УДК 519.21

С. М. Малинский

Допустимые сдвиги меры Коши

Пусть μ — мера в линейном пространстве $(X, \mathfrak{B})$, μ_a — мера, определенная следующим образом. Для каждого $A \in \mathfrak{B}$ $\mu_x\ \{A\} = \mu\{x : x + a \in A\}$. a называется допустимым сдвигом, если мера μ_a абсолютно непрерывна относительно меры μ; записывается это так: $\mu_a \ll \mu$. Общие теоремы о допустимых сдвигах, а также описание допустимых сдвигов некоторых мер можно найти в [1], [2.]

В настоящей работе изучаются допустимые сдвиги сферически симметричного распределения Коши в R^∞, затем полученный результат применяется для меры Коши в гильбертовом пространстве.

Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ последовательность одинаково распределенных случайных величин таких, что для любого k характеристическая функция распределения вектора $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$ имеет вид

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots, z_k) = \exp\left\{-\left(\sum_{i=1}^{k} z_i^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Обозначим меру в R^∞, соответствующую распределению $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$, через P; меру, соответствующую распределению $\{\xi_n+a_n\}_{n=1}^\infty$, через P_a (P_a — сдвинутая мера). Покажем, что при выполнении условия $\sum_{k=1}^\infty a_k^2<\infty$ сдвиг $a=(a_1, a_2, \dots)$ — допустимый. Воспользуемся следующим достаточным условием допустимости сдвига (см. [1, с. 547]). Пусть $f(t, t_2, \dots t_n)$ — плотность конечномерного распределения меры, $f(t_1, t_2, \dots t_n)$ — положительна и дифференцируема, $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n; a_1, a_2, \dots, a_n)=\left(\sum_{k=1}^n f'_{t_k}a_k\right)/f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, тогда $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — допустимый сдвиг, если существует такое δ, что

$$\sup_n \int \exp\{\delta\,|h_n|\}\,P_n(dx)<\infty,$$

P_n — конечномерные проекции меры P, $x=(x_1, x_2, \dots x_n)$. Плотность f_n меры P_n, соответствующей характеристической функции $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n)$, имеет вид (многомерное распределение Коши) $f_n(\rho)=\pi^{-(n+1)/2}(\Gamma((n+1)/2))/ /(1+\rho^2)^{(n+1)/2}$; $\rho=(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$.

Заметим, что в силу сферической симметрии нас интересует не направление сдвига, а расстояние, на которое сдвигается мера. Направление выбирается удобное для счета. Пусть $a_k=\sqrt{b/n}$; $k=1, 2, \dots n$. Проверка достаточного условия заключается в получении равномерной по n оценки следующего интеграла:

$$\int \exp\left\{\left(\delta\sum_{k=1}^n f'_n(\rho)\frac{x_k}{\rho}\,a_k\right)/f_n(\rho)\right\} f_n(\rho)\,dx.$$

Подынтегральную функцию оценим функцией, зависящей только от ρ. Из того, что $|f'_n(\rho)/f_n(\rho)|=(n+1)\rho/2(1+\rho^2)<n$, следует, что $\exp\{\dots\}$ под знаком интеграла можно разложить в ряд и интегрировать почленно:

$$\int \exp\left\{\left(\delta\sum_{k=1}^n f'_n(\rho)\frac{x_k}{\rho}\,a_k\right)/f_n(\rho)\right\} f_n(\rho)\,dx=$$

$$=\int\prod_{k=1}^n\left[\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{j!}\left(\delta\,\frac{f'_n(\rho)}{f_n(\rho)}\,\frac{x_k}{\rho}a_k\right)^j\right]f_n(\rho)\,dx=$$

$$=\int\prod_{k=1}^n\left[\sum_{i=0}^\infty\frac{1}{(2i)!}\left(\delta\,\frac{f'_n(\rho)}{f_n(\rho)}\,\frac{x_k}{\rho}\,a_k\right)^{2i}\right]f_n(\rho)\,dx=$$

$$=\int\left[\prod_{k=1}^n\left(\frac{1}{2}\left[\exp\left\{-\delta\frac{f'_n(\rho)}{f_n(\rho)}\,\frac{x_k}{\rho}\,a_k\right\}+\exp\left\{-\delta\,\frac{f'_n(\rho)}{f_n(\rho)}\,\frac{x_k}{\rho}\,a_k\right\}\right]\right)\right]\times$$

$$\times f_n(\rho)\,dx\leqslant\int\left(\prod_{k=1}^n\left[\exp\left\{\delta^2\,\frac{b}{n}\left(\frac{f'_n(\rho)}{f_n(\rho)}\right)^2\frac{x_k^2}{\rho^2}\right\}\right]\right)f_n(\rho)\,dx=$$

$$=\int\exp\left\{\delta^2\frac{b}{n}\sum_{k=1}^n\left(\frac{f'_n(\rho)}{f_n(\rho)}\right)^2\frac{x_k^2}{\rho^2}\right\}f_n(\rho)\,dx=$$

$$=\int\exp\left\{\delta^2\,\frac{b}{n}\left(\frac{f'_n(\rho)}{f_n(\rho)}\right)^2\right\}f_n(\rho)\,dx.$$

Для получения последнего неравенства было использовано неравенство $(e^{-u}+e^{u})/2 \leqslant e^{u^2}$. Проинтегрировав полученное выражение по сфере радиуса ρ, а потом по ρ от 0 до ∞, находим

$$\frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma(n/2)}\int\limits_0^\infty \exp\left\{\delta^2\left(\frac{f_n'(\rho)}{f_n(\rho)}\right)^2\frac{b}{n}\right\} f_n(\rho)\,\rho^{n-1}d\rho =$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\int\limits_0^\infty \exp\left\{\delta^2\,\frac{b}{n}\,\frac{(n+1)^2\rho^2}{(1+\rho^2)^2}\right\}\times$$

$$\times\frac{1}{(1+1/\rho^2)^{(n+1)/2}}\,\frac{1}{\rho^2}\,d\rho.$$

Можно выбрать δ так, чтобы выполнялось $\exp\{b4\delta^2\rho^2(n+1)/(1+\rho^2)^2 n\} < < 1 + 1/\rho^2$, при этом δ от n не зависит. Обе части последнего неравенства возведем в степень $(n+1)/4$, получим $\exp\{b\delta^2(n+1)^2\rho^2/n(1+\rho^2)^2\} < < (1+1/\rho^2)^{(n+1)/4}$. С помощью этого неравенства оценим последний интеграл:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\int\limits_0^\infty \exp\left\{\frac{\delta^2 b(n+1)^2\rho^2}{n(1+\rho^2)^2}\right\}\frac{1}{(1+1/\rho^2)^{(n+1)/2}}\,\frac{1}{\rho^2}\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+1/\rho^2)^{(n+1)/4}}\,\frac{1}{\rho^2}\,d\rho \leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+1/\rho^2)^{[(n-1)/2]+1)/2}}\,\frac{1}{\rho^2}\,d\rho. \qquad (1)$$

Обозначим $[(n-1)/2] = l$, тогда $f_l(\rho) = \Gamma((l+1)/2)/\sqrt{\pi}\,(1+\rho^2)^{(l+1)/2}$ есть плотность меры Коши, определенной в пространстве размерности l, и, значит,

$$\int f_l(\rho)\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma((l+1)/2}{\Gamma(l/2)}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+1/\rho^2)^{(l+1)/2}}\,\frac{1}{\rho^2}\,d\rho = 1. \qquad (2)$$

Поскольку $c_1\sqrt{k} < \Gamma((k+1)/2)/\Gamma(k/2) < c_2\sqrt{k}$, c_1, c_2 — константы, не зависящие от k, то из (2) следует

$$\frac{1}{c_2\sqrt{l}} \leqslant \int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+1/\rho^2)^{(l+1)/2}}\,\frac{1}{\rho^2}\,d\rho \leqslant \frac{1}{c_1\sqrt{l}}\,.$$

Подставив эту оценку в (1), получим

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)}\int\limits_0^\infty \frac{1}{(1+1/\rho^2)^{(l+1)/2}}\,\frac{1}{\rho^2}\,d\rho \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{c_2\sqrt{n}}{c_1\sqrt{l}} < 2\,\frac{c_2}{c_1}\,.$$

Таким образом, интегралы по n равномерно ограничены, следовательно, выполняется достаточное условие допустимости сдвига, и сдвиг $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ при условии $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k^2 < \infty$ допустимый.

Покажем, что сдвиги указанного вида полностью исчерпывают множество допустимых сдвигов.

Сделаем преобразование пространства $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \to \{\lambda_n \xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ при этом абсолютно непрерывные меры переходят в абсолютно непрерывные: $P \to \mu$; $P_a' \to \mu_{\lambda a}$, $P_a \ll P \Rightarrow \mu_{\lambda a} \ll \mu$, $\lambda a = (\lambda_1 a_1, \lambda_2 a_2, \ldots)$. Запишем формально характеристический функционал меры μ: $\varphi_\mu(z) = \exp\left\{-\left[\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (z, e_k)^2\right]^{1/2}\right\}$, где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H, $z \in H$. Мера μ будет сосредоточена в H, если существует ядерный оператор B такой, что $\operatorname{Re} \varphi_\mu(z) \to 1$ при $(Bz, z) \to 0$ (см. [2]). В нашем случае для этого необходимо и достаточно, чтобы оператор B (определяемый мерой μ таким образом; $Be_k = \lambda_k^2 e_k$) был ядерным. Известно [2], что множество допустимых сдвигов M_μ содержится в множестве $B^{1/2}H$. Для меры Коши мы показали обратное включение $M_\mu \supset B^{1/2}H$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Для того чтобы сдвиг $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ сферически симметричного распределения Коши в R^∞ был допустимым, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$.*

Замечание. Если сдвиг не принадлежит множеству $B^{1/2} H$, то сдвинутая мера ортогональна относительно исходной. Так как для меры Коши множество M_μ совпадает с множеством $B^{1/2} H$, то из этого следует, что сдвинутая мера Коши либо ортогональна, либо эквивалентна исходной.

1. *Гихман К. К., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. I.—М.:Наука, 1971.— 664 с.
2. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве.— М. : Наука, 1975.— 232 с.

Киев. гос. ун-т Поступила 20.07.83