УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Днепропетр. ун-т)

ИССЛЕДОВАНИЯ ДНЕПРОПЕТРОВСКИХ МАТЕМАТИКОВ ПО НЕРАВЕНСТВАМ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯМ

We present a review of investigations of Dnepropetrovsk mathematicians on Kolmogorov-type exact inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and on their applications in approximation theory.

Наведено огляд досліджень дніпропетровських математиків, що стосуються точних нерівностей типу Колмогорова для норм проміжних похідних періодичних функцій та їх застосувань в теорії наближень.

1. Введение. Пусть G — измеримое по Лебегу подмножество R такое, что $\mu G > 0$. Будем рассматривать пространства $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, измеримых функций $x\colon G \to R$ таких, что

$$\|x\|_p = \|x\|_{L_p(G)} := \left\{ \int_G |x(t)|^p\, dt \right\}^{1/p} < \infty, \quad \text{если} \quad 0 < p < \infty,$$

или

$$\|x\|_\infty = \|x\|_{L_\infty(G)} := \sup_{t \in G} \operatorname{vrai} |x(t)| < \infty, \quad \text{если} \quad p = \infty.$$

В дальнейшем G — числовая ось R, полуось R_+, конечный интервал I или единичная окружность T, реализованная как отрезок $[0, 2\pi]$ с отождествленными концами.

Обозначим через $L_s^r(G)$, $r \in \mathbf{N}$, $1 \le s \le \infty$, пространство функций x, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $x^{(r-1)}$ и таких, что $x^{(r)} \in L_s(G)$. Для $1 \le p \le \infty$ положим $L_{p,s}^r(G) = L_p(G) \cap L_s^r(G)$. Отметим, что если $G = I$ или $G = T$, то $L_s^r(G) \subset L_p(G)$ для любого p. Иногда вместо $L_p^r(\mathbf{T})$ будем писать L_p^r.

Важную роль во многих вопросах анализа и его приложений играют неравенства для норм промежуточных производных функций $x \in L_{p,s}^r(G)$ вида

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \Phi\left(\|x\|_p, \left\| x^{(r)} \right\|_s \right) \tag{1}$$

с некоторой фиксированной функцией $\Phi\colon R^2 \to R_+$. Впервые неравенства такого типа встречаются в работе Г. Харди и Дж. Литтлвуда [1] в случае $p = q = s = \infty$. Традиционными являются аддитивная форма записи таких неравенств

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le A \|x\|_p + B \left\| x^{(r)} \right\|_s \tag{2}$$

или мультипликативная форма

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le K \|x\|_p^\alpha B \left\| x^{(r)} \right\|_s^\beta. \tag{3}$$

© В. Ф. БАБЕНКО, 2000

Исследования многих математиков были направлены на получение неравенств типа (2), (3) с неулучшаемыми константами (точных неравенств).

Первые точные результаты были получены Э. Ландау [2] (случай $x \in \in L^2_{\infty,\infty}(R_+)$ или $x \in L^2_\infty(I)$, $k = 1$) и Ж. Адамаром [3] (случай $x \in L^2_{\infty,\infty}(R)$, $k = 1$).

Один из первых полных и наиболее ярких результатов в этом направлении был получен А. Н. Колмогоровым (см., например, [4]). После этого за неравенствами такого типа закрепилось название „неравенства типа Колмогорова". А. Н. Колмогоров доказал, что если $x \in L^2_{\infty,\infty}(R)$, то для любого $k \in \mathbf{N}$, $k < r$,

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \le \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_\infty}{\left\| \varphi_r \right\|_\infty^{1-k/r}} \| x \|_\infty^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r},$$

где φ_r — r-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin x$ (отметим, что при $2 < r < 5$ и $r = 5$, $k = 2$ это было доказано Г. Е. Шиловым [5]). Неравенство (4) обращается в равенство для любой функции, вида $\varphi_r(\lambda t)$, где $\lambda \in R$, $\lambda > 0$.

Для установления неравенства (4) А. Н. Колмогоров доказал теорему сравнения производных, которая впоследствии оказалась очень полезной при точном решении многих экстремальных задач теории приближения и вообще анализа. В частности, с помощью этой теоремы и различных ее вариантов и обобщений были получены многие другие неравенства для норм промежуточных производных, а также различные неравенства типа Маркова – Бернштейна для полиномов и сплайнов (подробнее об этом см., например, [6, 7]). Эта теорема является также одной из основных предпосылок созданного Н. П. Корнейчуком метода сравнения перестановок и Σ-перестановок — мощного метода точного решения многих экстремальных задач теории приближения (см., например, [8, 9]).

Позже были даны доказательства неравенства Колмогорова, основанные на других идеях. Среди таких доказательств отметим доказательство Банга (см., например, [10]), предложенное еще в 1941 г., и доказательство А. А. Лигуна [11, 12].

Как уже отмечалось, работы многих математиков были посвящены поиску точных неравенств типа Колмогорова для функций, заданных на всей числовой оси, полуоси, единичной окружности или конечном отрезке. Однако, вплоть до настоящего времени известно лишь несколько случаев, когда при некоторых значениях p, q, s точные константы в неравенствах типа (3) получены для всех пар $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$. Кроме упомянутого выше неравенства Колмогорова эти случаи таковы:

для $G = R$:

1) $p = q = s = 2$ (Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Д. Полиа [13]);

2) $p = q = s = 1$ (И. Стейн [14]);

3) $q = \infty$, $p = s = 2$ (А. Г. Тайков [15]);

для $G = R_+$:

1) $p = q = s = \infty$ (Э. Ландау [2], А. П. Маторин [16], И. Шенберг и А. Каваретта [17]);

2) $p = q = s = 2$ (Ю. И. Любич [18], Н. П. Купцов [19]);

3) $q=\infty,\ p=r=2$ (В. Н. Габушин [20]).

Точные результаты для $G=R$ или R_+ при различных частных значениях $r,\ k,\ p,\ q,\ s$ были получены В. В. Арестовым, В. И. Бердышевым, В. И. Буслаевым, В. Н. Габушиным, Г. Г. Магарил-Ильяевым, Надем, Соляром и многими другими математиками (см. [21 – 24]).

О точных неравенствах для промежуточных производных функций, заданных на конечном отрезке см. работы [25 – 28], в которых имеется соответствующая библиография. Что же касается точных неравенств для функций, заданных на единичной окружности (периодических функций), то многие из них получены днепропетровскими математиками, и изложение того, что известно в этом направлении, а также приложений известных неравенств к исследованию различных экстремальных задач теории аппроксимации и экстремальных свойств полиномов и сплайнов и составляет основное содержание данной статьи.

Представляет значительный интерес вопрос о том, при каких соотношениях между параметрами $r,\ k,\ p,\ q,\ s$ неравенства типа (1) – (3) в принципе возможны.

Известно, что для $G=I$ при любых заданных $1\le p,q,s\le\infty,\ k,r\in\mathbf{Z},\ 0\le\le k<r$ существуют константы $A,\ B$ такие, что для любой функции $x\in\in L^r_{p,s}(G)$ имеет место неравенство (2). Если G есть R или R_+, то [29] неравенство (2) имеет место для всех функций $x\in L^r_{p,s}(G)$, если и только если

$$\frac{r-k}{p}+\frac{k}{s}\ge\frac{r}{q}, \tag{5}$$

и в этом случае неравенство (2) эквивалентно неравенству (3), в котором

$$\alpha=\frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}} \quad \text{и} \quad \beta=\frac{k-q^{-1}+p^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}.$$

Общие условия существования неравенств вида (3) в периодическом случае при $p,q,s\ge 1$ были установлены в [30], где доказано, что неравенство (3) справедливо для всех функций $x\in L^r_s(\mathbf{T})$ и $k\in\mathbf{N},\ k<r$, если и только если

$$\alpha\le\alpha_{kr}:=\min\left\{1-\frac{k}{r},\frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}\right\}. \tag{6}$$

Отметим, что наибольший интерес представляют неравенства вида (3) с $\alpha==\alpha_{kr}$.

Неравенства типа (1) – (3) обобщались в различных направлениях. Так, Л. Хермандер [31] доказал следующее неравенство. Пусть $E_0(x)_\infty$ — наилучшее равномерное приближение функции x подпространством констант. Пусть также $\varphi_r(\cdot;\alpha,\beta)$ — r-й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от 2π-периодической функции $\varphi_0(t;\alpha,\beta)$, которая равна α для $t\in[0,2\pi\beta/(\alpha+\beta))$ и $-\beta$ для $t\in[2\pi\beta/(\alpha+\beta),2\pi)$. В [31] доказано, что для любой функции $x\in L^r_{\infty,\infty}(R)$

$$\left\|x_\pm^{(k)}\right\|_\infty\le\frac{\left\|\varphi_{r-k}\left(\cdot;\left\|x_+^{(r)}\right\|_\infty,\left\|x_-^{(r)}\right\|_\infty\right)_\pm\right\|_\infty}{E_0\left(\varphi_r\left(\cdot;\left\|x_+^{(r)}\right\|_\infty,\left\|x_-^{(r)}\right\|_\infty\right)\right)_\infty^{1-k/r}}E_0(x)_\infty^{1-k/r}, \tag{7}$$

где $x_{\pm}(t) = \max\{x(t), 0\}$. Следует отметить, что как само неравенство (7), так и различные его обобщения, оказались полезными для исследования различных вопросов односторонней и несимметричной аппроксимации.

Другой путь обобщения неравенств типа Колмогорова состоит в замене операторов d^k/dx^k и d^r/dx^r в этом неравенстве более общими дифференциальными (см. [32 – 36], в [36] имеется подробная библиография) операторами или вообще операторами другой природы. Некоторые обобщения такого типа будут рассмотрены ниже.

Поскольку норма в пространстве L_p является опорной функцией единичного шара сопряженного пространства, неравенства для норм промежуточных производных можно трактовать как неравенства для опорных функций выпуклых множеств. С этой точки зрения полученный еще в 1961 г. результат Н. П. Корнейчука [37] о наилучшем приближении класса H^{ω} непрерывных периодических функций, имеющих заданную мажоранту $\omega(t)$ модуля непрерывности, классом NW_{∞}^1 (здесь и в дальнейшем NW_p^r — класс функций $x \in L_p^r$ таких, что $\|x^{(r)}\| \le N$), можно, с учетом двойственности для наилучших приближений выпуклым множеством (см. [8], гл. 1), рассматривать как неравенство типа (2): для $x \in L_1^1$ при любом $N > 0$

$$S_{H^{\omega}}(x') := \sup_{f \in H^{\omega}} \int_0^{2\pi} f(t)x'(t)\,dt \le N\|x\|_1 + \frac{\|x'\|_1}{2} \max_{0 \le t \le \pi} (\omega(t) - Nt).$$

Это, по существу, первое точное неравенство типа Колмогорова, полученное в Днепропетровском университете. Как неравенства типа Колмогорова можно рассматривать также результаты Н. П. Корнейчука [38, 39] об оценках верхних граней функционалов на классах периодических функций. Подробному обсуждению этих и других результатов такого типа посвящены работы [40, 41].

В п. 2 приведены варианты полного решения задачи о точных константах в неравенствах типа Колмогорова для норм промежуточных производных периодических функций. Перечень этих вариантов существенно шире, чем в непериодическом случае. Здесь же приведены точные неравенства в случае любого $r \in \mathbf{N}$, $k = 0$, но достаточно произвольных q и p. В п. 3 рассматривается случай малых гладкостей. И здесь спектр параметров q, p, s, при которых удается получить точные неравенства, шире, чем в непериодическом случае. В п. 4 речь идет о неравенствах для производных, в которых учитываются некоторые дополнительные свойства рассматриваемых функций (число перемен знака некоторых производных). В п. 5 мы обсудим связи неравенств типа Колмогорова с другими задачами. Здесь приведено несколько вариантов теоремы эквивалентности задачи о точном неравенстве типа (1) ряду других задач. В п. 6 речь идет о применениях неравенств типа Колмогорова к точному решению экстремальных задач теории приближения, а в п. 7 — к исследованию экстремальных свойств полиномов и сплайнов. Наконец, в п. 8 мы коротко расскажем о других исследованиях днепропетровских математиков по неравенствам для промежуточных производных.

2. Случаи полного решения задачи о точных неравенствах типа Колмогорова для периодических функций. Прежде всего отметим следующие случаи, которые либо являются частными случаями неравенств, полученных на всей оси, либо могут быть получены аналогично:

1) $p = q = r = \infty$ (Ж. Адамар, Г. Е. Шилов, А. Н. Колмогоров);

2) $p = q = r = 2$ (Г. Харди, Дж. Литтлвуд, Д. Полиа);

3) $p = q = r = 1$ (И. Стейн);

4) $q = \infty$, $p = r = 2$ (А. Ю. Шадрин [42]).

Неравенство Адамара, Шилова и Колмогорова (4) было приведено выше. Неравенство Харди, Литтлвуда и Полиа для функций $x \in L^r_{2,2}(\mathbf{T})$ имеет вид

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \le \| x \|_2^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_2^{k/r}. \tag{8}$$

Из неравенства (4) методом Стейна [14] легко выводится, что для функций $x \in L^r_1$ при всех $k \in \mathbf{N}$, $k < r$, справедливо неулучшаемое неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \frac{\| g_{r-k} \|_1}{\| g_r \|_1^{1-k/r}} \| x \|_1^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{k/r} \tag{9}$$

(здесь и далее $g_r(t) := 1/4\varphi_{r-1}(t)$). Отметим, что метод Стейна из работы [14] оказался применимым и в других ситуациях (по поводу некоторых его вариантов и обобщений см. работы [43 – 45]). Формулировку неравенства Шадрина, которое является периодическим аналогом неравенств Тайкова и Габушина, мы не приводим ввиду ее громоздкости.

Остальные результаты, приведенные в данном пункте, получены днепропетровскими математиками. Мы начнем их изложение с одного из наиболее интересных неравенств, доказанного А. А. Лигуном [46]: для любой функции $x \in L^r_\infty(\mathbf{T})$, любого $k \in \mathbf{N}$, $k < r$, и любого $p \in [1, \infty]$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_p \le \frac{\| \varphi_{r-k} \|_p}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}} \| x \|_\infty^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r}. \tag{10}$$

Неравенство (10) обращается в равенство для функций вида $\varphi_{n,r}(t) := n^{-r}\varphi_r(nt)$. При доказательстве этого неравенства существенно использовалась техника сравнения перестановок.

Неравенство (10) в связи с его важностью для исследования многих экстремальных задач теории приближений обобщалось во многих направлениях. Так, для потребностей наилучшей односторонней и несимметричной аппроксимации были получены различные несимметричные варианты этого неравенства (неравенства типа Хермандера). Разного рода „односторонние" неравенства типа (10) и их многочисленные приложения подробно изложены в [9]. По поводу более общих „несимметричных" неравенств, а также обобщений неравенства (10) на линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами см. работы [47, 34 – 36], [6] (гл. 1) и [7] (гл. 1).

В работе [48] доказано следующее неравенство: для любых $k \in \mathbf{N}$, $k < r$ и $x \in L_\infty(\mathbf{T})$

$$\left\| \tilde{x}^{(k)} \right\|_1 \le \frac{\left\| \tilde{\varphi}_{r-k} \right\|_1}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-k/r}} \| x \|_\infty^{1-k/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/r} \tag{11}$$

($\tilde{x}$ — функция, тригонометрически сопряженная с функцией x).

Пусть для $x \in L_1$

$$a_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(t)\,dt.$$

Если $r \in R,\ r > 0,$ положим

$$B_r(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-r} \cos(\nu t - \pi r/2).$$

Функция $q \in L_1$ такая, что $a_0(g) = 0,$ называется r-й производной в смысле Вейля для $x \in L_1$ $(x^{(r)} = g)$, если

$$x(t) = a_0(x) + (B_r * g)(t) = a_0(x) + \int_0^{2\pi} B_r(t-u) g(u)\, du.$$

Обозначим через L_p^r множество функций $x \in L_1$ таких, что $x^{(r)} \in L_p$. Для $r \in R,\ r > 0,$ положим

$$\varphi_r(t) = \int_0^{2\pi} B_r(t-u) \varphi_0(u)\, du.$$

В [49, 50] получено следующее неравенство для производных полуцелого порядка. Пусть $k, r \in \mathbf{N},\ r/2 \le k < r.$ Тогда для любой функции $x \in L_\infty^r$ имеет место неулучшаемое неравенство

$$\left\| x^{(k+1/2)} \right\|_2 \le \frac{\left\| \varphi_{r-k-1/2} \right\|}{\| \varphi_r \|_\infty^{1-(k+1/2)/r}} \| x \|_\infty^{1-(k+1/2)/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(k+1/2)/r}. \tag{12}$$

Если при доказательстве неравенства (10) существенно использовалась теорема сравнения производных, опирающаяся на теорему Ролля для оператора $d/dt,$ то операторы тригонометрического сопряжения и дробного дифференцирования таких свойств уже не имеют. При доказательстве неравенства (11) эту трудность удалось преодолеть с помощью леммы Стейна и Вейса (см., например, [6], § 1. 6). При доказательстве (12) используются неравенства (10) и (11).

В работе [51] даны некоторые обобщения результатов из [48].

Неравенство (10) относится к случаю, когда (6)

$$\alpha_{kr} := \min\left\{1 - \frac{k}{r},\ \frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}\right\} = 1 - \frac{k}{r}.$$

Для функций, заданных на всей числовой оси или полуоси, в этом случае неравенства типа (3) принципиально невозможны. Следующая группа результатов, полученных В. Ф. Бабенко, В. А. Кофановым и С. А. Пичуговым [52 – 55], относится к случаю, когда

$$\alpha_{kr} := \min\left\{1 - \frac{k}{r},\ \frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}\right\} = \frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}}.$$

Пусть $k, r \in \mathbf{N},\ k < r,$ и $p \in [1, \infty).$ Тогда для любой функции $x \in L_\infty^r$ справедливо неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \le \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_\infty}{\| \varphi_r \|_p^{(r-k)/(r+p^{-1})}} \| x \|_p^{(r-k)/(r+p^{-1})} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(k+p^{-1})/(r+p^{-1})}. \tag{13}$$

Неравенство (13) обращается в равенство для функций вида $x(t) = a\varphi_r(t)$, $a \in \in R$.

Для любой функции $x \in L_1^r$ справедливо неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_\infty \le \frac{\left\| g_{r-k} \right\|_\infty}{\| g_r \|_p^{(r-k-1)/(r-1+p^{-1})}} \| x \|_p^{(r-k-1)/(r-1+p^{-1})} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{(k+p^{-1})/(r-1+p^{-1})}. \tag{14}$$

При $p = \infty$ это неравенство получено А. А. Лигуном (см., например, [9], § 6. 4).

Наконец, для любой функции $x \in L_1^r$ справедливо неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \le \frac{\left\| g_{r-k} \right\|_2}{\| g_r \|_p^{(r-k-1/2)/(r-1+p^{-1})}} \times$$

$$\times \| x \|_p^{(r-k-1/2)/(r-1+p^{-1})} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{(k-1/2+p^{-1})/(r-1+p^{-1})}. \tag{15}$$

Основным здесь является неравенство (13). Неравенства (14) и (15) устанавливаются с его помощью. Существенную роль при доказательстве неравенства (13) играет теорема сравнения Колмогорова и техника сравнения перестановок.

В 1941 г. Надем [56] для функций, определенных на оси, при $r = 1$, $q \ge p > > 0$ и $1 \le s \le \infty$ были получены точные неравенства вида

$$\| x \|_{L_q(G)} \le K \| x \|_{L_q(G)}^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_{L_s(G)}^{1-\alpha}. \tag{16}$$

Неравенства вида (16) будем называть неравенствами типа Надя. Приведем полученные В. Ф. Бабенко, В. А. Кофановым и С. А. Пичуговым [57 – 59] неравенства типа (16) для имеющих нули периодических функций x с существенно ограниченными производными порядка $r \ge 1$.

Пусть $r \in \mathbf{N}$ и $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$. Тогда для функций $x \in L_\infty^r(\mathbf{T})$, имеющих нули, справедливо неулучшаемое неравенство

$$\| x \|_q \le \sup_{0 \le c \le \| \varphi_r \|_\infty} \frac{\| \varphi_r + c \|_q}{\| \varphi_r + c \|_p^{(r+1/q)/(r+1/p)}} \times$$

$$\times \| x \|_p^{(r+1/q)/(r+1/p)} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(1/p-1/q)/(r+1/p)}. \tag{17}$$

Обозначим через $E_0(x)_p$ обычное наилучшее приближение, а через $E_0^{\pm}(x)_p$ наилучшее приближение снизу (+) и сверху (–) функции $x \in L_p(\mathbf{T})$ константами в пространстве $L_p(\mathbf{T})$. При $1 \le p \le \infty$ через $c_p(x)$ обозначим константу наилучшего приближения функции $x \in L_p(\mathbf{T})$ в $L_p(\mathbf{T})$. Имеют место следующие точные неравенства. Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$, $m = p + 1$ или $m = = \infty$. Тогда для любой функции $x \in L_\infty^r$

$$\| x - c_m(x) \|_q \le \frac{\| \varphi_r \|_q}{\| \varphi_r \|_p^{(r+1/q)/(r+1/p)}} \times$$

$$\times \| x - c_m(x) \|_p^{(r+1/q)/(r+1/p)} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(1/p-1/q)/(r+1/p)}, \tag{18}$$

$$E_0^{\pm}(x)_q \le \frac{\| \varphi_r - \| \varphi_r \|_\infty \|_q}{\| \varphi_r - \| \varphi_r \|_\infty \|_p^{(r+1/q)/(r+1/p)}} \times$$

$$\times\, E_0^{\pm}(x)_p^{(r+1/q)/(r+1/p)} \| x^{(r)} \|_\infty^{(1/p-1/q)/(r+1/p)}, \tag{19}$$

$$E_0(x)_\infty \le \frac{\| \varphi_r \|_\infty}{\| \varphi_r \|_p^{r/(r+1/p)}} \| x \|_p^{r/(r+1/p)} E_0(x^{(r)})_\infty^{(1/p)/(r+1/p)}. \tag{20}$$

В качестве следствия из (20) отметим, что для любой функции $x \in L_\infty^r$, $x \perp$ $\perp$ const, при $r \in \mathbf{N}$ и $q \in (1, \infty]$ справедливо точное неравенство

$$\| x \|_q \le \frac{\| \varphi_r \|_q}{\| \varphi_r \|_1^{(r+1/q)/(r+1)}} \| x \|_1^{(r+1/q)/(r+1)} \| x^{(r)} \|_\infty^{(1-1/q)/(r+1)}. \tag{21}$$

При доказательстве неравенств (18) – (21) также основную роль играет метод сравнения производных и перестановок.

Отметим еще, что в работе [60] получены некоторые точные неравенства типа Колмогорова для функций, ограниченных на дискретной сетке.

Подытоживая приведенные результаты, видим, что перечень 1 – 4 известных в периодическом случае достаточно полных результатов по отысканию точных констант в неравенствах типа Колмогорова можно продолжить следующим образом:

5) $q \in [1, \infty)$, $p = s = \infty$ (А.А.Лигун);

6) $q = \infty$, $p \in [1, \infty)$, $s = \infty$ (В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов);

7) $q = \infty$, $p \in [1, \infty)$, $s = 1$ (В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов);

8) $q = 2$, $p \in [1, \infty]$, $s = 1$; $k > r/2$ (В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов);

9) $q, p \in (0, \infty]$, $q > p$, $r \in \mathbf{N}$, $k = 0$ (В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов).

3. Неравенства типа Колмогорова для периодических функций в случае малых гладкостей. Мы начнем со случая функций с существенно ограниченной старшей производной. В работе [61], в частности, доказано, что при $r =$ $= 2$ и $r = 3$, $1 \le k \le r-1$, всех $p \ge 1$ и $q = rp/(r-k)$ для функций из $L_{p,\infty}^r(R)$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\| x^{(k)} \|_q \le 2^{\alpha/p - 1/q} \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_{r-k} \|_p^\alpha} \| x \|_p^\alpha \| x^{(r)} \|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$.

Для периодических функций в работе [62] доказано, что если $r = 2$ и $k = 1$, или $r = 3$ и $k = 1, 2$, то при любых $p, q \in [1, \infty]$, а если $r = 4$ и $k = 3$, или $r =$ $= 6$, и $k = 4, 5$, то при $p = 1$, $q \in [1, \infty]$, для функций $f \in L_{p,\infty}^r(\mathbf{T}^1)$ справедливо неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_q}{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_p^{\alpha}} \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_{\infty}^{1-\alpha}, \tag{22}$$

где

$$\alpha = \alpha_{kr} = \min\left\{1 - \frac{k}{r}, \frac{r-k+q^{-1}}{r+p^{-1}}\right\}.$$

Неравенство (22) является точным. При $q > rp/(r-k)$ оно обращается в равенство для функций вида $x(t) = a\varphi_r(t+c)$, $a, c \in R$. При $1 \le q \le rp/(r-k)$ оно обращается в равенство для функций вида $x(t) = a\,\varphi_r(nt+c)$, $a, c \in R$, $n \in \mathbf{N}$.

Следующая группа неравенств (также см. [62]) получена для функций с суммируемой старшей производной. При всех $p, q \in [1, \infty]$ для функций $f \in L^2_{p,1}(\mathbf{T}^1)$ справедливо точное неравенство

$$\left\| x' \right\|_q \le \sup_{\gamma+\delta=1/2} \frac{\| \varphi_0(\cdot; \gamma, \delta) \|_q}{\| \varphi_1(\cdot; \gamma, \delta) \|_p^{\alpha}} \| x \|_p^{\alpha} \left\| x'' \right\|_1^{1-\alpha}, \tag{23}$$

где

$$\alpha = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{p}{q(p+1)}\right\}.$$

Если $q \le 2$, то при всех $p \in [1, \infty]$

$$\sup_{\gamma+\delta=1/2} \frac{\| \varphi_0(\cdot; \gamma, \delta) \|_{L_q(\mathbf{T}^1)}}{\| \varphi_1(\cdot; \gamma, \delta) \|_{L_p(\mathbf{T}^1)}^{\alpha}} = \frac{\| \varphi_0(\cdot; 1/4, 1/4) \|_{L_q(\mathbf{T}^1)}}{\| \varphi_1(\cdot; 1/4, 1/4) \|_{L_p(\mathbf{T}^1)}^{\alpha}} = \frac{\| g_1 \|_{L_q(\mathbf{T}^1)}}{\| g_2 \|_{L_p(\mathbf{T}^1)}^{\alpha}}.$$

Кроме того, при любом $p \in [1, \infty]$, если $q > \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p+9}{p+1}}$, то

$$\sup_{\gamma+\delta=1/2} \frac{\| \varphi_0(\cdot; \gamma, \delta) \|_{L_q(\mathbf{T}^1)}}{\| \varphi_1(\cdot; \gamma, \delta) \|_{L_p(\mathbf{T}^1)}^{\alpha}} > \frac{\| g_1 \|_{L_q(\mathbf{T}^1)}}{\| g_2 \|_{L_p(\mathbf{T}^1)}^{\alpha}}.$$

Для функций $f \in L^2_{p,1}(R)$ точное неравенство типа (23) доказано в [63] при $q = 2p/(p+1)$.

В дополнение к (23) имеет место следующее. Пусть $p \in [1, \infty)$ и $r = 3$ или $r = 4$. Пусть также $k = 1$ и $q \ge 2p$, если $r = 3$, и $k = 1$, $q \ge 3p/2$, или $k = 2$, $q \ge 3p$, если $r = 4$. Тогда для функции $x \in L^r_{p,1}(\mathbf{T}^1)$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\| g_{r-k} \|_q}{\| g_r \|_p^{\alpha}} \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{1-\alpha},$$

где

$$\alpha = \alpha_{kr} = \frac{r-k-1+q^{-1}}{r-1+p^{-1}}.$$

Следующие два утверждения [62] относятся к случаю произвольных гладкостей r, но некоторых частных значений k.

Пусть $r \in \mathbf{N}$ и $k = r-1$, $k = r-2$ или $k = r-3$, причем $1 \le q \le 2$, если $k = r-1$, $q \ge 2$, если $k = r-2$, и $q \ge 3/2$, если $k = r-3$. Тогда для функций $x \in L_{1,1}^{r}(\mathbf{T}^1)$ справедливо точное неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\| g_{r-k} \|_q}{\| g_r \|_1^{\alpha}} \| x \|_1^{\alpha} \left\| f^{(r)} \right\|_1^{1-\alpha},$$

где

$$\alpha = \alpha_{kr} = \frac{r-k-1+q^{-1}}{r}.$$

Пусть, наконец, $q, p \in (1, \infty]$, $r \in \mathbf{N}$ и $k = r-1$, $k = r-2$ или $k = r-3$, причем $4/3 \le q \le 2$, и $r \ge 5$, если $k = r-1$, $q \ge 4$, и $r \ge 7$, если $k = r-2$, $q \ge 3$ и $r \ge 9$, если $k = r-3$. Тогда для функций $x \in L_{p,1}^{r}(\mathbf{T}^1)$ справедливо точное неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le \frac{\| g_{r-k} \|_q^{\alpha}}{\| g_r \|_p} \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \alpha_{kr} = \dfrac{r-k-1+q^{-1}}{r-1+p^{-1}}$.

Приведем еще некоторые неравенства для функций со старшей производной из L_s, $1 < s < \infty$. В работе [64] для функций $x \in L_{\infty,s}^{r}(R)$ установлено точное неравенство типа (3) при следующих значениях параметров: $r = 2$, $k = 1$, $p = \infty$, $s \in [1, \infty]$, $q \ge 2s$, и $r = 3$, $k = 1, 2$, $q = p = \infty$, $s \in [1, \infty]$. Для периодических функций в [62, 65] доказаны следующие два утверждения.

Пусть $s \in (1, \infty)$. Тогда для функций $x \in L_{\infty,s}^{2}(\mathbf{T})$ справедливо неравенство (как обычно, $p' = p/(p-1)$)

$$\| x' \|_\infty \le 2^{(1-s')/(1+s')} \left(\frac{s'+1}{s'} \right)^{s'/(1+s')} E_0(x)_\infty^{\alpha} E_0(x'')_s^{1-\alpha} \tag{24}$$

с показателем $\alpha = \alpha_{kr} = 1/(s'+1)$. Для функций $x \in L_{\infty,s}^{3}(\mathbf{T})$, $s \in (1, \infty)$, справедливо неравенство

$$E_0(x')_\infty \le 2^{(2-3s')/(2s'+1)} \frac{(2s'+1)^{2s'/(2s'+1)}}{(s')^{s'/(2s'+1)} (s'+1)^{(s'+1)/(2s'+1)}} E_0(x)_{L_\infty(\mathbf{T}^1)}^{\alpha_1} E_0(x''')_{L_s(\mathbf{T}^1)}^{1-\alpha_1}, \tag{25}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{2-1/s}{3-1/s} = \frac{1+1/s'}{2+1/s'}$$

— критический показатель. Константы в неравенствах (24) неулучшаемы.

4. Неравенства, учитывающие число перемен знака производных. Для суммируемой 2π-периодической функции x символом $\nu(x)$ будем обозначать число существенных перемен знака x на периоде (см., например, [8, с. 80]). В силу результата [30] неравенства вида (3) с $\alpha > \alpha_{kr}$ невозможны. Тем не менее, как показал А. А. Лигун [66], если неравенство вида (3) видоизменить так, чтобы в нем были учтены некоторые дополнительные свойства функции x, такие, например, как число перемен знака ее производных, то возможны неравенства типа Колмогорова с показателем $\alpha > \alpha_{kr}$. Сформулируем результат А. А. Лигуна: для $r, k \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p \in [1, \infty]$ и $x \in L_1^r$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2} \right)^{(1-1/p)\alpha} \frac{\| g_{r-k} \|_1}{\| g_r \|_p^{\alpha}} \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{1-\alpha}, \tag{26}$$

где

$$\alpha = \frac{r-k}{r-1+1/p}.$$

Отметим, что неравенство (26) при $p = 1$ превращается в неравенство Стейна (6). В работе [66] приведен также ряд применений неравенства (26) в теории аппроксимации. В [67] неравенство (26) обобщено на дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.

Будем [68] рассматривать неравенства вида

$$\left\| x^{(k)} \right\|_q \le M \prod_{i=1}^{m} \nu\left(x^{(i)}\right)^{\alpha_i} \| x \|_p^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_s^{1-\alpha}, \tag{27}$$

где $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — неотрицательные числа, $\alpha \in (0, 1)$, для функций $x \in L_s^r$ (в этом случае $m = r$) и для функций $x \in L_1^{r+1}$ (в этом случае $m = r + 1$). При этом будем рассматривать неравенства, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\alpha > \alpha_{kr} := \min\left\{ 1 - \frac{k}{r}, \frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}} \right\}$;

в ряде случаев нам удалось добиться того, чтобы, как и в (26),

$$\alpha = \max\left\{ 1 - \frac{k}{r}, \frac{r-k-s^{-1}+q^{-1}}{r-s^{-1}+p^{-1}} \right\};$$

2) $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = k - r(1-\alpha)$.

Заметим, что $k - r(1-\alpha)$ — минимально возможное значение для $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i$, при котором неравенство (27) справедливо с константой M, не зависящей от f. Действительно, если $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i < k - r(1-\alpha)$, то при достаточно больших $n \in \mathbf{N}$ неравенство (27) для $x(nt)$, $x \ne \text{const}$, нарушитсч. Именно наличие свойств 1, 2 у неравенства (26) обусловило его приложения.

Изложение результатов мы начнем с неравенств типа (27), которые можно достаточно просто получить из неравенств (4) и (9).

Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$. Тогда для любой функции $x \in L_\infty^{r+1}$ справедливо неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x^{(r+1)})}{2} \right)^{k/(r+1)} \frac{\| \varphi_{r-k} \|_1}{\| \varphi_r \|_1^{(r-k+1)/(r+1)}} \| x \|_1^{(r-k+1)/(r+1)} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{k/(r+1)}. \tag{28}$$

Если $k \ge 2$, то

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2} \right)^{(r-k)/(r-1)} \frac{\| g_{r-k} \|_1}{\| g_r \|_1^{(r-k)/(r-1)}} \| x \|_\infty^{(r-k)/(r-1)} \left\| x^{(r)} \right\|_1^{(k-1)/(r-1)}, \tag{29}$$

или

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2} \right)^{(r-k+1)/r} \left(\frac{\nu(x^{(r+1)})}{2} \right)^{(k-1)/r} \times$$

$$\times \frac{\| \varphi_{r-k} \|_1}{\| \varphi_r \|_\infty^{(r-k+1)/r}} \| x \|_\infty^{(r-k+1)/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(k-1)/r}. \tag{30}$$

Кроме того, для любой функции $x \in L_\infty^r$ при $k \ge 2$

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \frac{\nu(x^{(k)})}{2} \frac{\| \varphi_{r-k} \|_1}{\| \varphi_r \|_\infty^{(r-k+1)/r}} \| x \|_\infty^{(r-k+1)/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(k-1)/r}. \tag{31}$$

Неравенства (28) – (31) являются точными.

Отметим, что неравенство (29) является частным случаем неравенства (26). Здесь оно включено для полноты картины, а также потому, что в отличие от неравенства (26) легко следует из (9).

В неравенствах (30) и (31) $\left\| x^{(k)} \right\|_1$ оценивается через $\| x \|_\infty$ и $\left\| x^{(r)} \right\|_\infty$ в одинаковых степенях. Однако, в них по-разному учитывается число перемен знака производных функции x, и нетрудно привести примеры функций, для которых (30) дает лучшую оценку $\left\| x^{(k)} \right\|_1$, чем (31), и наоборот.

С помощью неравенства (26) устанавливается более общее, по сравнению с (28) и (30), неравенство. Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, и $p \in [1, \infty]$. Тогда для любой функции $x \in L_1^{r+1}$

$$\left\| x^{(k)} \right\|_1 \le \left(\frac{\nu(x')}{2} \right)^{(1-1/p)(r-k+1)/(r+1/p)} \left(\frac{\nu(x^{(r+1)})}{2} \right)^{(k-1+1/p)/(r+1/p)} \times$$

$$\times \frac{\| \varphi_{r-k} \|_1}{\| \varphi_r \|_p^{(r-k+1)/(r+1/p)}} \| x \|_p^{(r-k+1)/(r+1/p)} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(k-1+1/p)/(r+1/p)}. \tag{32}$$

Неравенство (32) является точным.

Отметим еще два неравенства. Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $r/2 < k < r$, и $p \in [1, \infty]$. Тогда для любой функции $x \in L_1^{r+1}$ справедливо неравенство

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \le \left(\frac{\nu(x')}{2} \right)^{(1-1/p)(r-k+1/2)/(r+1/p)} \left(\frac{\nu(x^{(r+1)})}{2} \right)^{1/2-(r-k+1/2)/(r+1/p)} \times$$

$$\times \frac{\| \varphi_{r-k} \|_2}{\| \varphi_r \|_p^{(r-k+1/2)/(r+1/p)}} \| x \|_p^{(r-k+1/2)/(r+1/p)} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{1-(r-k+1/2)/(r+1/p)}. \tag{33}$$

Кроме того, для $x \in L_\infty^r$

$$\left\| x^{(k)} \right\|_2 \le \left(\frac{\nu(x^{(2k-r)})}{2} \right)^{1/2} \frac{\| \varphi_{r-k} \|_2}{\| \varphi_r \|_\infty^{(r-k+1/2)/r}} \| x \|_\infty^{(r-k+1/2)/r} \left\| x^{(r)} \right\|_\infty^{(k-1/2)/r}. \qquad (34)$$

Неравенства (33), (34) являются точными.

По поводу сравнения неравенств (33) (при $p = \infty$) и (34) можно сделать те же замечания, что и по поводу сравнения неравенств (30) и (31). В работе [68] приведены также некоторые другие неравенства типа (27).

5. Связи неравенств типа Колмогорова с задачами аппроксимации. При решении ряда экстремальных задач теории приближений выяснилось, что они тесно связаны с точными неравенствами вида (1) – (3). Важную роль в этом плане сыграли работы [37, 39], посвященные методу промежуточного приближения, и работы [69, 70] о приближении неограниченных операторов ограниченными. Исследованию этих связей посвящены работы [71, 72] (для функций, заданных на R или R_+) и [30, 46] (для периодических функций).

Мы ограничимся обсуждением связей неравенств типа Колмогорова с задачами аппроксимации функциональных классов и приведем две теоремы, которые являются основой таких приложений. Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $p, q, s \in [1, \infty]$, $N \in R_+$. Положим

$$W_p^k := \left\{ x \in L_p^k(\mathbf{T}) \colon \left\| x^{(k)} \right\|_p \le 1 \right\}, \qquad W_p^0 := \left\{ x \in L_p(\mathbf{T}) \colon \| x \|_p \le 1 \right\}$$

и

$$E\left(W_q^k, NW_p^r\right)_s := \sup_{x \in W_q^k} \inf_{u \in NW_p^r} \| x - u \|_s.$$

Пусть для любой полунормы ψ на $L_s(\mathbf{T})$ и подмножества $A \subset L_s(\mathbf{T})$

$$\psi(A) := \sup\{ \psi(x) \colon x \in A \}.$$

Теорема 1. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$; $k = 1, \ldots, r-1$; $\alpha \in (0, 1)$, $N > 0$, $p, q, s \in [1, \infty]$. *Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) *для любой функции* $x \in L_{s'}^r(\mathbf{T})$

$$E_0(x^{(r-k)})_{q'} \le K E_0(x)_{p'}^{\alpha} \left\| x^{(r)} \right\|_{s'}^{1-\alpha};$$

2) *для любого* $N > 0$

$$E\left(W_q^k, NW_p^r\right)_s \le \frac{1-\alpha}{\alpha} \left(\frac{N^\alpha}{K\alpha} \right)^{-1/(1-\alpha)};$$

3) *для любой полунормы* ψ *на* $L_s(\mathbf{T})$

$$\psi\left(W_q^k\right)_s \le K \psi^\alpha\left(W_p^r\right) \psi^{1-\alpha}\left(W_s^0\right);$$

4) *для любой функции* $x \in W_q^k$ *и любого* $t > 0$

$$\inf_{x_1 \in L_p^r(\mathbf{T})} \left\{ \| x - x_1 \|_s + t \left\| x_1^{(r)} \right\|_p \right\} \le K t^\alpha.$$

Эквивалентность утверждений 1 – 3 этой теоремы доказана А. А. Лигуном (см. [9], теорема 6.1.1). Четвертое утверждение добавлено В. Ф. Бабенко, В. А. Кофановым и С. А. Пичуговым [53].

Следующая теорема [73, 74] дает описание связи с другими задачами неравенств типа Колмогорова для опорных функций выпуклых множеств.

Пусть X — вещественное линейное пространство, θ_X — нуль в X, $p(x)$ — некоторая (вообще говоря, несимметричная) норма на X, $H_{X,p} := \{x \in \in X\colon p(x) \le\le 1\}$, $X'(p)$ — пространство линейных ограниченных (относительно p) функционалов на X, $\langle x, y\rangle$ — значение функционала $y \in X'(p)$ на элементе $x \in X$, $p^*(y) := \sup\{\langle x, y\rangle\colon x \in H_{X,p}\}$ — (несимметричная) норма в $X'(p)$. Отметим, что если X — нормированное пространство и $p(x) = \|x\|_X$, то $X'(p) = X^*$, где X^* — пространство всех линейных ограниченных функционалов на X.

Пусть для $M, M_1 \subset X$, $x \in X$, $y \in X'(p)$ и произвольного сублинейного функционала ψ на X

$$S_M(y) := \sup\{\langle x, y\rangle\colon x \in M\}$$

— опорная функция множества M,

$$M^0 := \{y \in X'(p)\colon S_M(y) \le 1\}, \qquad E(x, M_1)_{X,p} := \inf\{p(x-u)\colon u \in M_1\},$$

$$E(M, M_1)_{X,p} := \sup\{E(x, M_1)_{X,p}\colon x \in M\}, \qquad \psi(M) := \sup\{\psi(x)\colon x \in M\}.$$

Если $H_1, \ldots, H_m \subset X$, то для $x \in X$ и любого $t \in (t_1, \ldots, t_m) \in R_+^m$ положим

$$K_p(X; H_1, \ldots, H_m; x; t) := \inf_{\substack{x_j \in \operatorname{cone} H_j \\ j=1,\ldots,m}} \left\{ p\left(x - \sum_{j=1}^m x_j\right) + \sum_{j=1}^m t_j S_{H_j^0}(x_j) \right\}.$$

Через $\mathcal{F}_m$ будем обозначать множество полунепрерывных снизу, выпуклых вверх функций $\Phi\colon R_+^m \in R_+$. Для $\Phi \in \mathcal{F}_m$ положим $\overline{\Phi}(z) = -\Phi(z)$, если $z \in R_+^m$, и $\overline{\Phi}(z) = +\infty$, если $z \notin R_+^m$. Пусть также $\overline{\Phi}^*$ — преобразование Лежандра функции $\overline{\Phi}$, т. е. $\overline{\Phi}^*(y) := \sup\left\{\langle x, y\rangle - \overline{\Phi}(x)\colon x \in R^m\right\}$, $y \in R^m$, а $\sum_{j=1}^m N_j H_j$ — алгебраическая сумма множеств $N_j H_j$.

Теорема 2. *Пусть $H_1, \ldots, H_m$ — произвольные выпуклые множества в X, содержащие θ_X; $\Phi \in \mathcal{F}_m$. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

1) *для любого $x \in X'(p)$ такого, что $p^*(x) \ne 0$,*

$$S_H(x) \le p^*(x)\Phi\left(\frac{S_{H_1}(x)}{p^*(x)}, \ldots, \frac{S_{H_m}(x)}{p^*(x)}\right);$$

2) *для любых $x \in X'(p)$ и $N = (N_1, \ldots, N_m) \in R_+^m$*

$$S_H(x) \le \overline{\Phi}^*(-N)p^*(x) + \sum_{j=1}^m N_j S_{H_j}(x);$$

3) *для любого $N = (N_1, \ldots, N_m) \in R_+^m$*

$$E\left(H; \sum_{j=1}^{m} N_j H_j\right)_{X,\,p} \le \overline{\Phi}^*(-N);$$

4) *для любого сублинейного функционала* ψ *на* X, *для которого величины* $\psi(H_{X,\,p})$, $\psi(H_j)$, $j = 1, \ldots, m$, *конечны, и для любого* $N \in R_+^m$

$$\psi(H) \le \overline{\Phi}^*(-N)\psi(H_{X,\,p}) + \sum_{j=1}^{m} N_j \psi(H_j);$$

5) *для любого функционала* ψ, $\psi \ne 0$, *из п.* 4

$$\psi(H) \le \psi(H_{X,\,p})\Phi\left(\frac{\psi(H_1)}{\psi(H_{X,\,p})}, \ldots, \frac{\psi(H_m)}{\psi(H_{X,\,p})}\right);$$

6) *для любых* $z \in H$ *и* $t \in R_+^m$

$$K(X; H_1, \ldots, H_m; z; t) \le \Phi(t).$$

Утверждения 1 и 2 этой теоремы — это абстрактные версии неравенства типа Колмогорова в мультипликативной и аддитивной форме соответственно. Утверждение 3 — оценка приближения класса классом. Утверждения 4 и 5 — абстрактные версии неравенств для верхних граней полунорм. Наконец, утверждение 6 — это оценка на классе H характеристики типа K-функционала m-ки пространств.

6. Применения в теории аппроксимации. Приложения неравенств типа Колмогорова, основанные на теоремах 1, 2, достаточно подробно описаны, например, в работах [9, 36, 41, 53 – 55]. Здесь мы ограничимся тем, что приведем несколько следствий из неравенств, приведенных в п. 2. С помощью неравенств (13) – (15) и теоремы 1 устанавливаются следующие оценки приближения класса классом.

Пусть $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, и $p \in [1, \infty]$. Тогда для любого $N > 0$

$$E\left(W_1^k, NW_p^r\right)_1 \le \frac{r-k+1/p'}{k} \frac{\left(\|\varphi_k\|_\infty \dfrac{k}{r+1/p'}\right)^{(r+1/p')/(r-k+1/p')}}{\|\varphi_r\|_{p'}^{k/(r-k+1/p')}} N^{-k/(r-k+1/p')} \tag{35}$$

(как обычно $p' = p/(p-1)$). Константа при $N^{-k/(r-k+1/p')}$ неулучшаема.

Пусть $r, k \in \mathbf{N}$, $k < r$, и $p \in [1, \infty]$. Тогда для любого $N > 0$

$$E\left(W_1^k, NW_p^r\right)_\infty \le$$

$$\le \frac{r-k+1/p'}{k} \frac{\left(\|g_k\|_\infty \dfrac{k-1}{r-1+1/p'}\right)^{(r-1+1/p')/(r-k+1/p')}}{\|g_r\|_{p'}^{(k-1)/(r-k+1/p')}} N^{-(k-1)/(r-k+1/p')}.$$

Константа при $N^{-(k-1)/(r-k+1/p')}$ неулучшаема.

Пусть $r, k \in \mathbf{N}$, $k < r/2$, и $p \in [1, \infty]$. Тогда для любого $N > 0$

$$E\left(W_2^k, NW_p^r\right)_\infty \le \frac{r-k-1/2+1/p'}{k-1/2}\times$$

$$\times\frac{\left(\| g_k \|_2 \dfrac{k-1/2}{r-1+1/p'}\right)^{(r-1+1/p')/(r-k+1/p'-1/2)}}{\| g_r \|_{p'}^{(k-1/2)/(r-k-1/2+1/p')}} N^{-(k-1/2)/(r-k+1/p'-1/2)}.$$

Константа при $N^{-(k-1/2)/(r-k+1/p'-1/2)}$ неулучшаема.

С помощью неравенства (12) получаем следующую оценку.

Пусть $r, k \in \mathbf{N}$, $k \le r/2$. Тогда для любого $N > 0$

$$E\left(W_2^{k-1/2}, NW_1^r\right)_\infty \le \frac{r-k+1/2}{r}\times$$

$$\times \left\| \varphi_{k-1/2} \right\|_{L_2(\mathbf{T})}^{r/(r-k-1/2)} \left(\frac{k-1/2}{rN\| \varphi_r \|_{L_\infty(\mathbf{T})}}\right)^{(k-1/2)/(r-k-1/2)}. \tag{36}$$

Хорошо известно, (см., например, [8], гл. 4, 5) что для $r, n \in \mathbf{N}$

$$E\left(W_p^r, H\right)_1 \le \left\| \varphi_{n,r} \right\|_{L_{p'}(\mathbf{T})} = \frac{\| \varphi_r \|_{L_{p'}(\mathbf{T})}}{n^r}, \tag{37}$$

где H есть $\mathcal{T}_{2n-1}$ (множество тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$) или $S_{2n,\mu}$, $\mu \in \mathbf{N}$, $\mu \ge r-1$ (множество полиномиальных сплайнов порядка μ, дефекта 1, с узлами в точках $\nu\pi/n$, $\nu \in \mathbf{Z}$), $p' = p/(p-1)$. Для дробных r неравенство (37) известно только для $H = \mathcal{T}_{2n-1}$ и $p = 1$ (см. [8, с. 171, 172]).

Используя соотношения (36), (37) и метод промежуточного приближения, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $k, n \in \mathbf{N}$, H есть $\mathcal{T}_{2n-1}$ или $S_{2n,\mu}$, $\mu \ge 2k-2$. Тогда*

$$E\left(W_2^{k-1/2}, H\right)_1 \le \left\| \varphi_{n,k-1/2} \right\|_{L_2(\mathbf{T})} = \frac{\left\| \varphi_{k-1/2} \right\|_{L_2(\mathbf{T})}}{n^{k-1/2}}.$$

7. Исследование экстремальных свойств полиномов и сплайнов. Как и выше, обозначим через $S_{n,r}$ $(n, r \in \mathbf{N})$ множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, дефекта 1, с узлами в точках $\nu\pi/n$, $\nu \in \mathbf{Z}$, а через $\mathcal{T}_n$ множество тригонометрических полиномов порядка не выше n. Приведем неравенства типа Бернштейна – Никольского для сплайнов и полиномов, которые устанавливаются с помощью неравенств из п. 2 и в определенном смысле являются неулучшаемыми. Мы ограничимся описанием приложений только неравенств (13) – (15). По поводу известных точных неравенств типа Бернштейна – Никольского для полиномов и сплайнов сошлемся на монографии [6] (гл. 3, 6), [7] (гл. 3, 6) и [75].

Пусть $n, k \in \mathbf{N}$ и $p \in [1, \infty)$. Тогда

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{\substack{T_n \in \mathcal{T}_n \\ T_n \ne 0}} \frac{\left\| T_n^{(k)} \right\|_\infty}{n^{k+1/p} \| T_n \|_p} = \frac{1}{\| \cos(\cdot) \|_p}.$$

Аналогичный результат справедлив для сплайнов. Пусть $n, r, k \in \mathbf{N}$, $k < r$, и $p \in [1, \infty)$. Тогда

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} \sup_{\substack{s \in S_{n,r} \\ s \neq 0}} \frac{\|s^{(k)}\|_\infty}{n^{k+1/p}\|s\|_p} = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_p}.$$

В следующих утверждениях содержатся точные неравенства типа Никольского разных метрик для тригонометрических полиномов и 2π-периодических полиномиальных сплайнов, доказанные с помощью неравенств (18) – (21). Некоторые известные результаты в этом направлении можно найти в [6] (гл. 3), [7] (гл. 3) и [75].

Пусть $p, q \in (0, \infty]$, $q > p$. Тогда

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} \sup_{\substack{T_n \in \mathcal{T}_n \\ T_n \neq 0}} \frac{\|T_n\|_q}{n^{1/p-1/q}\|T_n\|_p} = \sup_{c \in [0,1]} \frac{\|\cos(\cdot)+c\|_q}{\|\cos(\cdot)+c\|_p}.$$

Если $m = p+1$ или $m = \infty$, то

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} \sup_{\substack{T_n \in \mathcal{T}_n \\ T_n \neq 0}} \frac{\|T_n - c_m(T_n)\|_q}{n^{1/p-1/q}\|T_n - c_m(T_n)\|_p} = \frac{\|\cos(\cdot)\|_q}{\|\cos(\cdot)\|_p}.$$

Кроме того,

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} \sup_{\substack{T_n \in \mathcal{T}_n \\ T_n \neq 0}} \frac{E_0^{\pm}(T_n)_q}{n^{1/p-1/q} E_0^{\pm}(T_n)_p} = \frac{\|\cos(\cdot)+1\|_q}{\|\cos(\cdot)+1\|_p}.$$

Аналогичные результаты имеют место для сплайнов. Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p, q \in \in (0, \infty]$, $q > p$. Тогда

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} \sup_{\substack{s \in S_{n,r_n} \\ s \neq 0}} \frac{\|s\|_q}{n^{1/p-1/q}\|s\|_p} = \sup_{c \in [0, \|\varphi_r\|_\infty]} \frac{\|\varphi_r(\cdot)+c\|_q}{\|\varphi_r(\cdot)+c\|_p}.$$

Если $m = p+1$ или $m = \infty$, то

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} \sup_{\substack{s \in S_{n,r} \\ s \neq 0}} \frac{\|s - c_m(s)\|_q}{n^{1/p-1/q}\|s - c_m(s)\|_p} = \frac{\|\varphi_r\|_q}{\|\varphi_r\|_p}$$

и

$$\sup_{n \in \mathrm{N}} \sup_{\substack{s \in S_{n,r} \\ s \neq 0}} \frac{E_0^{\pm}(s)_q}{n^{1/p-1/q} E_0^{\pm}(s)_q} = \frac{\|\varphi_r - \|\varphi_r\|_\infty\|_q}{\|\varphi_r - \|\varphi_r\|_\infty\|_p}.$$

Приложения несколько иного типа неравенств типа Колмогорова к исследованию экстремальных свойств сплайнов даны в работе [76].

8. Другие результаты о неравенствах типа Колмогорова. Здесь мы только укажем другие направления исследований днепропетровских математиков, связанные с получением точных неравенств типа Колмогорова для функций одной и многих переменных, и приведем соответствующие ссылки. Прежде всего, отметим статьи [54, 55, 77], в которых в той или иной мере отражены все эти направления исследований.

В работах [78, 28, 79] изучается задача о точных постоянных в аддитивных неравенствах для промежуточных производных функций, заданных на конечном интервале. В работах [80, 81] аналогичные вопросы рассматриваются для дифференцируемых отображении банаховых пространств и, в частности, для функций многих переменных. В [82] получено точное неравенство типа Хермандера для функций, заданных на полуоси. В [83 – 85] изучается связь точных констант в неравенствах типа Колмогорова для периодических и непериодических функций. Наконец, работы [86 – 89, 73] связаны с нахождением точных констант в неравенствах типа Колмогорова для функций многих переменных.

1. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Contribution to the arithmetic theory of series // Proc. London Math. – 1912.– **11**, № 2. – P. 411 – 478.
2. *Landau E.* Einige Ungleichungen fur zweimal differenzierbare Functionen // Ibid. – 1913. – **13**.– P. 43 – 49.
3. *Hadamard J.* Sur le module maximum d'une fonction et de ses derivees // C. r. Soc. Math. France. – 1914. – **41**. – P. 68 – 72.
4. *Колмогоров А. Н.* Избранные труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – 470 с.
5. *Боссе Ю. Г. (Шилов Г. Е.)* О неравенствах между производными // Сб. работ студ. науч. кружков Моск. ун-та. – 1937. – С. 17 – 27.
6. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев:Наук. думка, 1992. – 304 с.
7. *Korneichuk N. P., Ligun A. A., Babenko V. F.* Extremal properties of polynomials and splines. – New York: Nova Sci., 1996. – 434 p.
8. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
9. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.
10. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 267 с.
11. *Лигун А. А.* Точные неравенства для верхних граней полунорм на классах периодических функций // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 5. – С. 647 – 654.
12 *Лигун А. А.* Точные константы в неравенствах типа Джексона // Специальные вопросы теории приближений и оптимального управления распределенными системами. – Киев: Выща шк., 1990. – С. 5 – 74.
13. *Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G.* Inequalities. – Cambridge, 1934.
14. *Stein E. M.* Functions of exponential type // Ann. Math. – 1957.– **65**, № 3. – P. 582 – 592.
15. *Тайков А. Г.* Неравенства типа Колмогорова и наилучшие формулы численного дифференцирования // Мат. заметки. – 1968. – **4**, № 5. – С. 233 – 238.
16. *Маторин А. П.* О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой // Укр. мат. журн. – 1955. – **5**, № 3. – С. 262 – 266.
17. *Shoenberg I. J., Cavaretta A.* Solution of Landau's problem, concerning higher derivatives on halfline // Proc. Conf. Approxim. Theory (Varna, Sofia). – 1972. – P. 297 – 308.
18. *Любич Ю. И.* О неравенствах между степенями линейного оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – **24**. – С. 825 – 864.
19. *Купцов Н. П.* Колмогоровские оценки для производных в $L_2[0, \infty)$ // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **138**. – С. 94 – 117.
20. *Габушин В. Н.* О наилучшем приближении оператора дифференцирования на полупрямой // Мат. заметки. – 1969. – **6**, № 5. – С. 573 – 582.
21. *Арестов В. В., Габушин В. Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 44 – 66.
22. *Kwong M. K., Zettl A.* Norm inequalities for derivatives and differences // Lect. Notes Math. – 1992. – **1536**. – 150 p.
23. *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // Комментарии к избранным трудам А. Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1985. – С. 387 – 390.
24. *Mitrinović D. S., Pečharić J. E., Fink A. M.* Inequalities involving functions and their integrals and derivatives. – Dordrecht: etc.: Kluver Acad. Publ., 1991. – 587 p.

25. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. I // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1980. – **156**. – С. 22 – 29.
26. *Буренков В. И.* О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале. II // Там же. – **173**. – С. 38 – 49.
27. *Shadrin A. Yu.* To the Laridau – Kolmogorov problem on a finite interval // Open Problems in Approxim. Theory (Proc. Int. Conf. Voneshta Voda. June 18–24, 1993). – 1993. – P. 192 – 204.
28. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных функций, заданных на конечном интервале // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 5. – С. 619 – 628.
29. *Габушин В. Н.* Неравенства для норм функции и ее производных в метриках L_p // Мат. заметки. – 1967. – № 3. – С. 291 – 298.
30. *Клоц Б.Е.* Приближения дифференцируемых функций функциями большей гладкости // Там же. – 1977. – **21**, № 1. – С. 21 – 32.
31. *Hormander L.* A new proof and generalization of inequality of Bohr // Math. scand. – 1954. – **2**. – P. 33 – 45.
32. *Sharma A., Tzimbalario T.* Landau-type inequalities for some linear differential operators // Ill. J. Math. – 1976. – **20**, № 3. – P. 443 – 455.
33. *Нгуен Тхи Тхиеу Хоа.* Об одной экстремальной задаче для классов сверток, не увеличивающих осцилляцию // Вестн. Моск. ун-та. Мат., мех. – 1982.– **5**. – С. 3 – 7.
34. *Yongshen Syn.* Inequalities of Landau – Kolmogorov type for some linear differential operators // Kexue Tongbao. – 1985. – **30**, № 8. – P. 995 – 998.
35. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и неравенства для перестановок // Докл. АН СССР. – 1986. – **290**, № 5. – С. 1033 – 1036.
36. *Бабенко В. Ф.* Экстремальные задачи теории приближения и несимметричные нормы: Дис. … д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1989. – 275 с.
37. *Корнейчук Н. П.* О наилучшем равномерном приближении на некоторых классах непрерывных функций // Докл. АН СССР. – 1961. – **140**, № 4. – С. 748 – 751.
38. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные значения функционалов и наилучшие приближения на классах периодических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971.– **35**, № 1. – С. 93 – 124.
39. *Корнейчук Н. П.* Неравенства для дифференцируемых периодических функций и наилучшее приближение одного класса функций другим // Там же. – 1972. – **36**, № 2. – С. 423 – 434.
40. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для верхних граней функционалов и некоторые их применения в теории аппроксимации // Допов. НАН України. – 1999. – № 1. – С. 24 – 29.
41. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О неравенствах для верхних граней функционалов на классах W^rH^ω и некоторых их приложениях // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 1. – С. 66 – 84.
42. *Шадрин А. Ю.* Неравенства типа Колмогорова и оценки сплайн-интерполяции для периодических функций класса W_2^m // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 4. – С. 132 – 139.
43. *Certain M. W., Kurtz T. G.* Landau–Kolmogorov inequalities for semigroups and group // Proc. Amer. Math. Soc. – 1977. – **63**. – P. 226 – 230.
44. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Замечание к неравенству А. Н. Колмогорова // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. – Днепропетровск: Днепропетр. ун -т, 1980. – С. 14 – 17.
45. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Об одном приеме Стейна // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1991. – С. 7 – 10.
46. *Ligun A. A.* Inequalities for upper bounds of functionals // Analysis Math. – 1976. – **2**, № 1. – P. 11 – 40.
47. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные экстремальные задачи теории приближения // Докл. АН СССР. – 1983. – **269**, № 3. – С. 521 – 524.
48. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства для норм сопряженных функций и их применения // Укр. мат. журн. – 1987. – **39**, № 2. – С. 139 – 144.
49. *Бабенко В. Ф.* Точные неравенства для норм промежуточных производных полуцелого порядка и некоторые их приложения // Допов. НАН України. – 1997. – № 2. – С. 23 – 26.
50. *Babenko V. F.* Exact inequalities for norms of intermediate derivatives of half-integer order and some of their applications // Approxim. Theory and Appl. – Palm Harbor (USA): Hadronic Press, 1998. – P. 5 – 16.

51. *Бабенко В. Ф., Глушко В. Н.* Некоторые точные неравенства для L_1-норм сопряженных функций и их приложения // Современные вопросы теории приближения и комплексного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 5 – 12.
52. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Некоторые новые точные неравенства типа Колмогорова для периодических функций // Допов. НАН України. – 1998. – № 7. – С. 7 – 10.
53. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their applications // E. J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 351 – 376.
54. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Proc. third Int. Conf. Functional Analysis and Approxim. Theory (Acquafreda di Maratea (Potenza-Italy), September 23–28, 1996, Vol. I): Suppl. Rend. Cir. mat. Palermo. Ser. II. – 1998. – № 52. – P. 223 – 237.
55. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* On the exact unequalities of Kolmogorov type and some of their applications // New Approaches in Nonlinear Analysis. – Palm Harbor (USA): Hadronic Press, 1999. – P. 9 – 50.
56. *Sz.-Nagy B.* Uber Integralungleichungen zwischen einer Function und ihrer Ableitungee // Acta Sci. math. – 1941. – **10**. – P. 64 – 74.
57. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства типа Надя для периодических функций // Тез. докл. Междунар. конф. „Теория приближений и гармонический анализ" (Россия, Тула, 26–29 мая 1998 г.). – Тула, 1998. – С. 29.
58. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства типа Надя для периодических функций // Сучасні проблеми математики: Мат. Міжнар. наук. конф. (Чернівці; Київ). – 1998. – Ч. 1. – С. 9 – 11.
59. *Babenko V. F.* Inequalities of Landau – Kolmogorov – Nagy type // Int. Congr. Math. (Berlin, August 18–27, 1998): Abstrs Short Communications and Poster Sessions. – 1998. – P. 115.
60. *Бабенко В. Ф., Вакарчук М. Б.* О неравенствах типа Колмогорова – Хермандера для функций, ограниченных на дискретной сетке // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 7. – С. 988 – 992.
61. *Габушин В. Н.* Некоторые неравенства между производными функций // Методы регуляризации неустойчивых задач. – 1976. – С. 20 – 26. – (Тр. ИММ УНЦ АН СССР; Вып. 23).
62. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Колмогорова в случае малых гладкостей // Допов. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 11 – 15.
63. *Арестов В. В., Бердышев В. И.* Неравенства для дифференцируемых функций // Методы решения условно-корректных задач. – 1975. – С. 108 – 138. – (Тр. ИММ УНЦ АН СССР; Вып. 17).
64. *Арестов В. В.* О точных неравенствах между нормами функций и их производных // Acta sci math. – 1972.– **33**, № 3 – 4. – P. 243 – 267.
65. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Некоторые точные неравенства типа Колмогорова для периодических функций // Ряди Фур'є: Теорія і застосування. – (Пр. Ін-ту математики НАН України; Т. 20) – 1998. – С. 30 – 42.
66. *Лигун А. А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций // Мат. заметки. – 1983. – **33**, № 3. – С. 385 – 391.
67. *Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Неравенства типа Бернштейна для L-сплайнов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 1. – С. 10 – 20.
68. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Колмогорова, учитывающих число перемен знака производных // Допов. НА України. – 1998. – № 8.– С. 12 – 16.
69. *Стечкин С. Б.* Неравенства между нормами производных произвольной функции // Acta sci. math. – 1965. – **26**.– P. 225 – 230.
70. *Стечкин С. Б.* Наилучшее приближение линейных операторов // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 2. – С. 137 – 148.
71. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Там же. – С. 155 – 162.
72. *Арестов В. В.* О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной //Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1975. – **138**. – С. 3 – 26.
73. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Multivariate inequalities of Kolmogorov type and their applications // Proc. Mannheim Conf. „Multivariate Approximation and Splines, 1996" / G. Nurnberger, J. V. Schmidt and G.Walz (eds.). – 1997. – P. 1 – 12.
74. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства типа Колмогорова для операторов и экстремальные задачи теории приближений // Докл. РАН. – 1997. – **356**, № 4. – С. 439 – 441.

75. *Milovanović G. V., Mitrinović D. S., Russias Th. M.* Topics in polynomials: extremal problems, inequalities, zeros. – Singapore etc.: World Sci. Publ., 1994. – 821 p.
76. *Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Обобщение некоторых экстремальных свойств сплайнов // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 3. – С. 403 – 407.
77. *Babenko V. F.* Inequalities for norms of intermediate derivatives and some their applications // Recent Progress in Inequalities. – Kluwer Acad. Publ., 1998. – P. 77 – 96.
78. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О неравенствах для производных на отрезке // Теорія наближення та задачі обчислювальної математики. – Дніпропетровськ, 1993. – С. 12.
79. *Бабенко В. Ф., Уэдраого Ж. Б.* О точных константах в неравенствах для норм производных на конечном отрезке // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 1. – С. 117 – 119.
80. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах для промежуточных производных дифференцируемых отображений банаховых пространств // Допов. НАН України. – 1997. – № 1. – С. 22 – 25.
81. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Об аддитивных неравенствах для промежуточных производных дифференцируемых отображений банаховых пространств // Мат. заметки. – 1998. – **63**, вып. 3. – С. 332 – 342.
82. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Ландау – Колмогорова – Хермандера на полуоси // Допов. НАН України. – 1997. – № 4. – С. 34 – 38.
83. *Бабенко В. Ф., Селиванова С. А.* Связь между неравенствами типа Колмогорова для периодических и непериодических функций // Тез. допов. II школи „Ряди Фур'є: Теорія і застосування" (Кам'янець-Подільський, 30 червня – 5 липня 1997 р.).– Київ, 1997. – С. 19 – 20.
84. *Бабенко В. Ф., Селиванова С. А.* О неравенствах типа Колмогорова для периодических и непериодических функций // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: Дніпропетр. ун-т, 1998. – С. 91 – 95.
85. *Бабенко В. Ф., Селиванова С. А.* О связи между некоторыми неравенствами типа Колмогорова для периодических и непериодических функций // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 2. – С. 147 – 157.
86. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* On inequalities of Landau–Hadamard–Kolmogorov type for the L_2-norm of intermediate derivative // E. J. Approxim. – 1996. – **2**, № 3. – P. 343 – 368.
87. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* О точных неравенствах типа Ландау – Адамара – Колмогорова для функций многих переменных // Докл. РАН. – 1997. – **356**, № 1. –С. 7 – 9.
88. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Exact inequalities of Kolmogorov type for multivariate functions and their applications // E. J. Approxim. – 1997. – **3**, № 2. – P. 155 – 186.
89. *Babenko V. F.* Exact inequalities of Kolmogorov type and some of their applications // Abstrs Int. Conf. Approxim. Theory and its Appl. dedicated to the memory of V. K. Dzyadyk. – Kyiv, 1999. – P. 9 – 10.

Получено 13.10.99