УДК 517.917

М. Р. Куленович, М. К. Грамматикопулос

Устойчивость асимптотического поведения решений нелинейных дифференциальных неравенств относительно запаздывания аргумента

Известно, что появление запаздывания в системе, описываемой дифференциальными уравнениями, может существенно повлиять на дальнейшее ее развитие. Поэтому интересно знать условия, при которых решения рассматриваемого уравнения с отклоняющимся аргументом и соответствующего ему обыкновенного дифференциального уравнения имеют одинаковое колебательное и асимптотическое поведение. Вопрос нахождения таких условий, поставленный в монографии [1], вызывает интерес не только с теоретической, но и с прикладной точки зрения.

Рассмотрим нелинейные дифференциальные неравенства вида

$$y(t)\,[(r(t)\,y'(t))' + p(t)\,f(y[\tau(t)])] \leqslant 0, \quad t \geqslant t_0 \tag{1}$$

и

$$y(t)\,[(r(t)\,y'(t))' + p(t)\,f(y(t))] \leqslant 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{2}$$

а также соответствующие им дифференциальные уравнения

$$(r(t)\,y'(t))' + p(t)\,f(y[\tau(t)]) = 0, \quad t \geqslant t_0 \tag{3}$$

и

$$(r(t)\,y'(t))' + p(t)\,f(y(t)) = 0, \quad t \geqslant t_0, \tag{4}$$

где функции $r,\ p,\ \tau : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ и $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны и, более того: а) $\tau(t)$ — положительна на $[t_0, \infty)$; б) $p(t)$ — неотрицательна на $[t_0, \infty)$; в) $f(u)$ — возрастающая и непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R} - \{0\}$ и $uf(u) > 0$ $\forall u \in \mathbb{R} - \{0\}$; г) функция τ удовлетворяет следующим условиям: $\tau(t) \leqslant t$ $\forall t \geqslant t_0$, $\tau'(t) \geqslant 0$ $\forall t \geqslant t_0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$.

Будем говорить, что непрерывная действительная функция φ, определенная на интервале вида $[a, \infty)$, обладает некоторым свойством *финально*, если существует $b \geqslant a$ такое, что φ обладает этим свойством на $[b, \infty)$.

Функция φ называется *неколеблющейся*, если она финально постоянного знака. В других случаях φ называется *колеблющейся*.

Под решением (1) (соответственно (2), (3), (4)) будем понимать функцию $u \in C^2([t_u, \infty), \mathbb{R})$, удовлетворяющую (1) (соответственно (2), (3), (4)) при всех $t \geqslant t_u$, и для любого $T_0 \in [T_u, \infty)$ выполняется условие $\sup\{|u(t)| : t \in [T_0, \infty)\} > 0$. Ясно, что решения (1) ((2), (3), (4)), определенные таким образом, нетривиальны и определены в окрестности $+\infty$.

Неравенство (1) (соответственно (2), (3), (4)) называется *колеблющимся*, если каждое его решение колеблющееся. Будем говорить, что (1) ((2), (3), (4)) обладает *свойством* $\tilde{0}$, если каждое его решение колеблющееся или монотонно стремящееся к нулю при $t \to \infty$.

В дальнейшем воспользуемся методом, основанным на теореме о неподвижной точке Кнастера (см. [2—6]).

Приведем необходимые и достаточные условия колебательного и асимптотического поведения дифференциальных неравенств (1) и (2). В условиях большинства теорем из работ [7, 8] была использована вспомогательная функция g, обладающая определенными свойствами на интервале $[t_0, \infty)$. Цель этой работы — подобрать функцию g так, чтобы достаточные условия (12) и (13), а также (12) и (21) работы [8] стали необходимыми и достаточными для колеблемости и асимптотического поведения неравенств (1) и (2). Такой подбор функции g на интервале $[t_0, \infty)$ назовем *оптимальным*.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемые функции g на $[t_0, \infty)$. Считаем, что они будут типа А на интервале $[t_0, \infty)$, если $\forall t \geqslant t_0$ $g(t) > 0$, $g'(t) \geqslant 0$ и функция rg' невозрастающая; типа В на интервале $[t_0, \infty)$, если $\forall t \geqslant t_0$ $g(t) > 0$, $g'(t) \leqslant 0$ и функция rg' неубывающая.

В случае, когда функция g есть функция типа А или типа В на интервале $[t_0, \infty)$, легко заключить, что оптимальный подбор ее относительно условия (12) зависит от значений интеграла $\int^{\infty} (r(t))^{-1} dt$, т. е. от того, ограничен этот интеграл или нет. Так, если функция g—типа А на интервале $[t_{0\infty})$ и $\int^{\infty} (r(t))^{-1} dt = \infty$, то нетрудно видеть, что оптимальным подбором g будет функция $\bar{g}(t) = \int_{t_0}^{t} (r(s))^{-1} ds \ \forall t \geqslant t_0$, а если $\int^{\infty} (r(t))^{-1} dt < \infty$, то оптимальным подбором g будет функция $\bar{g}(t) = 1 \ \forall t \geqslant t_0$.

В случае, когда g — типа В, получаем следующие оптимальные подборы функции g: 1) если $\int^{\infty} (r(t))^{-1} dt = \infty$, то $\bar{g}(t) = 1 \ \forall t \geqslant t_0$ и 2) если $\int^{\infty} (r(t))^{-1} dt < \infty$, то $\bar{g}(t) = \int_{t}^{\infty} (r(s))^{-1} ds \ \forall t \geqslant t_0$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* а) — в),

$$\int^{\infty} (r(t))^{-1} dt = \infty \tag{5}$$

и

$$\int_{\pm a}^{\pm\infty} (f(u))^{-1} du < \infty, \quad a > 0. \tag{6}$$

Дифференциальное неравенство (2) *колеблющееся тогда и только тогда, когда*

$$\int^{\infty} \left(\int_{t_0}^{t} (r(s))^{-1} ds \right) p(t)\, dt = \infty. \tag{7}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2 из работы [3].

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* а)—г) *и* (6). *Предположим, что* $r(t) = 1 \ \forall t \geqslant t_0$ *и*

$$\liminf_{t \to \infty} \tau(t)/t > 0. \tag{8}$$

Дифференциальное неравенство (1) *колеблющееся тогда и только тогда, когда*

$$\int^{\infty} t p(t)\, dt = \infty. \tag{9}$$

Доказательство теоремы 2 следует из следствия в работе [9]. Заметим, что другое доказательство этой теоремы может быть получено на основе теоремы 4 (достаточность) и теоремы сравнения 1 (необходимость) работы [8].

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* а)—г),

$$\int^{\infty} (r(t))^{-1} dt < \infty \tag{10}$$

и

$$\int_{0}^{\pm a} (f(u))^{-1} du < \infty, \quad a > 0. \tag{11}$$

Дифференциальное неравенство (1) *колеблющееся тогда и только тогда, когда*

$$\int^{\infty} \left(\int_{t}^{\infty} (r(s))^{-1} ds \right) p(t)\, dt = \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Так как достаточность условия (12) вытекает из следствия 2.1 работы [10], докажем только необходимость этого условия.

Предположим, что дифференциальное неравенство (1) колеблющееся, но условие (12) не выполняется. Подберем $T \geqslant t_0$ так, чтобы

$$\int_T^\infty \left(\int_s^\infty (r(u))^{-1} du \right) p(s)\, ds < 1/2f(1). \tag{13}$$

Пусть X — множество всех функций x, убывающих на интервале $[T, \infty)$ и таких, что $1/2 \leqslant x(t) \leqslant 1$ $\forall t \geqslant T$. Множество X поточечно упорядочено: $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow x_1(t) \leqslant x_2(t)$ $\forall t \geqslant T$. Легко заключить, что для каждого $A \subseteq X$ $\sup A \in X$, т. е. X — насыщенное множество.

Определим отображение S множества X в себя:

$$(Sx)(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \left(\displaystyle\int_t^\infty \frac{ds}{r(s)} \right) \left(\displaystyle\int_{T_1}^t p(s) f(x[\tau(s)])\, ds + \int_t^\infty \left(\int_s^\infty \frac{du}{r(u)} \right) p(s) \times \right. \\ \qquad\qquad \left. \times f(x[\tau(s)])\, ds, \quad \text{если} \quad t \geqslant T_1; \right. \\ x(t), \quad \text{если} \quad T \leqslant t < T_1, \end{cases}$$

где $T_1 \geqslant T$ такое, что $\tau(t) \geqslant T$ $\forall t \geqslant T_1$.

Так как для любого $x \in X$ $(Sx)(t) \geqslant 1/2$ при тех же t и, в силу определения X и неравенства (13), $\forall t \geqslant T_1$

$$(Sx)(t) \leqslant \frac{1}{2} + f(1) \left(\int_t^\infty \frac{ds}{r(s)} \right) \left(\int_{T_1}^t p(s)\, ds \right) + f(1) \int_t^\infty \left(\int_s^\infty \frac{du}{r(u)} \right) p(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + f(1) \left(\int_{T_1}^t \left(\int_s^\infty \frac{du}{r(u)} \right) p(s)\, ds + \int_t^\infty \left(\int_s^\infty \frac{du}{r(u)} \right) p(s)\, ds \right) =$$

$$= \frac{1}{2} + f(1) \int_{T_1}^\infty \left(\int_s^\infty \frac{du}{r(u)} \right) p(s)\, ds \leqslant \frac{1}{2} + f(1) \int_T^\infty \left(\int_s^\infty \frac{du}{r(u)} \right) p(s)\, ds < 1,$$

то $SX \subseteq X$. Более того, из наших предположений вытекает, что отображение S — неубывающее относительно упорядоченности множества X, т. е. для любых x, z из X и для каждого $t \geqslant T_1$ $x(t) \leqslant z(t) \Leftrightarrow (Sx)(t) \leqslant (Sz)(t)$. Таким образом, применив теорему о неподвижной точке Кнастера (см. [2, 6]), заключаем, что существует $y \in X$ такое, что $Sy = y$, т. е.

$$y(t) = \frac{1}{2} + \left(\int_t^\infty \frac{ds}{r(s)} \right) \left(\int_{T_1}^t p(s) f(y[\tau(s)])\, ds \right) + \int_t^\infty \left(\int_s^\infty \frac{du}{r(u)} \right) p(s) \times$$
$$\times f(y[\tau(s)])\, ds \quad \forall t \geqslant T_1,$$

где функция y, очевидно, непрерывна на интервале $[T_1, \infty)$. Дифференцируя дважды это равенство, заключим, что y — решение уравнения (3) на интервале $[T_1, \infty)$ и, следовательно, y — решение и неравенства (1), что противоречит нашему предположению.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* а)—г) *и* (10). *Дифференциальное неравенство* (1) *имеет неколеблющееся решение* y, *определенное на интервале* $[t_0, \infty)$, *со свойством* $\lim_{t\to\infty} y(t) = L$, $L \in \mathbb{R} - \{0\}$, *тогда и только тогда, когда*

$$\int^\infty \frac{1}{r(t)} \int_{t_0}^t p(s)\, ds dt < \infty. \tag{14}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть y — неколеблющееся решение неравенства (1) со свойством $\lim_{t\to\infty} y(t) = L$, $L \in \mathbb{R} - \{0\}$. Без ограничения общности предположим, что $L>0$ и, в силу г), подберем $t_1 \geqslant t_0$ так, чтобы

$$L/2 \leqslant y[\tau(t)] \leqslant 3L/2 \quad \forall t \geqslant t_1. \tag{15}$$

Тогда, используя а)—в) и (15), из (1) получим $[r(t)\, y'(t)]' \leqslant 0$ $\forall t \geqslant t_1$. Следовательно, функция ry' — невозрастающая на $[t_0, \infty)$ и $\forall t \geqslant t_0$ ограничена справа.

Интегрируя неравенство (1) в пределах от t_1 до t, для каждого $t \geqslant t_1$ получаем $\int\limits_{t_1}^{t} p(s) f(y[\tau(s)])\, ds \leqslant r(t_1)\, y'(t_1) - r(t)\, y'(t)$, или

$$\frac{1}{r(t)} \int\limits_{t_1}^{t} p(s) f(y[\tau(s)])\, ds \leqslant \frac{1}{r(t)} r(t_1)\, y'(t_1) - y'(t).$$

Интегрируя последнее выражение от t_1 до t, получим для каждого $t \geqslant t_1$

$$\int\limits_{t_1}^{t} \frac{1}{r(u)} \int\limits_{t_1}^{u} p(s) f(y[\tau(s)])\, ds du \leqslant r(t_1)\, y'(t_1) \int\limits_{t_1}^{t} \frac{ds}{r(s)} - y(t) + y(t_1),$$

откуда, в силу (10) и (15), следует (14).

Н е о б х о д и м о с т ь. Докажем, что для любого $L \in \mathbb{R} - \{0\}$ существует решение y дифференциального неравенства (1), определенное на $[t_1, \infty)$, такое, что $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = L$.

Не нарушая общности предположим, что $L>0$, и подберем $T > \max\{t_0, 1\}$ так, чтобы

$$\int\limits_{T}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int\limits_{T}^{s} p(u)\, du ds < \frac{L}{2} \frac{1}{f(3L/2)}. \tag{16}$$

Пусть X — множество всех невозрастающих функций x, определенных на интервале $[T, \infty)$, со свойством $L \leqslant x(t) \leqslant 3L/2$ $\forall t \geqslant T$. Множество X поточечно упорядочено: $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow (\forall t \geqslant T)\; x_1(t) \leqslant x_2(t)$. Очевидно, для каждого $A \subseteq X$ $\sup A \in X$, т. е. X — насыщенное множество.

Определим отображение S множества X в себя по формуле

$$(Sx)\;t) = \begin{cases} L + \int\limits_{t}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int\limits_{T}^{s} p(u) f(x[\tau(u)])\, du ds, & \text{если } t \geqslant T_1; \\ x(t), & \text{если } T \leqslant t < T_1, \end{cases}$$

где $T_1 \geqslant T$ такое, что $\tau(t) \geqslant T$ $\forall t \geqslant T_1$.

Так как для любого $x \in X$ $(Sx)(t) \geqslant L$ $\forall t \geqslant T_1$ и в силу определения множества X и (16)

$$(Sx)(t) \leqslant L + f\left(\frac{3L}{2}\right) \int\limits_{t}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int\limits_{T}^{s} p(u)\, du ds \leqslant L + f\left(\frac{3L}{2}\right) \int\limits_{T_1}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int\limits_{T}^{s} p(u)\, du ds \leqslant$$

$$\leqslant L + f\left(\frac{3L}{2}\right) \int\limits_{T}^{\infty} \frac{1}{r(s)} \int\limits_{T}^{s} p(u)\, du ds < \frac{3L}{2} \quad \forall t \geqslant T_1,$$

то $SX \subseteq X$. Более того, для любых x_1, x_2 из X и для каждого $t \geqslant T_1$ $x_1(t) \leqslant x_2(t) \Rightarrow (Sx_1)(t) \leqslant (Sx_2)(t)$, т. е. отображение S — возрастающее относительно упорядоченности в X.

Применив теорему о неподвижной точке Кнастера, заключим, что существует $y \in X$ такое, что $Sy = y$, т. е. $y(t) = L + \int\limits_{t}^{\infty} (r(s))^{-1} \int\limits_{T}^{s} p(u) \times$ $\times f(y[\tau(u)])\, du ds$ $\forall t \geqslant T_1$, где функция y непрерывна на интервале $[T_1, \infty)$.

Наконец, так как при $t \to \infty$ $y(t) - L = \int\limits_{t}^{\infty} (r(s))^{-1} \int\limits_{T}^{s} p(u) f(y[\tau(u)]) \times \times duds \to 0$, нетрудно убедиться, что неколеблющаяся функция y — решение (1) на интервале $[T_1, \infty)$ со свойством $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = L$, $L \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* а)—г) *и* (10). *Дифференциальное неравенство* (1) *обладает свойством* $\tilde{0}$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int^{\infty} (r(t))^{-1} \int\limits_{t_0}^{t} p(s)\, dsdt = \infty. \tag{17}$$

Доказательство. Так как необходимость условия (17) следует из теоремы 4, докажем только его достаточность.

Пусть y — неколеблющееся решение (1) и $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) \neq 0$. Не нарушая общности предположим, что $y(t) > 0$ для всех больших t, и подберем $t_1 \geqslant t_0$ так, чтобы $y(t) > 0$ и $y[\tau(t)] > 0$ $\forall t \geqslant t_1$. В силу предположения, что $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) \neq 0$, существуют $M > 0$ и $t_2 \geqslant t_1$ такие, что

$$y[\tau(t)] \geqslant M \quad \forall t \geqslant t_2. \tag{18}$$

Более того, в силу а)—г) и (4) из (1) следует, что $[r(t)\, y'(t)]' \leqslant 0$ $\forall t > t_2$. Следовательно, функция ry' — невозрастающая на $[t_2, \infty)$ и $\forall t \geqslant t_2$ $r(t) \times \times y'(t)$ ограничена справа.

Интегрируя неравенство (1) от t_2 до t и деля полученный результат почленно на $r(t)$, получим $(r(t))^{-1} \int\limits_{t_2}^{t} p(u) f(y[\tau(u)])\, du \leqslant (r(t))^{-1} r(t_2)\, y'(t_2) - - y'(t)\ \forall t \geqslant t_2$. Интегрируя это выражение снова от t_2 до t и учитывая (18) и (10), придем к заключению, что $\int\limits_{t_2}^{\infty} (r(s))^{-1} \int\limits_{t_2}^{t} p(u)\, duds < \infty$. Получено противоречие.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* а) — г), (6) *и*

$$\int^{\infty} p(t)\, dt = \infty. \tag{19}$$

Дифференциальное неравенство (1) *обладает свойством* $\tilde{0}$ *тогда и только тогда, когда выполняется* (17).

Доказательство. Достаточность условия (17) следует из теоремы 3 работы [8], а необходимость — из теоремы 4.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия* а)—г), (11) *и* (19). *Дифференциальное неравенство* (1) *колеблющееся тогда и только тогда, когда выполняется* (17).

Доказательство. Достаточность условия (17) следует из следствия 2.1 работы [10], а необходимость — из теоремы 4.

Теорема 8. *Пусть выполняются условия* а)—в), (19) *и*

$$f'(u) \geqslant \mu > 0 \quad \forall u \in \mathbb{R} - \{0\}. \tag{20}$$

Дифференциальное неравенство (2) *обладает свойством* $\tilde{0}$ *тогда и только тогда, когда выполняется* (17).

Доказательство. Достаточность условия (17) следует из теоремы 4 работы [7], а необходимость — из теоремы 4.

Теорема 9. *Пусть выполняются условия а)—в),* (20) *и* (5). *Дифференциальное неравенство* (2) *колеблющееся тогда и только тогда, когда выполняется условие* (7).

Доказательство. Так как достаточность условия (17) вытекает из следствия 2 работы [7] при $h(u)=1$, $u \in \mathbb{R}$, и $g(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{ds}{r(s)}$, $t \geqslant t_0$, докажем только его необходимость.

Пусть дифференциальное неравенство (2) колеблющееся, но условие (7) не выполняется. Подберем $T \geqslant t_0$ так, чтобы $\int\limits_T^\infty \left(\int\limits_{t_0}^s \frac{du}{r(u)} \right) p(s)\, ds < \frac{1}{2f(1)}$.

Пусть X — множество всех возрастающих функций x, определенных на интервале $[T, \infty)$ и таких, что $1/2 \leqslant x(t) \leqslant 1$ $\forall t \geqslant T$. Множество X поточечно упорядочено: $x_1 \leqslant x_2 \Leftrightarrow (\forall t \geqslant T)\, x_1(t) \leqslant x_2(t)$.

Определим отображение S множества X в себя по формуле

$$(Sx)(t) = \frac{1}{2} + \left(\int\limits_T^t \frac{ds}{r(s)} \right) \int\limits_t^\infty p(s) f(x(s))\, ds + \int\limits_T^t \left(\int\limits_T^s \frac{du}{r(u)} \right) p(s) f(x(s))\, ds,$$

$$t \geqslant T.$$

Легко проверить, что отображение S удовлетворяет всем условиям теоремы о неподвижной точке Кнастера. Далее, применив эту теорему к отображению S, заключим, что существует $y \in X$ такое, что $Sy = y$. Нетрудно проверить, что функция y — решение дифференциального неравенства (2), что противоречит сделанному предположению.

Как было отмечено, главная наша задача — найти условия, обеспечивающие одинаковое колебательное и асимптотическое поведение решений дифференциального неравенства (1) и соответствующего ему обыкновенного неравенства (2). Сформулируем следствия из теорем 2—7, содержащие решение указанной задачи.

Следствие 1. *Пусть выполняются условия* а)—г), (6) *и* (8) *и пусть* $r(t) = 1$ $\forall t \geqslant t_0$. *Неравенство* (1) *колеблющееся тогда и только тогда, когда неравенство* (2) *колеблющееся.*

Следствие 2. *Пусть выполняются условия* а)—г), (10) *и* (11). *Неравенство* (1) *колеблющееся тогда и только тогда когда неравенство* (2) *колеблющееся.*

Следствие 3. *Пусть выполняются условия* а)—г) *и* (10). *Неравенство* (1) *имеет неколеблющееся решение* y *со свойством* $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = L$, $L \in \mathbb{R} - \{0\}$, *тогда и только тогда, когда неравенство* (2) *имеет неколеблющееся решение* y *с таким свойством.*

Следствие 4. *Пусть выполняются условия* а)—г) *и* (10). *Неравенство* (1) *обладает свойством* $\tilde{0}$ *тогда и только тогда, когда неравенство* (2) *обладает свойством* $\tilde{0}$.

Следствие 5. *Пусть выполняются условия* а)—г), (6) *и* (19). *Неравенство* (1) *обладает свойством* $\tilde{0}$ *тогда и только тогда, когда неравенство* (2) *обладает свойством* $\tilde{0}$.

Следствие 6. *Пусть выполняются условия* а)—г), (11) *и* (19). *Неравенство* (1) *колеблющееся тогда и только тогда, когда неравенство* (2) *колеблющееся.*

Замечание 1. Полученные в работе результаты верны и в случае уравнений (3) и (4). Это вытекает непосредственно из теоремы сравнения 2 работы [8].

Замечание 2. Теорема 1 не может быть перенесена на случай линейных и сублинейных дифференциальных уравнений.

Пример 1. Уравнение $(y'(t)/t)' + 2y^\alpha(t)/t^3 \log^\alpha t = 0$, $t > 0$, где $\alpha = 1/(2n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$, удовлетворяет всем условиям теоремы 1, кроме (6). Неограниченная неколеблющаяся функция $y(t) = \log t$ — решение этого уравнения.

Замечание 3. Теорема 2 — улучшение соответствующей теоремы 6.3, установленной в [1].

Замечание 4. Теорема 2 не может быть перенесена на случай линейных или сублинейных дифференциальных уравнений.

П р и м е р 2. Уравнение $y''(t) + y^{\alpha}[\tau(t)]/t^2 \log^{\alpha}\tau(t) = 0$, $t > 1$, где $\alpha = 1/(2n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$, и $\tau(t) = ct$, $c \in (0, 1]$, удовлетворяет всем условиям теоремы 2, кроме (6). Неограниченная неколеблющаяся функция $y(t) = \log t$ — решение этого уравнения.

З а м е ч а н и е 5. Теорема 3 не может быть перенесена на случай линейных или суперлинейных дифференциальных уравнений.

П р и м е р 3. Уравнение $(t^3 y'(t))' + \tau(t)\, y^{\beta}[\tau(t)] = 0$, $t > 0$, где $\beta = 2n+1$, $n = 0, 1, \ldots$, и $\tau(t) = ct$, $c \in (0, 1]$, удовлетворяет всем условиям теоремы 3, кроме (11). Неколеблющаяся функция $y(t) = 1/t$—решение этого уравнения.

З а м е ч а н и е 6. Пример 3 показывает также, что теорема 7 не имеет места в случае линейных дифференциальных уравнений.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору Я. Г. Сфикасу за полезные советы и замечания, сделанные при чтении рукописи настоящей работы.

1. *Шевело В. Н.* Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Киев : Наук. думка, 1978.— 153 с.
2. *Monk J. D.* Introduction to set theory.— McGraw—Hill, 1969.
3. *Naito M.*, *Yoshida N.* Oscillation theorems for semilinear elliptic differential operators.— Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1978, 85A, p. 135—151.
4. *Philos Ch. G.*, *Staikos V. A.* Basic comparison results for the oscillatory and asymptotic behavior of differential equations with deviating arguments.— Univ. of Ioannina, Technical Report N 12, 1978.
5. *Sficas Y. G.* On the behavior of nonoscillatory solutions of differential equations with deviating argumentas.— Nonlinear Analysis 1979, 3, p. 379—394.
6. *Стайкос В. А.* Курс математического анализа. Ч. 1.— Иоаннина, 1972.— (На греч. яз.)
7. *Kulenović M. R.*, *Grammatikopoulos M. K.* On the asymptotic behavior of second order differential inequalities with alternating coefficients.— Math. Nachr., 1980, 98, p. 317—327.
8. *Куленович М. Р.*, *Грамматикопулос М. К.* Колеблемость и асимптотическое поведение решений нелинейных дифференциальных неравенств и уравнений с отклоняющимися аргументами.— Укр. мат. журн., 1984, 36, № 3, с. 309—316.
9. *Grammatikopoulos M. K.*, *Sficas Y. G.*, *Staikos V. A.* Oscillatory properties of strongly superlinear differential equations with deviating arguments.— J. Math. Anal. Appl., 1979, 67, p. 171—187.
10. *Kulenović M. R.* Oscillation theorems for second order differential inequalities.— Fasciculi Mathematici (to appear).

Сараевский ун-т, Югославия,
Иоаннинский ун-т, Греция

Поступила 01.09.81