1} - 2x)/[(x - x_n)(x - x_{n+1})]^3,\\
&Q_{n,k+1}(x)/P_n^{L_{k+1}}(x) = 2Q_{n,k}(x)(2x - x_n - x_{n+1})/P_n^{L_k+3}(x) +\\
&+ [Q'_{n,k}(x) P_n^{L_k}(x) - 2L_k P_n^{L_k-1}(x)(2x - x_n - x_{n+1}) Q_{n,k}(x)]/P_n^{2L_k}(x),\\
&P_n(x) = (x - x_n)(x - x_{n+1}), \quad L_{k+1} \leqslant 2L_k, \quad k = 2, 3, 4, \ldots.
\end{aligned} \tag{6}$$

Из (6) следует, что $Q_{n,m}(x)$ — полином с непрерывными коэффициентами, зависящими только от m, x_n, x_{n+1}. Поскольку $x_n \to 1$, то

$$\max_{I_n} |Q_{n,m}(x)| \leqslant c_1(m), \tag{7}$$

где $c_1(m)$ — постоянная, зависящая только от m. Обозначим $\alpha_n = x_{n+1} - x_n$. Тогда

$$\begin{aligned}
J_n &= \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \exp\{-1/(x - x_n)^2 (x - x_{n+1})^2\}\, dx =\\
&= (x_{n+1} - x_n) \int\limits_{-1/2}^{1/2} \exp\{-1/(x + 1/2)^2 (x - 1/2)^2 (x_{n+1} - x_n)^4\}\, dx =\\
&= \alpha_n \int\limits_{-1/2}^{1/2} \exp\{-1/(x + 1/2)^2 (x - 1/2)^2 \alpha_n^4\}\, dx.
\end{aligned} \tag{8}$$

Используя неравенство Гельдера, из (8) находим

$$J_n \geqslant \alpha_n \left(\int\limits_{-1/2}^{1/2} \exp\{-1/(x + 1/2)^2 (x - 1/2)^2\}\, dx \right)^{1/\alpha_n^4} = \alpha_n \varkappa^{1/\alpha_n^4},$$

где

$$\varkappa = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \exp\{-1/(x + 1/2)^2 (x - 1/2)^2\}\, dx, \quad 0 < \varkappa < 1.$$

Таким образом,

$$\max_{x\in I_n} |f^{(m)}(x)| \leqslant c_1(m)(h_n/J_n) \max_{x\in I_n} |g_n(x)/P_n^{L_m}(x)|. \tag{9}$$

Принимая во внимание тот факт, что $\lim\limits_{t\to+0} [\exp\{-1/t\}/t^k] = 0$ при $k > 0$, находим

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in I_n} |g_n(x)/P_n^{L_m}(x)| = 0. \tag{10}$$

Далее имеем

$$h_n/J_n \leqslant (1/\lambda)^{N_n}(x_{n+1} - x_n/\lambda^{N_{n+1}-N_n})/\alpha_n \varkappa^{\alpha_n^{-4}} \leqslant 1/\lambda^{N_n}\alpha_n\varkappa^{\alpha_n^{-4}} \leqslant 1, \tag{11}$$

если $\lambda^{N_n}\alpha_n\varkappa^{\alpha_n^{-4}} \geqslant 1$, т. е. если

$$N_n \geqslant -(\ln\alpha_n + \alpha_n^{-4}\ln\varkappa)/\ln\lambda. \tag{12}$$

Таким образом, какова бы ни была последовательность x_n, $n = 1, 2, \ldots$, из (10) и (11) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{x\in I_n} |f^{(m)}(x)| = 0$, если последовательность N_n, $n = 1, 2, \ldots$, выбрать так, чтобы при достаточно больших n удовлетворялось неравенство (12). Например, полагая, $\lambda = 1/\varkappa$, $x_{n+1} - x_n = 1/n^2$ при достаточно больших n, находим $N_n \geqslant n^8 + 2\ln n/\ln\lambda$. Отсюда видно, что для данного выбора x_n достаточно положить $N_n = n^8 + n$.

2. Для построения следующего примера возьмем произвольное число $\lambda > 1$ и последовательности y_n и z_n, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $1/\lambda < y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < \ldots < y_n < z_n < y_{n+1} < z_{n+1} < \ldots \to 1$. Положим $\alpha_n = z_{n+1}/\lambda^{N'_n}$, $\beta_n = y_{n+1}/\lambda^{N'_n}$, где N'_n, $n = 1, 2, \ldots$, — некоторая подпоследовательность натурального ряда.

Заметим, что в предыдущем примере можно было бы положить $N_{2k-1} = N_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots$, заботясь лишь о выполнении неравенства (12). Если сделать переобозначения $x_{2n-1} = y_n$, $x_{2n} = z_n$, $f_{2n-1} = \alpha_n$, $f_{2n} = \beta_n$, $h_n = f_n - f_{n+1}$, $N_n = N'_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$, $n = 1, 2, \ldots$, то какова бы ни была последовательность x_n, можно выбрать последовательность N'_n так, чтобы функция $f(x)$, построенная так же, как и в предыдущем примере, принадлежала классу $C^\infty[0, a]$.

При этом интервал (y_1, z_1) (как и любой другой интервал (y_n, z_n), $n > 1$) будет гомтервалом. Действительно, при отображении f интервал (y_1, z_1) переходит в интервал (α_1, β_1), который, в свою очередь, после N'_1 итераций отображения f переходит в интервал (y_2, z_2). Затем интервал (y_2, z_2) при отображении f переходит в интервал (α_2, β_2), который после N'_2 итераций f переходит в (y_3, z_3), и т. д. Очевидно, что все итерации $f^m(x)$, $m = 1, 2, \ldots$, монотонны на (y_1, z_1), поскольку они представляют собой суперпозицию монотонных отображений. Также в силу монотонности $f^m(x)$, $m > 0$, для каждой точки интервала (y_1, z_1) ω-предельным множеством является $\{1, 1/\lambda, 1/\lambda^2, \ldots, 1/\lambda^n, \ldots, 0\}$.

1. *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций.— М.—Л. : ОНТИ, 1936.— 240 с.
2. *Шарковский А. Н.* О циклах и структуре непрерывного отображения прямой в себя — Укр. мат. журн., 1965, 17, № 3, с. 104—112.
3. *Coven E M., Nitecki Z.* Non-wandering sets of the powers of maps of the interval.— Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1981, 1, №1, p. 9—31.
4. *Hall G. R.* A C^∞ Denjoy counterexample.— Ergodic Theory and Dynamical Systems 1981, 1, №3, p. 261—272.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
08.04.82