УДК 517.5

Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев

О коммутантах некоторых операторов в пространстве аналитических функций многих переменных

1. Введение. Будем использовать следующие обозначения. Упорядоченный набор n комплексных чисел $(z_1, \ldots, z_n)$, т. е. точка пространства $\mathbf{C}^n$, будет обозначаться $z = (z_1, \ldots, z_n)$. Мультииндексом $k = (k_1, \ldots, k_n)$ называется вектор с целыми неотрицательными координатами $k_1, \ldots, k_n$. Для такого мультииндекса полагаем $\|k\| = k_1 + \ldots + k_n$, а $k! = k_1! \ldots k_n!$. Если $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n$ и $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, то принято писать $z^k = z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}$ и $\partial^k/\partial z^k = \partial^{\|k\|}/\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}$. Для произвольных точек $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ символ $x \leqslant y$ $(x < y)$ означает, что $x_j \leqslant y_j$ $(x_j < y_j)$ для каждого $j = 1, \ldots, n$.

Множество $\mathcal{D}_R = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^n : |z_j| < R_j,\ j = 1, \ldots, n\}$ называют поликругом в пространстве $\mathbf{C}^n$. При этом считаем, что $R = (R_1, \ldots, R_n)$ и $0 < R_j < \infty$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Замыкание этого поликруга $\mathcal{D}_R$ обозначают $\overline{\mathcal{D}}_R$.

Пусть A_R — топологическое векторное пространство всех аналитических в $\mathcal{D}_R$ функций с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах поликруга $\mathcal{D}_R$. Это топология проективного предела банаховых пространств B_r, где $r = (r_1, \ldots, r_n) < R = (R_1, \ldots, R_n)$, непрерывных в $\overline{\mathcal{D}}_r$ и аналитических в $\mathcal{D}_r$ функций с нормой $\max\limits_{z \in \overline{\mathcal{D}}_r} |f(z)|$. Будем обозначать через $\overline{A}_R$ топологическое векторное пространство всех аналитических в $\overline{\mathcal{D}}_R$ функций с топологией индуктивного предела банаховых пространств B_ρ, где $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) > R = (R_1, \ldots, R_n)$ (по поводу топологий в пространствах A_R и $\overline{A}_R$ см. [1]).

Пусть $U_j : A_R \to A_R$, $j = 1, \ldots, n$, — линейные и непрерывные операторы умножения на z_j, т. е. $U_j f = z_j f(z)$, $j = 1, \ldots, n$. Рассмотрим также линейные и непрерывные операторы $\Delta_j : A_R \to A_R$, $j = 1, \ldots, n$, «деления на z_j», определенные равенствами $(\Delta_j f)(z) = [f(z_1, \ldots, z_j, \ldots, z_n) - f(z_1, \ldots, 0, \ldots, z_n)]/z_j$, $j = 1, \ldots, n$. Зафиксируем набор $p = (p_1, \ldots, p_n)$ натуральных чисел.

Исследуем вопрос об описании всех линейных непрерывных операторов $T : A_R \to A_R$ (или $T : \overline{A}_R \to \overline{A}_R$), т. е. $T \in L(A_R, A_R)$ (или $T \in L(\overline{A}_R, \overline{A}_R)$), перестановочных со всеми операторами $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$. В частности, полезны изоморфизмы пространства A_R (или $\overline{A}_R$) на себя, коммутирующие с $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$. При помощи этих изоморфизмов изучим условие квазистепенной базисности некоторой системы аналитических функций, а также охарактеризуем все сильно циклические функции операторов $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$. Рассматривается задача описания линейных непрерывных коммутантов операторов $\Delta_1^{p_1}, \ldots, \Delta_n^{p_n}$ и выделения среди них изоморфизмов пространства A_R (или $\overline{A}_R$).

Полученные результаты — обобщение соответствующих утверждений, доказанных для пространств аналитических в круге функций одной переменной в работах [2, 3, 4].

Пусть T — линейный непрерывный оператор, отображающий A_R в A_R (или $\overline{A}_R$ в $\overline{A}_R$). Тогда для каждого элемента z^k степенного базиса положим $Tz^k = \sum\limits_{\|j\|=0}^{\infty} t_{k,j} z^j$. Полученная матрица $[t_{k,j}]$ называется матрицей оператора T в степенном базисе. Непрерывность оператора T может быть охарактеризована как в терминах функций Tz^k, так и при помощи элементов $t_{k,j}$ матрицы оператора T (для случая функций одной переменной см. [5, 6]).

Теорема 1. *Линейный оператор* $T: A_R \to A_R$ *непрерывен в том и только том случае, если для каждого* $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) < R = (R_1, \ldots, R_n)$ *существует такое неотрицательное число* $C(\rho)$ *и* $r = (r_1, \ldots, r_n) < R$, *что* $\max\limits_{z \in \bar{\mathscr{D}}_\rho} |Tz^k| \leqslant C(\rho) r^k$ *для каждого мультииндекса* k.

Из неравенств Коши следует, что условие непрерывности оператора T равносильно следующему: $\forall \rho < R \ \exists C(\rho) > 0$ и $\exists r < R$, что $|t_{k,j}| \leqslant C(\rho) \rho^{-j} r^k$ для всех мультииндексов k и j.

Теорема 2. *Линейный оператор* $T: \bar{A}_R \to \bar{A}_R$ *непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого* $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) > R = (R_1, \ldots, R_n)$ *существует такое* $r = (r_1, \ldots, r_n) > R$, *что* T *непрерывно отображает пространство* B_ρ *в* B_r.

В терминах элементов $t_{k,j}$ матрицы оператора T непрерывность отображения $T: B_\rho \to B_r$ означает следующее: $\forall \rho > R \ \exists C(\rho) > 0$ и $\exists r > R$, что $|t_{k,j}| \leqslant C(\rho) \rho^j r^{-k}$ для всех мультииндексов k и j.

Из теорем 1 и 2 получаем следствие.

Следствие 1. *Если линейный оператор* T *непрерывно отображает* A_R в A_R, *то оператор* T', *отвечающий транспонированной матрице к матрице оператора* T, *будет непрерывно отображать* $\bar{A}_{1/R}$ *в* $\bar{A}_{1/R}$, *где* $1/R = (1/R_1, \ldots, 1/R_n)$.

Оператор T', построенный по транспонированной матрице к матрице оператора T, назовем транспонированным к T.

2. Отображения пространства A_R, коммутирующие с операторами $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$. Прежде всего опишем операторы $T \in L(A_R, A_R)$, коммутирующие со всеми операторами $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$, т. е. $TU_j^{p_j} = U_j^{p_j} T$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть T — один из таких операторов. Тогда для каждого мультииндекса $q = (q_1, \ldots, q_n) < p = (p_1, \ldots, p_n)$ положим $Tz^q = \varphi_q(z) \in A_R$. Используя коммутационные соотношения, покажем, что действие оператора T на остальные функции базиса $\{z^k\}$ весьма просто связано с функциями $\{\varphi_q(z)\}_{\|q\|=0}^{\|p\|-n}$. А именно: каждый мультииндекс $k = (k_1, \ldots, k_n)$ представим в виде $k = (\nu_1 p_1 + q_1, \ldots, \nu_n p_n + q_n) \equiv \nu p + q$, где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \geqslant 0$ и $q = (q_1, \ldots, q_n) < p$. Поэтому $Tz^k = z_1^{\nu_1 p_1} \ldots z_n^{\nu_n p_n} Tz^q = z^{\nu p} \varphi_q(z)$. Следовательно, для каждой функции $f(z) = \sum\limits_{\|k\|=0}^{\infty} f_k z^k = \sum\limits_{\|q\|=0}^{\|p\|-n} \left(\sum\limits_{\|\nu\|=0}^{\infty} f_{\nu p+q} z^{\nu p} \right) z^q$ пространства A_R $(Tf)(z) = \sum\limits_{\|q\|=0}^{\|p\|-n} \left(\sum\limits_{\|\nu\|=0}^{\infty} f_{\nu p+q} z^{\nu p} \right) \varphi_q(z)$. Для удобства записи оператора T введем операторы «проектирования» в A_R, полагая для произвольного мультииндекса $q < p$, что $(P_q f)(z) = \sum\limits_{\|\nu\|=0}^{\infty} f_{\nu p+q} z^{\nu p+q} \ \forall f \in A_R$. Очевидно, что все операторы P_q непрерывно отображают A_R в A_R. Тогда оператор T, коммутирующий со всеми операторами $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$ запишем в виде

$$(Tf)(z) = \sum_{\|q\|=0}^{\|p\|-n} z^{-q} \varphi_q(z) (P_q f)(z) \quad \forall f \in A_R. \tag{1}$$

Следовательно, получена теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы линейный непрерывный оператор* $T: A_R \to A_R$ *коммутировал со всеми операторами* $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$, *необходимо и достаточно, чтобы его можно было подать в виде* (1). *В этом случае* $Tz^q = \varphi_q(z) \ \forall q < p$ *и оператор* T *определяется функциями* $\varphi_q(z)$ *единственным образом.*

Перейдем к описанию изоморфизмов пространства A_R на себя, коммутирующих с операторами $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$. Если T — один из таких изоморфизмов, то для него существует обратный оператор $T^{-1} \in L(A_R, A_R)$, который, очевидно, также коммутирует с $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$. Поэтому в соответствии с теоремой 3 оператор T^{-1} запишем в виде

$$(T^{-1}f)(z) = \sum_{\|q\|=0}^{\|p\|-n} z^{-q}\psi_q(z)(P_qf)(z) \quad \forall f \in A_R, \tag{2}$$

где $\psi_q(z) = T^{-1}z^q \forall q < p$. Тогда из равенств $T^{-1}Tf = f$ и $TT^{-1}f = f$ $\forall f \in A_R$, используя в качестве f все функции z^q $\forall q < p$, получаем систему

$$\sum_{\|q\|=0}^{\|p\|-n} z^{-q}\psi_q(z) P_q\varphi_l = z^l \quad \forall l < p. \tag{3}$$

Если подействовать на систему (3) операторами P_s, $s < p$, получим, что произведение матриц $[z^{-q}P_q\psi_l]_{\|l\|,\|q\|=0}^{\|p\|-n}$, $[z^{-q}P_q\varphi_l]_{\|l\|,\|q\|=0}^{\|p\|-n}$ равно единичной матрице. Поэтому принадлежащие пространству A_R функции $\det\| z^{-q}P_q\varphi_l \|_{\|l\|,\|q\|=0}^{\|p\|-n}$ и $\det\| z^{-q}P_q\psi_l \|_{\|l\|,\|q\|=0}^{\|p\|-n}$ не имеют в поликруге $\mathscr{D}_R$ нулей, так как их произведение тождественно равно единице. Следовательно, если T — изоморфизм A_R на себя, коммутирующий со всеми операторами $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$, то необходимо

$$\det\| z^{-q}P_q\varphi_l \|_{\|l\|,\|q\|=0}^{\|p\|-n} \neq 0 \tag{4}$$

в каждой точке $\mathscr{D}_R$.

Если допустить, что оператор T, определенный формулой (1), удовлетворяет в $\mathscr{D}_R$ условию (4), то из системы (3) находим аналитические в $\mathscr{D}_R$ функции ψ_q, $q < p$. Построенный по ним при помощи формулы (2) оператор T^{-1} удовлетворяет равенствам $T^{-1}Tz^q = TT^{-1}z^q = z^q$ $\forall q < p$ и, следовательно, $T^{-1}Tf = TT^{-1}f = f$ $\forall f \in A_R$, т. е. оператор T^{-1} обратный к T. Получена теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы оператор T, определенный формулой* (1), *был изоморфизмом пространства A_R на себя, необходимо и достаточно, чтобы определитель* (4) *был отличен от нуля в каждой точке поликруга $\mathscr{D}_R$.*

Систему $\{g_k(z)\}_{\|k\|=0}^{\infty}$ аналитических в поликруге $\mathscr{D}_R$ функций естественно назвать квазистепенным базисом в A_R [5], если существует такой изоморфизм $T: A_R \to A_R$, что $Tz^k = g_k(z)$ для любого мультииндекса k.

Следствие 2. *Для того чтобы система функций $\{z^{\nu p}\varphi_q(z)\}_{q<p,\nu\geqslant 0}$ была квазистепенным базисом в A_R, необходимо и достаточно, чтобы определитель* (4) *был отличен от нуля в каждой точке поликруга $\mathscr{D}_R$.*

Аналитическая в $\mathscr{D}_R$ функция $f(z)$ называется сильно циклической относительно операторов $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$, если для каждой функции $g(z) \in A_R$ существует такой оператор $T \in L(A_R, A_R)$, коммутирующий с $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$, что $Tf = g$. Из формулы (1) сразу следует, что если f — сильно циклическая функция, то система функций $z^{-q}(P_qf)$ $\forall q < p$ не имеет общих нулей в $\mathscr{D}_R$, т. е.

$$\sum_{\|q\|=0}^{\|p\|-n} | z^{-q}(P_qf)(z) | > 0 \quad \forall z \in \mathscr{D}_R. \tag{5}$$

С другой стороны, если выполнено условие (5), рассмотрим в кольце A_R идеал, порожденный функциями $z^{-q}(P_qf)$ $\forall q < p$. Согласно одной из теорем Картана [7], этот идеал совпадает со всем пространством A_R. Поэтому для каждой функции $g(z) \in A_R$ существует такой набор функций $\varphi_q(z) \in A_R$, $q < p$, что $\sum_{\|q\|=0}^{\|p\|-n} z^{-p}\varphi_q(P_qf)(z) = g(z)$. Тогда при помощи найденных функций φ_q, $q < p$, определяем по формуле (1) оператор T такой, что $Tf = g$. Таким образом получено следствие.

Следствие 3. *Для того чтобы функция* $f \in A_R$ *была сильно циклической для операторов* $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$, *необходимо и достаточно выполнение условия* (5).

Из теорем 3 и 4 для случая $p_1 = \ldots = p_n = 1$ получаем такое следствие.

Следствие 4. *Для того чтобы оператор* $T \in L(A_R, A_R)$ *коммутировал со всеми операторами* $U_1, \ldots, U_n$, *необходимо и достаточно существование такой функции* $\varphi(z) \in A_R$, *что* $(Tf)(z) = \varphi(z) f(z)\ \forall f \in A_R$. *При этом* $T1 = \varphi(z)$.

Рассмотрим вопрос о представлении линейного непрерывного оператора T, коммутирующего с $U_1, \ldots, U_n$, в виде ряда по степеням операторов $U_1, \ldots, U_n$. Если T — такой оператор, то согласно следствию 4 $(Tf)(z) = \varphi(z) f(z)\ \forall f \in A_R$. Поэтому, разлагая φ в ряд Тейлора, получаем

$$(Tf)(z) = \left(\sum_{\|k\|=0}^{\infty} \varphi_k z^k\right) f(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} \varphi_k (U_1^{k_1} \ldots U_n^{k_n} f)(z) \quad \forall f \in A_R. \tag{6}$$

Очевидно, верно и обратное утверждение. Таким образом, справедливо следствие.

Следствие 5. *Для того чтобы оператор* $T \in L(A_R, A_R)$ *был коммутирующим одновременно со всеми операторами* $U_1, \ldots, U_n$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала такая числовая последовательность* $\{\varphi_k\}_{\|k\|=0}^{\infty}$, *что* $\forall \rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) < R = (R_1, \ldots R_n)\ \exists C(\rho) > 0 : |\varphi_k| \leqslant C(\rho)\rho^{-k}$ $\forall k$, *для которой* $T = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} \varphi_k U_1^{k_1} \ldots U_n^{k_n}$. *При этом* T — *изоморфизм, если функция* $T1 = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} \varphi_k z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} = \varphi(z)$ *отлична от нуля в каждой точке* $z \in \mathcal{D}_R$.

Аналогичные результаты справедливы и для коммутантов (в частности, изоморфизмов) операторов $U_1^{p_1}, \ldots, U_n^{p_n}$, рассматриваемых в пространстве $\bar{A}_R$.

3. Изоморфизмы пространства A_R, коммутирующие с операторами $\Delta_1^{p_1}, \ldots, \Delta_n^{p_n}$. Пользуясь тем, что матрицы операторов Δ_j и U_j в степенном базисе $\{z^k\}_{\|k\|=0}^{\infty}$ транспонированы друг к другу, из результатов п. 2 получаем следующие утверждения.

Лемма 1. *Если* $T \in L(\bar{A}_{1/R}, \bar{A}_{1/R})$ — *оператор умножения на функцию* $\varphi(z) \in \bar{A}_{1/R}$, *т. е.* $(Tf)(z) = \varphi(z) f(z)\ \forall f \in \bar{A}_{1/R}$, *то транспонированный оператор* T' *принадлежит пространству* $L(A_R, A_R)$ *и* $(T'f)(z) = \sum_{\|k\|=0}^{\infty} \varphi_k (\Delta_1^{k_1} \ldots \Delta_n^{k_n} f)(z)$ *для каждой* $f \in A_R$. *Здесь* $\varphi_k = (1/k!)\, \partial^k \varphi(0)/\partial z^k$ — *коэффициенты Тейлора функции* φ.

Доказательство непрерывности T' получаем из следствия 1, а действие оператора T' вначале проверяется на элементах базиса $\{z^k\}$.

Непосредственно вычислением легко убедиться, что для любого мультииндекса k и $k < p$ верно равенство $(z^{-k}/P_k)' = z^k P_0$.

Лемма 2. *Для произвольных мультииндексов* $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ *и* $s = (s_1, \ldots, s_n) < p$ *справедливо равенство* $P_0 \Delta_1^{\nu_1 p_1 + s_1} \ldots \Delta_n^{\nu_n p_n + s_n} = \Delta_1^{\nu_1 p_1 + s_1} \ldots \Delta_n^{\nu_n p_n + s_n} P_{s_1, \ldots, s_n}$.

Доказательство получается проверкой этого тождества на всех элементах степенного базиса.

Из этих лемм и теоремы 3 вытекает такое утверждение.

Теорема 5. *Для того чтобы линейный и непрерывный оператор* $T : A_R \to A_R$ *коммутировал со всеми операторами* $\Delta_1^{p_1}, \ldots, \Delta_n^{p_n}$, *необходимо и достаточно существование таких функций* $\varphi_q(z) \in \bar{A}_{1/R}$, $q < p$, *что*

$$(Tf)(z) = \sum_{\|q\|=0}^{\|p\|-n} \sum_{\|s\|=0}^{\|p\|-n} \sum_{\|\nu\|=0}^{\infty} \varphi_{q, p\nu+s} \Delta_1^{p_1\nu_1+s_1-q_1} \ldots \Delta_n^{p_n\nu_n+s_n-q_n} (P_s f) \quad \forall f \in A_R, \tag{7}$$

где $\varphi_{q,l}$ — *коэффициенты Тейлора функции* φ_q (*в равенстве* (7) *считаем, что при* $\nu = 0$ *и* $s < q$ $\Delta_j^{s_j - q_j} = U_j^{q_j - s_j}$, $j = 1, \ldots, n$).

Если $\varphi_{q,s}(z) = z^{-s}(P_s \varphi_q)$, то из теорем 4 и 5 следует теорема.

Теорема 6. *Для того чтобы оператор T, определенный формулой* (7), *был изоморфизмом A_R на себя, необходимо и достаточно, чтобы функция* $\det \| \varphi_{q,s}(z) \|_{\|q\|, \|s\|=0}^{\|p\|-n}$ *была отлична от нуля в каждой точке z из* $\overline{\mathcal{D}}_{1/R}$.

Аналогичные результаты справедливы и для коммутантов операторов $\Delta_1^{p_1}, \ldots, \Delta_n^{p_n}$, рассматриваемых в пространстве $\overline{A}_R$.

Покажем, что для операторов $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ нет сильно циклических функций, т. е. нет такой функции $f \in A_R$, чтобы $\forall g \in A_R$ уравнение $Tf = g$ имело решение в классе операторов $T \in L(A_R, A_R)$, коммутирующих одновременно со всеми операторами $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Действительно, если допустить противное, то имелось бы такое решение T_0, что для некоторого $f \in A_R$ выполнялось бы равенство $T_0 f = 1$. Тогда оператор $T_1 = \Delta_1 \ldots \Delta_n T_0$ был бы ненулевым, коммутирующим со всеми операторами $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, для которого $T_1 f = 0$. Поэтому, взяв для каждой функции $g \in A_R$ оператор T таким, что $Tf = g$, получаем $T_1 g = T_1 T f = T T_1 f = 0$. Это невозможно.

4. Некоторые базисы, связанные с операторами $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Пусть $f(z) = \sum\limits_{\|k\|=0}^{\infty} f_k z^k$ — формальный степенной ряд по переменным $z_1, \ldots, z_n$. Изучим вопрос о том, когда система функций $\{z^k (\Delta_1^{k_1} \ldots \Delta_n^{k_n} f)(z)\}_{\|k\|=0}^{\infty}$ будет квазистепенным базисом в пространстве A_R, или, что равносильно, когда оператор $Tz^k = z^k (\Delta_1^{k_1} \ldots \Delta_n^{k_n} f)(z)$ $\forall k$ может быть распространен до изоморфизма пространства A_R на себя.

Рассмотрим вначале более простой диагональный оператор $\mathcal{D} z^k = f_k z^k$ $\forall k$.

Теорема 7. *Оператор $\mathcal{D}$ распространяется до изоморфизма пространства A_R на себя тогда и только тогда, когда все $f_k \neq 0$ и* $\lim\limits_{\|k\| \to \infty} \sqrt[\|k\|]{|f_k|} = 1$.

Доказательство. Пусть сначала оператор $\mathcal{D}$ — изоморфизм A_R на себя. Тогда из общих свойств нижнетреугольных матриц следует, что все $f_k \neq 0$ и $\mathcal{D}^{-1} z^k = 1/f_k z^k$, $\|k\| = 0, 1, \ldots$. Поэтому из непрерывности операторов $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^{-1}$ (см. теорему 1) получаем, что для каждого $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) < R$ существуют постоянные $C(\rho)$ и $C'(\rho)$ и $r = (r_1, \ldots, r_n) < R$, для которых

$$C'(\rho)(\rho_1/r_1)^{k_1} \ldots (\rho_n/r_n)^{k_n} \leqslant |f_k| \leqslant C(\rho)(r_1/\rho_1)^{k_1} \ldots (r_n/\rho_n)^{k_n} \quad \forall k. \tag{8}$$

Правую (и аналогично левую) часть неравенства (8) оценим так: $|f_k| \leqslant C(\rho)(R_1/\rho_1)^{k_1} \ldots (R_n/\rho_n)^{k_n} \leqslant C(\rho)(\max\{R_1/\rho_1, \ldots, R_n/\rho_n\})^{\|k\|} \equiv C(\rho) q^{\|k\|}$. Тогда из неравенства (8) получаем неравенства $C'(\rho)(1/q)^{\|k\|} \leqslant |f_k| \leqslant C(\rho) q^{\|k\|}$, справедливые для каждого мультииндекса k. Отсюда следует, что $1/q \leqslant \varliminf\limits_{\|k\| \to \infty} \sqrt[\|k\|]{|f_k|} \leqslant \varlimsup\limits_{\|k\| \to \infty} \sqrt[\|k\|]{|f_k|} \leqslant q$. Если в последних неравенствах, пользуясь произвольностью ρ_j, $j = 1, \ldots, n$, устремить $\rho_1 \to R_1, \ldots, \rho_n \to R_n$, получаем $\lim\limits_{\|k\| \to \infty} \sqrt[\|k\|]{|f_k|} = 1$.

Проводя рассуждения в обратном порядке, убеждаемся, что и вторая часть теоремы также справедлива.

Перейдем к изучению оператора T. Если T — изоморфизм A_R на себя, то, поскольку его матрица нижнетреугольна, все диагональные элементы f_k этой матрицы отличны от нуля и числа $1/f_k$ — диагональные элементы матрицы оператора T^{-1}. Тогда из теоремы 1 получаем, что выполняются неравенства (8), которые равносильны равенству $\lim\limits_{\|k\|\to\infty} \sqrt[\|k\|]{|f_k|}=1$. Следовательно, оператор $\mathscr{D}$ по теореме 7 будет изоморфизмом пространства A_R на себя. Тогда оператор $T_0=\mathscr{D}^{-1}T$ также изоморфизм A_R. Но с другой стороны $T_0z^k=\mathscr{D}^{-1}Tz^k=\sum\limits_{j=k}^{\infty} z^j = z_1^{k_1}/(1-z_1)\dots z_n^{k_n}/(1-z_n)\ \forall k$. Из последнего соотношения получаем, что оператор T_0 — изоморфизм в том и только том случае, когда $|z_1|<1,\dots,|z_n|<1$. Итак, если T — изоморфизм A_R на себя, то все $f_k\neq 0$, $\lim\limits_{\|k\|\to\infty} \sqrt[\|k\|]{|f_k|}=1$ и все $R_j\leqslant 1$, $j=1,\dots$ $\dots,n$. Нетрудно убедиться, что справедливо и обратное утверждение. Следовательно, получена теорема.

Теорема 8. *Для того чтобы система функций* $\{z^k(\Delta_1^{k_1}\dots\Delta_n^{k_n}f)(z)\}$ *была квазистепенным базисом в* A_R, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись такие условия:* а) *все* $f_k\neq 0$, $\|k\|=0,1,\dots$; б) $\lim\limits_{\|k\|\to\infty} \sqrt[\|k\|]{|f_k|}=1$; в) $R_j\leqslant 1$, $j=1,\dots,n$.

Аналогично доказывается и такая теорема.

Теорема 9. *Для того чтобы система функций* $\left\{\sum\limits_{\|j\|=0}^{\|k\|} f_jz^j\right\}_{\|k\|=0}^{\infty}$ *была квазистепенным базисом в* A_R, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись такие условия:* а) *все* $f_k\neq 0$, $\|k\|=0,1,\dots$; б) $\lim\limits_{\|k\|\to\infty} \sqrt[\|k\|]{|f_k|}=1$ *и* в) *все* $R_j>1$, $j=1,\dots,n$.

Теоремы 8 и 9 обобщают соответствующие результаты, полученные для функций одной переменной (см. [4], с. 161—164).

Полученные в работе утверждения переносятся на случай полных n-круговых областей с центром в начале координат.

1. *Себастьян-и-Силва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях.— Математика, 1957, **1**, № 1, с. 60—77.
2. *Нагнибида Н. И.* Операторы, перестановочные с операторами умножения на аналитические функции, и связанные с ними квазистепенные базисы.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1971, вып. 13 с. 63—67.
3. *Нагнибида Н. И.* Об одном классе операторов обобщенного дифференцирования в пространстве аналитических в круге функций.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков : Изд-во Харьк. ун-та, 1975, вып. 24, с. 98—106.
4. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций.— М. : Наука, 1976.— 191 с.
5. *Хапланов М. Г.* Линейные преобразования аналитических пространств.— Докл. АН СССР, 1951, **80**, № 1, с. 21—24.
6. *Хапланов М. Г.* Матричный признак базиса в пространстве аналитических функций.— Докл. АН СССР, 1971, **80**, № 2, с. 177—180.
7. *Cartan H.* Ideaux et modules de functions analytique de variable complexes.— Bull. Soc. Math. France, 1950, **78**, p. 28—64.

Черновиц. гос. ун-т

Поступила 19.04.83