УДК 517.946

В. В. Городецкий, М. Л. Горбачук

О полиномиальном приближении решений дифференциально-операторных уравнений в гильбертовом пространстве

Пусть A — неотрицательный самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H со всюду плотной областью определения $D(A)$, H_a — множество всех его аналитических векторов: $H_a = \{f \in \bigcap D(A^n) \mid \exists C, B > 0: \| A^n f \| \leqslant CB^n n!\}$.

Рассмотрим следующие типы задач: 1) задачу Коши для уравнения параболического типа $u_1'(t) + Au_1(t) = 0$, $u_1(0) = f \in H$, $t \in [0, T]$; 2) задачу Коши для уравнения гиперболического типа с вырождением $u_2''(t) + t^{\gamma} Au_2(t) = 0$, $\gamma \geqslant 0$, $u_2(0) = f \in H$, $u_2'(0) = 0$, $t \in [0, T]$; 3) задачу $Au_3 = f$, $f \in H$, $A \geqslant \rho E$, $\rho > 0$, E — тождественный оператор.

Решения этих задач $u_i = G_i(A) f = \int\limits_0^\infty G_i(\lambda)\, dE_\lambda f$, $i = 1, 2, 3$, где E_λ, $\lambda \geqslant 0$, — разложение единицы оператора A, $G_1(\lambda) = \exp(-t\lambda)$, $G_2(\lambda) = \pi\tau^{\tau}\lambda^{\tau/2}t^{1/2} J_{-\tau}(2\tau\lambda^{1/2}t^{1/2\tau})/(\Gamma(\tau)\sin\pi\tau)$, $\tau = 1/(\gamma+2)$, $\Gamma(\tau)$—гамма-функция, $J_{-\tau}(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода, $G_3(\lambda) = \lambda^{-1}$, $\lambda \geqslant \rho$.

В работе изучается представление решений указанных задач в виде $u_i = \lim\limits_{n\to\infty} P_n^i(A) f$, $i = 1, 2, 3$, где $P_n^i(\lambda)$ — полином степени n переменной λ. В качестве искомых полиномов берутся частные суммы рядов Фурье функций $G_i(\lambda)$ по многочленам

$$L_{\mu,\alpha,n}(\lambda) = (-1)^n \mu^{(1+\alpha)/2} (\mu\lambda)^{-\alpha} \exp(\mu\lambda) [(\mu\lambda)^{\alpha+n} \exp(-\mu\lambda)]^{(n)}/(n!\Gamma(n+\alpha+1))^{1/2},$$

образующим ортонормированный базис в $L_2((0, \infty), \lambda^{\alpha}\exp(-\mu\lambda))$ ($\alpha > -1$, $\mu > 0$ — фиксированные параметры).

Обозначим $P^1_{\mu,t,n}(\lambda)$, $P^2_{\mu,t,n}(\lambda)$, $P^3_{\mu,\alpha,n}(\lambda)$ соответственно частные суммы рядов Фурье функций $G_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$, по базису $L_{\mu,\alpha,n}(\lambda)$:

$$P^1_{\mu,t,n}(\lambda) = \mu^{1/2}(t+\mu)^{-1}\sum_{k=0}^{n}(-t/(t+\mu))\,L_{\mu,0,k}(\lambda), \tag{1}$$

$$P^2_{\mu,t,n}(\lambda) = \omega\exp(-\delta)\sum_{k=0}^{n}(\delta^k/(k!\Gamma(k-\tau+1))^{1/2})(-1)^k L_{\mu,-\tau,k}(\lambda), \tag{2}$$

где $\delta = t^{\gamma+2}/(\mu(\gamma+2))^2$, $\tau = 1/(\gamma+2)$, $\omega = \pi\mu^{(\tau-1)/2}/\Gamma(\tau)\sin\pi\tau$,

$$P^3_{\mu,\alpha,n}(\lambda) = \mu^{(1-\alpha)/2}\,\Gamma(\alpha)\sum_{k=0}^{n}(k!/\Gamma(k+\alpha+1))^{1/2}(-1)^k L_{\mu,\alpha,k}(\lambda). \tag{3}$$

Формула (3) справедлива для произвольно фиксированного $\alpha\in\{4, 5, 6, \ldots\}$

Теорема. *Если $f\in H_a$, то*

а) $\exists c_1,\ \mu>0,\ 0<\rho=\rho(T)<1:\ \sup\limits_{t\in[0,T]}\|u_1(t)-P^1_{\mu,t,n}(A)f\|\leqslant c_1\rho^{n+1};$ (4)

б) $\exists c_2,\ \mu>0.\ L=L(T)>0:\ \sup\limits_{t\in[0,T]}\|u_2(t)-P^2_{\mu,t,n}(A)f\|\leqslant c_2L^{n+1}/(n+1)!;$ (5)

в) *для произвольно фиксированного* $\alpha\in\{4, 5, 6, \ldots\}$

$$\exists c_3,\ \mu>0,\ \sigma=\sigma(\alpha)>1:\ \|u_3-P^3_{\mu,\alpha,n}(A)f\|\leqslant c_3(n+1)^{-\sigma}. \tag{6}$$

Обратно, если выполнено одно из условий (4)—(6), *то* $f\in H_a$.

Рассмотрим случай а).

Пусть $f\in H_a$. Как показано в [1], $H_a=\bigcup\limits_{\mu>0}D(\exp(\mu A))$. Следовательно, $f\in D(\exp(\mu A))$ с некоторым $\mu>0$. Зафиксируем это μ. В силу основной спектральной теоремы для самосопряженных операторов

$$\|u_1(t)-P^1_{\mu,t,n}(A)f\|^2=\int_0^\infty(\exp(-t\lambda)-P^1_{\mu,t,n}(\lambda))^2\exp(-2\mu\lambda)\exp(2\mu\lambda)\times$$

$$\times d(E_\lambda f,f)\leqslant\sup_{0\leqslant\lambda<\infty}(\exp(-\mu\lambda)|\exp(-t\lambda)-P^1_{\mu,t,n}(\lambda)|)^2\|f\|^2_{H_\mu},$$

где $\|f\|^2_{H_\mu}=\int_0^\infty\exp(2\mu\lambda)\,d(E_\lambda f,f)<\infty$. Поскольку $P^1_{\mu,t,n}(\lambda)\to\exp(-t\lambda)$ при $n\to\infty$ в каждой точке $\lambda\in(0,\infty)$ [2], то, учитывая вид полинома $P^1_{\mu,t,n}(\lambda)$, получаем

$$\exp(-\mu\lambda)|\exp(-t\lambda)-P^1_{\mu,t,n}(\lambda)|\leqslant\mu^{1/2}(t+\mu)^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}(t/(t+\mu))^k\times$$

$$\times\exp(-\mu\lambda)|L_{\mu,0,k}(\lambda)|.$$

Так как [3]

$$\exp(-\mu\lambda)|L_{\mu,0,k}(\lambda)|\leqslant\mu^{1/2}, \tag{7}$$

то

$$\exp(-\mu\lambda)|\exp(-t\lambda)-P^1_{\mu,t,n}(\lambda)|\leqslant\mu(t+\mu)^{-1}\sum_{k=n+1}^{\infty}(t/(t+\mu))^k=(t/(t+\mu))^{n+1}.$$

Таким образом, $\sup\limits_{t\in[0,T]}\|u_1(t)-P^1_{\mu,t,n}(A)f\|\leqslant\|f\|_{H_\mu}(T/(T+\mu))^{n+1}$. Полагая $c_1=\|f\|_{H_\mu}$, $\rho=T/(T+\mu)$, получаем оценку типа (4).

Обратно, пусть выполнено (4). Тогда для $u_1(t)=\exp(-tA)f$ справедливо представление $u_1(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(t,\mu)\,L_{\mu,0,k}(A)f$, где $a_k(t,\mu)=\mu^{1/2}(t+\mu)^{-1}\times$ $\times(t/(t+\mu))^k$, причем, учитывая вид полинома $P^1_{\mu,t,n}(\lambda)$, имеем $\|a_k(t,\mu)\times$

$\times L_{\mu,0,k}(A) f \| = \| P^1_{\mu,t,k}(A) f - P^1_{\mu,t,k-1}(A) f \| \leqslant c_1 (1 + 1/\rho) \rho^{k+1}$. Другими словами, для каждого $t \in [0, T]$

$$\| a_k(t, \mu) L_{\mu,0,k}(A) f \|^2 = \int_0^\infty a_k^2(t, \mu\ L^2_{\mu,0,k}(\lambda)\, d(E_\lambda f, f) \leqslant c_1^2 (1 + 1/\rho)^2 \rho^{2(k+1)}. \quad (8)$$

Для того чтобы показать, что f — аналитический вектор оператора A, достаточно установить [1], что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $f \in D(\exp(\varepsilon A))$. Для этого воспользуемся тем фактом, что ряд Фурье по многочленам $L_{\mu,0,k}(\lambda)$ функции $\varphi(\lambda) = \exp(\varepsilon\lambda)$ сходится к этой функции в точке $\lambda \in (0, \infty)$, если $0 < \varepsilon < \mu/2$, и имеет следующий вид:

$$\exp(\varepsilon\lambda) = \sum_{k=0}^\infty b_k(\varepsilon, \mu) L_{\mu,0,k}(\lambda) \quad (9)$$

где $b_k(\varepsilon, \mu) = \mu^{1/2}(\mu - \varepsilon)^{-1}(\varepsilon/(\mu - \varepsilon))^k$.

Предположим, что $0 < \varepsilon < \min\{\mu/2, T\}$, и пусть $P_{\mu,\varepsilon,n}(\lambda)$ обозначает n-ю частную сумму ряда (9). В силу неравенства Коши—Буняковского, неравенства (8) при $t = \varepsilon$ и того, что $b_k(\varepsilon, \mu) = ((\mu + \varepsilon)/(\mu - \varepsilon))^{k+1} a_k(\varepsilon, \mu)$,

$$\int_0^\infty | P_{\mu,\varepsilon,n}(\lambda) |\, d(E_\lambda f, f) \leqslant \| f \| \sum_{k=0}^n \left[\int_0^\infty b_k^2(\varepsilon, \mu) L^2_{\mu,0,k}(\lambda)\, d(E_\lambda f, f) \right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \| f \| \sum_{k=0}^\infty \left[\int_0^\infty \left(\frac{\mu + \varepsilon}{\mu - \varepsilon} \right)^{2(k+1)} a_k^2(\varepsilon, \mu) L^2_{\mu,0,k}(\lambda)\, d(E_\lambda f, f) \right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 (1 + 1/\rho) \| f \| \sum_{k=0}^\infty ((\mu + \varepsilon)/(\mu - \varepsilon))^{k+1} \rho^{k+1}.$$

Так как $0 < \rho < 1$, то существует $0 < q < 1$ такое, что $\rho < q < 1$. Поэтому, если взять $0 < \varepsilon < \min\{\mu/2, T, \mu(q - \rho)/(q + \rho)\}$, то $\int_0^\infty | P_{\mu,\varepsilon,n}(\lambda) | \times$ $\times d(E_\lambda f, f) \leqslant c_1 q (1 + 1/\rho)(1 - q)^{-1} \| f \|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поскольку $| P_{\mu,\varepsilon,n}(\lambda) | \to$ $\to \exp(\varepsilon\lambda)$ при $n \to \infty$ в каждой точке $\lambda \in (0, \infty)$, то по теореме Фату получаем, что $\| \exp(\varepsilon A/2) f \|^2 = \int_0^\infty \exp(\varepsilon\lambda)\, d(E_\lambda f, f) < \infty$, т. е. $f \in H_a$.

Случаи б) и в) доказываются аналогично, только вместо (7) необходимо использовать соответственно следующие неравенства из [2, 3]:

$$\exp(-\lambda/2) | L_{1,\alpha,n}(\lambda) | \leqslant \Gamma^{1/2}(n + \alpha + 1)/\Gamma^{1/2}(n + 1)\Gamma(\alpha + 1), \quad \alpha > -1,$$

$$\sqrt{\Gamma(n + \alpha + 1)/n!}\, \lambda^{\alpha/2 + 1/4} \exp(-\lambda/2) | L_{1,\alpha,n}(\lambda) | \leqslant c n^{\alpha/2 - 1/4}(1 + n^{-1/4}\lambda^{5/4}),$$
$$\alpha \geqslant -1/2.$$

З а м е ч а н и е. Поскольку многочлены $P^i_n(A)$, $i = 1, 2, 3$, от оператора A выписываются явно, то первую часть теоремы можно рассматривать как метод, позволяющий находить приближенные решения задач (1)—(3) в классе начальных данных H_a. Другой метод приближения решений задач (1), (3) и задачи (2) при $\gamma = 0$ многочленами от оператора A был предложен в [4] с менее точной оценкой отклонения, но зато для более широкого по сравнению с H_a класса начальных данных.

1. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1977, 102, № 1, с. 109—133.
2. *Суетин П. И.* Классические ортогональные многочлены.— М. : Наука, 1976.— 323 с.
3. *Caton W. B., Hille E.* Laguerre polynomials and Laplace integrals.—Duke Math. J., 1945, 12, N 2, p. 217—242.
4. *Бабин А. В.* Представление решений дифференциальных уравнений в полиномиальной форме.— Успехи мат. наук, 1983, 38, № 2, с. 228—229.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 17.02.84