УДК 517.5

А. К. Кушпель

Об одном методе восстановления дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами

Пусть W^r — класс 2π-периодических функций f, r-я производная которых существенно ограничена на $[0, 2\pi]$, т. е. $\operatorname*{esssup}\limits_{t\in[-\pi,\pi]} f^{(r)}(\cdot)\leqslant 1$. В статьях [1, 2] установлено, что интерполяционные тригонометрические полиномы не дают наилучшего по порядку приближения на классах W^r в равномерной метрике.

В настоящей работе предложен метод восстановления функций по их значениям в равноудаленных точках тригонометрическими полиномами. В частных случаях этот метод совпадает с интерполяционными аналогами линейных методов суммирования рядов Фурье и дает наилучшее по порядку приближение на классе функций W^r. Отметим, что результаты статьи [3] примыкают к нашим рассмотрениям.

Пусть $S_{r,n}$ — пространство сплайнов порядка r по равномерному разбиению $\Delta_n = \{x_i = 2\pi i/n\}_{i=0}^{n-1}$ промежутка $[0, 2\pi]$, т. е. множество функций имеющих $r-1$ непрерывную производну и представляющих собой на каждом промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ алгебраический многочлен степени не выше r, а $s_{r,n}(f, x)$ — сплайн из $S_{r,n}$, интерполирующий заданную функцию $f\in W^{r+1}$ в точках $t_i = (x_i + 2\pi(1 + (-1)^r))/4n$, $i=\overline{0, n-1}$.

Построим тригонометрический полином, которым воспользуемся для приближения функции $f\in W^{r+1}$ по ее значениям в точках t_i. Определим на множестве $S_{r,n}$ интегральный оператор

$$U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x)=\pi^{-1}\int\limits_0^{2\pi} s_{r,n}(f, t)\,\mathcal{K}_m(t-x)\,dt,$$

где функция $\mathcal{K}_m(t) = 1/2 + \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k^{(m)}\cos kt$ определяет линейный метод суммирования рядов Фурье с матрицей $\Lambda = \|\lambda_k^{(m)}\|$. Таким образом, получаем класс сверток $S_{r,n}*\mathcal{K}_m$, элементы которого — тригонометрические полиномы порядка m.

Оценки уклонения полиномов $U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x)$ на классе функций W^{r+1} будут приведены ниже, а пока получим представление элементов из класса $S_{r,n}*\mathcal{K}_m$.

В принятых обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма.

$$s_{r,n}(f, x)*\mathcal{K}_m(x) \overset{\mathrm{def}}{=} U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m}(\beta_i\cos ix + \gamma_i \sin ix), \qquad (1)$$

где

$$\beta_0 = n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

$$\beta_i = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i^{(m)} A_{r,n-i}^{-1} i^{-r-1} \cos(ix_k - (n-i)t_0) f(x_k), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i^{(m)} i^{-r-1} (A_{r,n-i}^{-1} \cos(ix_k - (n-i)t_0) + A_{r,i}^{-1} \cos i(x_k - t_0)) f(x_k), \\ i = \overline{n+1, m}, \quad i \neq pn, \quad p = 1, 2, \ldots, \\ 0, \quad i = kn, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i^{(m)} A_{r,n-i}^{-1} i^{-r-1} \sin(ix_k - (n-i)t_0) f(x_k), \quad i = \overline{1, n-1}, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i^{(m)} i^{-r-1} (A_{r,n-i}^{-1} \sin(ix_k - (n-i)t_0) + A_{r,i}^{-1} \sin i(x_k - t_0)) f(x_k), \\ i = \overline{n+1, m}, \quad i \neq pn, \quad p = 1, 2, \ldots, \\ 0, \quad i = kn, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{2}$$

$$A_{r,i} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m(r+1)} (mn - i)^{-r-1}.$$

Доказательство. Сплайн $s_{r,n}(f, x) \in S_{r,n}$ запишем в виде $s_{r,n}(f, x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) L_i(x)$, $L_i(x) = L_0(x - x_i)$, где $L_i(x)$ — фундаментальные сплайны, т. е. функции из $S_{r,n}$, удовлетворяющие равенствам $L_i(t_j) = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{0, n-1}$, δ_{ij} — символ Кронекера. Построим тригонометрический полином

$$U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x) = (sr,\, n(f) * \mathscr{K}_m)(x) = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_m(t - x) s_{r,n}(f, t)\, dt =$$

$$= \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_m(t - x) \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) L_0^{n,r}(t - t_i)\, dt = \pi^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_m(t - x) L_0^{n,r}(t - t_i)\, dt.$$

Положим $\hat{L}_i^{n,m,r}(x) \overset{\text{def}}{=} \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_m(t - x) L_0^{n,r}(t - t_i)\, dt = (L_i^{n,r} * \mathscr{K}_m)(x)$. Тогда для элементов класса $S_{r,n} * \mathscr{K}_m$ $U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \hat{L}_i^{m,n,r}(x)$. Заметим, что $\sum_{i=1}^{n-1} \hat{L}_i^{n,m,r}(x) \equiv 1$. Действительно, так как в силу единственности интерполяционного сплайна $\sum_{i=0}^{n-1} L_0^{n,r}(t - t_i) \equiv 1$, то

$$\sum_{i=0}^{n-1} \hat{L}_i^{n,m,r}(x) = \pi^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_m(t - x) L_0^{n,r}(t - t_i)\, dt = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_m(t - x) \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{n-1} L_0^{n,r}(t - t_i)\, dt = \pi^{-1} \int_0^{2\pi} \mathscr{K}_m(t - x)\, dt \equiv 1.$$

Далее, делая замену переменных $t - t_i = \xi$ и пользуясь периодичностью функций $\mathscr{K}_m(x)$ и $L_0(x)$, получаем:

$$\widehat{L}_i^{n,m,r}(x) = \pi^{-1}\int_0^{2\pi} \mathscr{K}_m(t-x)\,L_0^{n,r}(t-t_i)\,\mathrm{d}t = \pi^{-1}\int_{-t_i}^{2\pi - t_i} \mathscr{K}_m(\xi-(x-t_i))\times$$

$$\times L_0^{n,r}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \pi^{-1}\int_0^{2\pi} \mathscr{K}_m(\xi-(x-t_i))\,L_0^{n,r}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

или $\widehat{L}_i^{n,m,r}(x) = \widehat{L}_0^{n,m,r}(x - x_i)$. Таким образом, для построения полинома (1) достаточно построить полином $\widehat{L}_0^{n,m,r}(x)$. Воспользовавшись представлением для фундаментальных сплайнов $L_0^{n,r}(x)$ (см. [4, 5]), получим

$$\widehat{L}_0^{n,m,r}(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} L_0^{n,r}(x) * \mathscr{K}_m(x) = \pi^{-1}\int_0^{2\pi} \mathscr{K}_m(t-x)\,L_0^{n,r}(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \pi^{-1}\int_0^{2\pi}\left(1/2 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{(m)}(\cos it\cos ix + \sin it\sin ix)\right)\times$$

$$\times\left(1/n + (1/n)\sum_{j=1}^{n-1} A_{r,j}^{-1}\sum_{m'=-\infty}^{\infty}((m'n-j)^{-r-1}\cos(m'n-j)\,t\cos jt_0 -\right.$$

$$\left.-(m'n-j)^{-r-1}\sin jt_0\sin(m'n-j)\,t)\right)\mathrm{d}t = n^{-1}\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_r^{(m)} i^{-r-1} A_{r,n-i}^{-1}\times\right.$$

$$\times\cos(ix + (n-i)\,t_0) + \sum_{\substack{i=n+1\\ i\neq pn\\ p=2,3,\ldots}}^{m} \lambda_i^{(m)} i^{-r-1}(A_{r,n-i}^{-1}\cos(ix + (n-i)\,t_0) +$$

$$\left.+ A_{r,i}^{-1}\cos i(x + t_0))\right).$$

Искомое представление для элементов класса $S_{r,n} * \mathscr{K}_m$ запишется так:

$$s_{r,n}(f, x) * \mathscr{K}_m(x) = U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\widehat{L}_k^{n,m,r}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\widehat{L}_0^{n,m,r}(x - x_k) = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^{(m)} i^{-r-1}A_{r,n-i}^{-1}\times\right.$$

$$\times\cos(ix - (n-i)\,t_0 - ix_k) + \sum_{\substack{i=n+1\\ i\neq pn\\ p=2,3,\ldots}}^{m}\lambda_i^{(m)} i^{-r-1}(A_{r,n-i}^{-1}\cos(ix + (n-i)\,t_0 - ix_k) +$$

$$\left.+ A_{r,i}^{-1}\cos i(x + t_0 - x_k))\right) = \beta_0 + \sum_{i=1}^{m}(\beta_i\cos ix + \gamma_i\sin ix),$$

где β_0, β_i, γ_i, $i = \overline{1, m}$, определены в (2). Лемма доказана.

Пусть r нечетно, $m \leqslant n - 1$. Тогда $i_0 = 0$ и представления (2) для коэффициентов полинома $U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x)$ будут иметь вид

$$\beta_0 = n^{-1}\sum_{k=1}^{n} f(x_k),\quad \beta_i = \alpha_{i,r}^{(n)}\left(n^{-1}\lambda_i^{(m)}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\cos ix_k\right),\quad \gamma_i = \alpha_{i,r}^{(n)}\times$$

$$\times\left(n^{-1}\lambda_i^{(m)}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\sin ix_k\right),\quad i = \overline{1, m}, \tag{3}$$

где

$$\alpha_{i,r}^{(n)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} i^{-r-1}A_{r,n-i}^{-1}. \tag{4}$$

Из (3) следует, что в этом случае коэффициенты полинома $U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x)$ — коэффициенты соответствующего интерполяционного полинома $\tilde{U}_m(\Lambda, f, x)$, умноженные на $\alpha_{i,r}^{(n)}$. Следовательно, полином $U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x)$ может быть получен из интерполяционного полинома $\tilde{U}_m(\Lambda, f, x)$, если к нему применить метод суммирования рядов Фурье, определяемый матрицей $\mathrm{A}_r = \| \alpha_{i,r}^{(n)} \|$. Выясним некоторые свойства элементов матрицы A_r. Для этого получим интегральные представления чисел $A_{r,i}$. Заметим, прежде всего, что числа $A_{r,i}$ образуют n-периодическую последовательность:

$$A_{r,i+n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m(r+1)} (mn - i - n)^{-r-1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m(r+1)} \times$$

$$\times ((m-1)n - i)^{-r-1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m(r+1)} (mn - i)^{-r-1} = A_{r,i}.$$

Далее, при нечетном r

$$A_{r,n-i} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (mn - (n-i))^{-r-1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} ((m-1)n + i)^{-r-1} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (mn + i)^{-r-1} = i^{-r-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (mn + i)^{-r-1} + \sum_{m=1}^{\infty} (mn - i)^{-r-1} = A_{r,i},$$

т. е. $A_{r,n-i} = A_{r,i}$.

Найдем интегральное представление для $A_{r,i}$. Представим $A_{r,i}$ в виде

$$A_{r,i} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{m(r+1)} (mn - i)^{-r-1} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m(r+1)} (mn - i)^{-r-1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m(r+1)} (mn + i)^{-r-1} + i^{-r-1}.$$

Воспользуемся формулой суммирования рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} F(k) = \int_0^{\infty} f(x) (\exp(x) - 1)^{-1} \mathrm{d}x,$$

приведенной в [6], где $F(x) = \int_0^{\infty} \exp(-xt) f(t)\, \mathrm{d}t$. Функция $F_1(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (nx + i)^{-r-1}$ есть изображение функции

$$f(t) = (t/n)^r \exp(-it/n)/nr! \tag{5}$$

(см., например, [7]). С учетом соотношения (5) получаем:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (mn + i)^{-r-1} = \int_0^{\infty} t^r \exp(-it/n) (\exp(t) - 1)^{-1} \mathrm{d}t/n^{r+1} r!$$

Аналогично для функции $F_2(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (nx - i)^{-r-1}$ находим $f(t) = (t/n)^r \times \exp(it/n)/nr!$. Поэтому

$$A_{r,i} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (mn - i)^{-r-1} = \sum_{m=1}^{\infty} ((mn - i)^{-r-1} + (mn + i)^{-r-1}) + i^{-r-1} =$$

$$= i^{-r-1} + \int_0^{\infty} t^r (\exp(it/n) + \exp(-it/n)) (\exp(t) - 1)^{-1} \mathrm{d}t/n^{r+1} r! =$$

$$= i^{-r-1} + \int_0^{\infty} t^r \operatorname{ch}(it/n) (\exp(t) - 1)^{-1} \mathrm{d}t/n^{r+1} r!.$$

Таким образом, учитывая равенство (4), получаем представление для $\alpha_{i,r}^{(n)}$:

$$\alpha_{i,r}^{(n)} = \left(1 + 2i^{r+1} \int\limits_0^\infty t^r \operatorname{ch}(it/n)(\exp(t) - 1)^{-1} dt/n^{r+1} r!\right)^{-1}, \ r = 2s - 1, \ s = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

С учетом равенства (6) коэффициенты β_0, β_i, γ_i, $i = \overline{1, m}$, полинома $U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x)$ при $m \leqslant n - 1$ и $r = 2s - 1$, $s = 1, 2, \ldots$, запишутся в виде

$$\beta_0 = n^{-1} \sum_{k=1}^n f(x_k), \quad \beta_i = n^{-1} \left(1 + 2i^{r+1} \int\limits_0^\infty t^r \operatorname{ch}(it/n)(\exp(t) - 1)^{-1} \times\right.$$

$$\left. \leqslant dt/n^{r+1} r!\right)^{-1} \left(\lambda_i \sum_{k=1}^n f(x_k) \cos ix_k\right), \quad \gamma_i = n^{-1} \left(1 + 2i^{r+1} \int\limits_0^\infty t^r \operatorname{ch}(it/n) \times\right.$$

$$\left. \times (\exp(t) - 1)^{-1} dt/n^{r+1} r!\right)^{-1} \left(\lambda_i \sum_{k=1}^n f(x_k) \sin ix_k\right).$$

Получим оценки уклонения полиномов $U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x)$ на классе функций W^{r+1}:

$$\mathscr{E}_1^{r,n}(W^{r+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in W^{r+1}} \| f(x) - s_{r,n}(f, x) \|_C,$$

$$\mathscr{E}_2^{p,m}(W^{r+1}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in W^{r+1}} \| f(x) - U_m(\Lambda, f, x) \|_C,$$

$\| U_m \| = \pi^{-1} \int\limits_0^{2\pi} | \mathscr{K}_m(t) | dt$ — норма оператора U_m.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f(x_i)$, $i = \overline{0, n - 1}$, — значения функций $f \in W^{r+1}$ в точках $t_i = 2\pi i/n + 2\pi(1 + (-1)^r)/4n$, $i = \overline{0, n - 1}$. Тогда*

$$\mathcal{R}(W^{r+1}, U_m, s_{r,n}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{f \in W^{r+1}} \| f(x) - U_m(\Lambda, s_{r,n}(f), x) \|_C \leqslant$$

$$\leqslant \mathscr{E}_1^{r,n}(W^{r+1}) \| U_m \| + \mathscr{E}_2^{p,m}(W^{r+1}).$$

Доказательство. Легко видеть, что в силу линейности оператора U_m

$$\mathcal{R}(W^{r+1}, U_m, s_{r,n}) = \sup_{f \in W^{r+1}} \| f(x) - U_m(\Lambda, f, x) - U_m(\Lambda, f - s_{r,n}(f), x) \|_C \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{f \in W^{r+1}} \| f(x) - U_m(\Lambda, f, x) \|_C + \| U_m \| \sup_{f \in W^{r+1}} \| f(x) - s_{r,n}(f, x) \|_C =$$

$$= \mathscr{E}_1^{r,n}(W^{r+1}) \| U_m \| + \mathscr{E}_2^{p,m}(W^{r+1}).$$

Величины $\mathscr{E}_1^{r,n}(W^{r+1})$ и $\mathscr{E}_2^{p,m}(W^{r+1})$ хорошо изучены в работах [5, 8, 9]. В [5] приведены значения

$$\mathscr{E}_1^{r,n}(W^{r+1}) = \begin{cases} \mathscr{K}_{r+1}/\pi n^{r+1}, \quad n = 2k, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ 2 \int\limits_0^{2\pi} | K_r^1(\pi/n + t_0, t) | dt/(2\pi)^{r+1} + O(1/n^{r+2}), \\ n = 2k - 1, \quad k = 1, 2, \ldots; \end{cases} \tag{7}$$

в работе [9] —

$$\mathscr{E}_2^{p,m}(W^{r+1}) = m^{-p} A(\lambda_n) +$$

$$+ O\left(m^{-p} \int\limits_{|t| \geqslant n\pi/2} \left| \int\limits_0^\infty (1 - \lambda_m(u)) u^{-p} \cos(ut + (r + 1)\pi 2) du \right| dt\right). \tag{8}$$

Сделаем некоторые замечения. Пусть $m = O(n)$ и метод суммирования рядов Фурье Λ выбран так, что полиномы $U_m(f, \Lambda, x)$ дают наилучший порядок приближения на классе функций W^{r+1}. Тогда, как следует из теоремы 1 и соотношений (7) и (8), построенные полиномы $U_m(\Lambda, {}_{r,n}(f), x)$ также дают наилучший порядок приближения на классе W^{r+1}.

Заметим, что метод суммирования рядов Фурье, определяемый матрицей $A_r = \| \alpha_{i,r}^{(n)} \|$, может быть рассмотрен независимо от его связи со сплайнами. Из результатов [10] и представлений (6) следует, что процесс суммирования α имеет порядок насыщения $O(n^{-r-1})$, где n — порядок полинома $U_n(A_r, f, x) \overset{\text{def}}{=} \pi^{-1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(1/2 + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{i,r}^{(n)} \cos i(t-x) \right) dt.$

1. *Никольский С. М.* Асимптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами.— Докл. АН СССР, 1941, **31**, № 3, с. 215—216.
2. *Никольский С. М.* Об интерполировании и наилучшем приближении дифференцируемых периодических функций тригонометрическими полиномами.—Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1946, **10**, № 5, с. 393—410.
3. *Степанец А. К.* Об одном методе приближения непрерывных функций.—Укр. мат. журн., 1974, **26**, № 6, с. 762—773.
4. *Golomb M.* Approximation by periodic spline interpolations on uniform meshes.—J. Approx. Theory, 1968, N 1, p. 26—65.
5. *Женсыкбаев А, А.* Приближение дифференцируемых периодических функций сплайнами по равномерному разбиению.— Мат. заметки, 1973, **13**, № 6, с. 807—816.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Марычев О. К.* Интегралы и ряды. Элементарные функции.— М., 1981, с. 650—651.
7. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.— М., 1977.— 856 с.
8. *Колмогоров А. Н.* Zur Grössenordnund des Restgliedes Fouriersher Reihen differenzierbarer Funktionen.— Ann. of Math., 1935, **36**, N 2, p. 521—526.
9. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье.— Тр. Мат. ин-та им. Стеклова АН СССР, 1961, вып. 62, с. 61—67.
10. *Турецкий А. Х.* О классах насыщения для некоторых методов суммирования рядов Фурье непрерывных периодических функций.— Успехи мат. наук, 1960, **15**, № 6, с. 149—156.

Ин-т матем. Ан УССР, Киев

Поступила 12.05.83