УДК 517.91

Г. Д. Завалыкут

К вопросу обоснования метода усреднения для одного класса дифференциально-операторных уравнений

В настоящей работе продолжаются исследования операторно-дифференциальных уравнений, начатые в работе [1], с применением метода усреднения Крылова—Боголюбова [2, 3].

Рассматривается уравнение

$$dx/dt = \varepsilon f(t, x, Ax), \tag{1}$$

где функция $f(t, x, y) = (f_1(t, x, y), \ldots, f_n(t, x, y))$ определена и непрерывно дифференцируема по x, y для $t, x, y \in R^+ \times D \times D_1$, $A = (A_1, \ldots, A_p)$ — оператор, определенный и принимающий значения в классе непрерывных при $t \in R^+$ вектор-функций, $R^+ = [0, +\infty)$, D — область n-мерного, D_1 — область p-мерного пространств, p — конечно или бесконечно, ε — малый положительный параметр.

Решением уравнения (1) будем называть функцию $x = x(t, \varepsilon)$, определенную и абсолютно непрерывную для $t \in R^+$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 = \mathrm{const} > 0$, превращающую уравнение (1) в тождество почти для всех $t \in R^+$.

В предположении, что существует равномерно по x, $y \in D \times D_1$ интегральное среднее

$$\lim_{T\to\infty}\left(\int_0^T f(t, x, y)\,dt\right)/T = f_0(x, y), \tag{2}$$

усредненную систему уравнений для (1) определим уравнением

$$d\xi/dt = \varepsilon f_0(\xi, A\xi). \tag{3}$$

Покажем, что при некоторых дополнительных условиях на правую часть уравнения (1) и оператор A разность между решением $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1) и решением $\xi(t, \varepsilon)$ усредненного уравнения (3) допускает оценку

$$\| x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon) \| \leqslant \delta(\varepsilon) \quad \forall t \in [0, L/\varepsilon], \tag{4}$$

где $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $L = \mathrm{const} > 0$, $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$.

Предположим, что оператор A переводит абсолютно непрерывную при $t \in R^+$ функцию в абсолютно непрерывную.

При этом для $t \in [0, L/\varepsilon]$ справедливо равенство

$$\int_0^t f_1(\tau, x(t, \varepsilon), Ax(t, \varepsilon))\,d\tau = \int_0^t f_1(t, x(t, \varepsilon), Ax(t, \varepsilon))\,dt +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t \frac{\partial f_1(\tau, x(t, \varepsilon), Ax(t, \varepsilon))}{\partial x}\,d\tau\,\frac{dx(t, \varepsilon)}{dt}\,dt +$$

$$+ \int_0^t \int_0^t \frac{\partial f_1(\tau, x(t, \varepsilon), Ax(t, \varepsilon))}{\partial y}\,d\tau\,\frac{dAx(t, \varepsilon)}{dt}\,dt,$$

где $f_1(t, x, y) = f(t, x, y) - f_0(x, y)$.

С учетом этого равенства имеем

$$| x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon) | \leqslant | x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon) | + \varepsilon \left| \int_0^t [f_0(x(t, \varepsilon), Ax(t, \varepsilon)) - \right.$$

$$-f_0(\xi(t,\varepsilon), A\xi(t,\varepsilon))]\,dt\Big| + \varepsilon\left|\int_0^t f_1(\tau, x(t,\varepsilon),\ Ax(t,\varepsilon))\,d\tau\right| +$$

$$+\varepsilon^2\left|\int_0^t\int_0^t \frac{\partial f_1(\tau, x(t,\varepsilon),\ Ax(t,\varepsilon))}{\partial x}\,d\tau f(t, x(t,\varepsilon),\ Ax(t,\varepsilon))\,dt\right| +$$

$$+\varepsilon\left|\int_0^t\int_0^t \frac{\partial f_1(\tau,\ x(t,\varepsilon),\ Ax(t,\varepsilon))}{\partial y}\,d\tau\ \frac{dAx(t,\varepsilon)}{dt}\,dt\right|. \tag{5}$$

Предположим, что для $t\in R^+$

$$|f(t, x, y)| \leqslant M, \tag{6}$$

$$|f_0(x, y) - f_0(\bar{x}, \bar{y})| \leqslant K|x-\bar{x}| + Q|y-\bar{y}|, \tag{7}$$

$$\left|\int_0^t f_1(t, x, y)\,dt\right| \leqslant Mt\eta(t),\quad \left|\int_0^t \frac{\partial f_1(t, x, y)}{\partial x}\ dt\right| \leqslant Kt\eta(t), \tag{8}$$

$$\left|\int_0^t \frac{\partial f_1(t, x, y)}{\partial y}\,dt\right| \leqslant Q\,t\eta(t), \tag{9}$$

где $\eta(t)$ — монотонно убывающая функция, $\eta(t)\underset{t\to\infty}{\to} 0$, неравенства (6) — (9) понимаются покоординатно (см. [1]).

При этих предположениях неравенство (5) приводит к интегральному неравенству

$$|x(t,\ \varepsilon) - \xi(t,\varepsilon)| \leqslant |x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon)| + \varepsilon\int_0^t [K|x(t,\varepsilon) - \xi(t,\varepsilon)| +$$

$$+Q|Ax(t,\varepsilon) - A\xi(t,\varepsilon)|]\,dt + \varepsilon Mt\eta(t) + \varepsilon^2 M\left|\int_0^t Kt\eta(t)\,dt\right| +$$

$$+\varepsilon\left|\int_0^t Qt\eta(t\left|\frac{dAx(t,\varepsilon)}{dt}\right|dt\right|. \tag{10}$$

Относительно оператора A предполагаем, что

$$|Ax(t) - A\bar{x}(t)| \leqslant R|x(t) - \bar{x}(t)|_0, \tag{11}$$

$$|dAx(t)/dt| \leqslant S|dx(t)/dt|_0 \tag{12}$$

для любой пары $x(t)$, $\bar{x}(t)$ функций, абсолютно непрерывных при $t\in[0, L/\varepsilon]$ и принимающих значения в области D. Здесь $|x(t)|_0 = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} |x(t)|$, $R = \{r_{ij}\}$, $S=\{s_{ij}\}$, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,n}$, $r_{ij}\geqslant 0$, $s_{ij}|\geqslant 0$.

С учетом условий на оператор A из (10) получаем

$$|x(t,\ \varepsilon) - \xi(t,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon\int_0^t K|x(t,\ \varepsilon) - \xi(t,\ \varepsilon)|\,dt + \varepsilon tQR|x(t,\varepsilon) -$$

$$-\xi(t,\varepsilon)|_0 + LM\eta(L/\varepsilon) + L^2K\Phi(L/\varepsilon)M + L^2QS\Phi(L/\varepsilon)M + |x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon)|, \tag{13}$$

где, как и в [2], $\Phi(t) = \frac{1}{t^2}\int_0^t t\eta(t)\,dt$ — функция, удовлетворяющая очевидному свойству: $\Phi(t)$ монотонно стремится к нулю при $t\to\infty$.

Предполагая, что произведения матриц QR и QS ограничены, и учитывая свойства функций $\eta(t)$ и $\Phi(t)$, неравенство (13) для $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ приведем к виду

$$\|x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)\| \leqslant \varepsilon K_1 \int_0^t \|x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)\| \, dt + \varepsilon t q_1 \| \, |x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)|_0 \| + \delta_1(\varepsilon) + \|x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon)\|, \tag{14}$$

где K_1, q_1 — const $\geqslant 0$, $\delta_1(\varepsilon) = \|LM\eta(L/\varepsilon) + L^2K\Phi(L/\varepsilon)M + L^2QS\Phi(L/\varepsilon) \times M\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Решение неравенства (14), как известно, удовлетворяет оценке

$$\|x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)\| \leqslant [\|x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon)\| + \delta_1(\varepsilon)] \exp\{K_1L_1\} + q_1 \| \, |x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)|_0 \| (\exp\{K_1L_1\} - 1)/K_1 \tag{15}$$

для $t \in [0, L_1/\varepsilon]$.

При $q_1(\exp\{K_1L_1\} - 1)/K_1 = 1/2$ из неравенства (15) вытекает оценка $\| \, |x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)|_0 \| \leqslant 2 [\|x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon)\| + \delta_1(\varepsilon)] \exp\{K_1L_1\}$.

Таким образом, $\max_{t \in [0, L_1/\varepsilon]} \|x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)\| \leqslant 2 [\|x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon)\| + \delta_1(\varepsilon)] \times \exp\{K_1L_1\}$ для $t \in [0, L_1/\varepsilon]$, где $L_1 = \ln(1 + K_1/2q_1)/K_1$.

Если $L_1 < L$, то, взяв за начальное значение точку $t = L_1/\varepsilon$ и рассуждая аналогично, приходим к оценке

$$\max_{t \in [L_1/\varepsilon, 2L_1/\varepsilon]} \|x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)\| \leqslant 2 \{\delta_1(\varepsilon) + 2 [\|x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon)\| + \delta_1(\varepsilon)] \exp\{K_1L_1\}\} \exp\{K_1L_1\}. \tag{16}$$

При

$$\|x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon)\| \leqslant \delta_1(\varepsilon), \quad \delta_1(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0 \tag{17}$$

на интервале $[0, L_1/\varepsilon]$ получаем оценку $\|x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon)\| \leqslant \delta(\varepsilon)$, где $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Так как $[L/L_1] = p$ — конечно и не зависит от ε, то через $p+1$ шаг мы получим оценку вида (16) для $t \in [0, L/\varepsilon]$.

Итак, при сделанных выше предположениях и условии (17) для начальных значений разность между решением $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1) и решением $\xi(t, \varepsilon)$ усредненного уравнения (3) удовлетворяет оценке (4).

Проанализируем условия (8), (9). Предполагаем, что функция $f(t, x, y)$ имеет непрерывные частные производные по $x, y \in D \times D_1$, удовлетворяющие неравенствам

$$|\partial f(t, x, y)/\partial x| \leqslant K_1, \quad |\partial f(t, x, y)/\partial y| \leqslant Q_1, \tag{18}$$

где матрицы K_1 и Q_1 обладают свойствами матриц K и Q соответственно. Тогда из равномерности предела (2) следует непрерывная дифференцируемость предельной функции $f_0(x, y)$, оценка для ее производных $|\partial f_0(x, y)/\partial x| \leqslant K_1$, $|\partial f_0(x, y)/\partial y| \leqslant Q_1$ и существование пределов

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial x} \, dt = \frac{\partial f_0(x, y)}{\partial x}, \tag{19}$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(t, x, y)}{\partial y} \, dt = \frac{\partial f_0(x, y)}{\partial y} \tag{20}$$

равномерно относительно $x, y \in D \times D_1$. Так как $x(t)$ — конечномерный вектор, то из соотношений (2) и (19) следует существование функции $\eta(t)$ с указанными выше свойствами такой, что для разности $f_1(t, x, y) = f(t, x, y) - f_0(x, y)$ выполняются неравенства (8). При конечномерности вектора

$y(t)$ (p — конечно) из соотношения (20) следует также соотношение (9). При $p = \infty$ из соотношения (20) следует

$$\left| \int_0^t \frac{\partial f_1(t, x, y)}{\partial y_j} dt \right| \leqslant q_j t \eta_j(t) \quad \forall j, \tag{21}$$

где $\eta_j(t)$ — функция со свойствами функции $\eta(t)$, q_j — j-й столбец матрицы Q_1. Из неравенств (21) следует неравенство (9) лишь в случае, когда последовательность функций $\{\eta_j(t)\}$, $j = 1, 2, \ldots$, ограничена сверху равномерно по j некоторой монотонной функцией $\eta(t)$, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = 0$.

Таким образом, в отличие от условий (8), выполняющихся в силу гладкости функции $f(t, x, y)$ и равномерности предела (2), выполнимость условий (9) при $p = \infty$ следует предполагать. При некоторых дополнительных предположениях, в частности при периодичности по t правой части уравнения (1), условия (9) выполняются.

Подводя итог, приходим к следующему результату.

Теорема. *Пусть для уравнения* (1) *функция* $f(t, x, y)$ *определена непрерывно дифференцируема в области* $R^+ \times D \times D_1$, *равномерно по* x, $y \in D \times D_1$ *существует предел* (2), *оператор* A *удовлетворяет условиям* (11), (12). *Более того, при* $p = \infty$ *матрицы* QR *и* QS *ограничены и выполняется условие* (9). *Предположим, что уравнения* (1) *и* (3) *имеют при* $t \in [0, L/\varepsilon]$ *решения* $x = x(t, \varepsilon)$ *и* $\xi = \xi(t, \varepsilon)$ $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ *такие, что* $\| x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon) \| \leqslant \delta_1(\varepsilon)$, *где* $\delta_1(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Тогда можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *что*

$$\| x(t, \varepsilon) - \xi(t, \varepsilon) \| \leqslant \delta(\varepsilon) \quad \forall t \in [0, L/\varepsilon]. \tag{22}$$

Следует заметить, что используя сглаживание функции $f(t, x, y)$, утверждение теоремы можно усилить, заменив условие непрерывной дифференцируемости правой части уравнения (1) по x, y условием Липшица по этим переменным.

Отметим также, что для системы (1) с периодической по t правой частью в силу периодичности из неравенств (6)—(9), (18) следуют неравенства

$$|f_1(t, x, y)| \leqslant M, \quad \left| \int_0^t \frac{\partial f_1(t, x, y)}{\partial x} dt \right| \leqslant K, \quad \left| \int_0^t \frac{\partial f_1(t, x, y)}{\partial y} dt \right| \leqslant Q.$$

Это позволяет для таких систем при $\| x_0(\varepsilon) - \xi_0(\varepsilon) \| \leqslant C_1 \varepsilon$, $C_1 = \text{const} \geqslant 0$, получить оценку (22) при $\delta(\varepsilon) = C\varepsilon$, $C = \text{const} \geqslant 0$.

Из реализаций оператора A, приведенных в работе [1], условиям (11), (12) удовлетворяют следующие: $Ax = (x^2, x^3, \ldots, x^k, \ldots)$ при $n = 1$; оператор сдвига $Ax(t) = (x(t - \Delta_1), x(t - \Delta_2), \ldots)$ при условии, что $x(t) = x_0$ при $t \leqslant 0$; функционал $Ax(t) = (x(t_1), x(t_2), \ldots)$. Среди интегральных операторов условиям теоремы удовлетворяет, например, оператор

$$Ax(t) = \int_t^{t+T} \varphi(x(s))\, ds.$$

Как видим, теорема дает обоснование метода усреднения Крылова—Боголюбова [2, 3] на конечном временном интервале для широких классов уравнений, дополняя этим обоснование метода усреднения целого ряда работ [4—6].

1. *Завалыкут Г. Д.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений одного класса дифференциально-операторных уравнений.— Дифференц. уравнения, 1983, **19**, № 4, с. 569—575.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1971.— 501 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.—Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.

4. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Ташкент : Фан, 1971.— 278 с.
5. *Фодчук В. И.* К вопросу обоснования принципа усреднения для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— III Konferenz über nichtlineare schwingungen. (Berlin vom 25 bis 30 May 1964), t. 1. Berlin, Akademie.— Verlag, 1965, S. 45—40.
6. *Халанай А.* Системы с запаздыванием.— В кн.: Результаты и проблемы математики. Математика. Период. сб. переводов иностранных статей, 1966, 10, № 5, с. 85—102.

Ин-т матем. АН УССР, Киев
Поступила 04.10.83