УДК 517.9

Д. Я. Хусаинов, Е. А. Юнькова

Об одном методе нахождения решения уравнения Ляпунова с заданным спектром

При определении устойчивости и получении качественных характеристик линейных дифференциальных систем $\dot{x} = Ax$, $x \in R^n$ используются функции Ляпунова квадратичного вида $v(x) = (x^T, Hx)$. Симметричную положительно определенную матрицу H можно получить из уравнения Ляпунова

$$A^T H + HA = -C. \tag{1}$$

Решение уравнения — положительно определенная симметричная матрица H с собственными числами: $0 < \lambda_1(H) \leqslant \lambda_2(H) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(H)$.

Если дифференциальная система асимптотически устойчива, то при произвольной положительно определенной матрице C уравнение (1) имеет единственное решение. Интерес представляет получение матрицы H с некоторыми заданными свойствами [1, 2].

1. Нахождение решения уравнения Ляпунова с заданным спектром собственных чисел. Найдем пару C_0, H_0, где у H_0 заранее задан набор собственных чисел $0 < \lambda_1(H_0) \leqslant \leqslant \lambda_2(H_0) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(H_0)$. При умножении уравнения Ляпунова (1) на постоянную $\lambda_n(H_0)/\lambda_n(H)$ собственные числа матрицы пропорционально изменяются и наибольшее из них будет равняться $\lambda_n(H_0)$. Поэтому считаем, что наибольшее собственное число $\lambda_n(H)$ матрицы H равно заданному $\lambda_n(H_0)$.

Пусть C — некоторая фиксированная симметричная положительно определенная матрица и H—решение уравнения Ляпунова (1), причем $\lambda_n(H) = \lambda_n(H_0)$. Приведем подобным преобразованием матрицу H к диагональной и выясним допустимую область $\Omega(\varepsilon)$ изменения собственных чисел $\lambda_i = \lambda_i(H) + \varepsilon_i$, $i = \overline{1, n-1}$, при которых матрица $H(\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (1) с положительно определенной $C(\varepsilon)$.

Как известно [3], существует ортогональная матрица такая, что

$$U^T H U = \begin{pmatrix} \lambda_1(H) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2(H) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n(H) \end{pmatrix} = \Lambda(0).$$

Умножив уравнение Ляпунова (1) слева на U^T и справа на U, получим $(U^T A^T U)(U^T H U) + (U^T H U)(U^T A U) = -U^T C U$, или

$$A_1^T \Lambda(0) + \Lambda(0) A_1 = -C_1(0), \tag{2}$$

где $A_1 = U^T A U = [a_{ij}^1]_{i,j=1}^n$, $\quad C_1(0) = U^T C U = [c_{ij}^1]_{i,j=1}^n$.

Собственные числа C и $C_1(0)$ совпадают: $\lambda_i(C) = \lambda_i(C_1(0))$, $i = \overline{1, n}$. Представим полученное уравнение (2) в виде

$$A_1^T \Lambda(\varepsilon) + \Lambda(\varepsilon) A_1 = -C_1(\varepsilon), \tag{3}$$

где $\Lambda(\varepsilon) = \Lambda(0) + \Lambda_1(\varepsilon)$,

$$\Lambda_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \varepsilon_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C_1(\varepsilon) = C_1(0) + A_1^T \Lambda_1(\varepsilon) + \Lambda_1(\varepsilon) A_1. \tag{4}$$

$C_1(\varepsilon)$ — матрица симметричная в силу симметричности $C_1(0)$ и $A_1^T \Lambda_1(\varepsilon) + \Lambda_1(\varepsilon) A_1$.

Так как матрица C положительно определена, т. е. $\lambda_i(C) = \lambda_i(C_1(0)) > 0$, $i = \overline{1, n}$, то в силу непрерывной зависимости собственных чисел матрицы $C_1(\varepsilon)$ от коэффициентов, а следовательно, и от величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, линейно входящих в элементы матрицы, при достаточно малых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, собственные числа матрицы $C_1(\varepsilon)$ также будут положительными, т. е. $C_1(\varepsilon)$ положительно определена. Решая уравнение Ляпунова (1) с правой частью $C(\varepsilon) = U C_1(\varepsilon) U^T$, получим матрицу $H(\varepsilon)$, собственные числа которой будут:

$$\begin{gathered} \lambda_1(H(\varepsilon)) = \lambda_1(H) + \varepsilon_1, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda_{n-1}(H(\varepsilon)) = \lambda_{n-1}(H) + \varepsilon_{n-1}, \\ \lambda_n(H(\varepsilon)) = \lambda_n(H) \end{gathered} \tag{5}$$

Если A — асимптотически устойчивая матрица, то уравнение Ляпунова имеет единственное решение при произвольной правой части. Учитывая соотношения (5), связывающие собственные числа матрицы $H(\varepsilon)$ и H, получаем, что $H(\varepsilon)$ положительно определена при произвольных $\varepsilon_i > -\lambda_i(H)$, $i = \overline{1, n-1}$.

Область $\Omega(\varepsilon)$, т. е. границы изменения величины ε_i, $i = \overline{1, n-1}$, задается условием положительной определенности матрицы $C_1(\varepsilon)$. Раскрыв характеристическое уравнение $\det[C_1(\varepsilon) - \lambda E] = 0$, получим $\lambda^n + p_1(\varepsilon)\lambda^{n-1} + \ldots \ldots + p_{n-1}(\varepsilon)\lambda + p_n(\varepsilon) = 0$.

Границы области $\Omega(\varepsilon)$ определяются появлением хотя бы одного нулевого собственного числа. Необходимым и достаточным условием наличия у симметричной матрицы $C_1(\varepsilon)$ хотя бы одного нулевого собственного числа есть равенство нулю свободного члена [4], т. е. $p_n(\varepsilon) = \det C_1(\varepsilon) = 0$. И так как $\det C_1(0) > 0$, а точка $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{n-1} = 0$ принадлежит области $\Omega(\varepsilon)$, получаем, что

$$\Omega(\varepsilon) = \{\varepsilon:\ \det C_1(\varepsilon) \geqslant 0\}. \tag{6}$$

И если найдется такое $\varepsilon^0 = (\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots \varepsilon_{n-1}^0) \in \Omega(\varepsilon)$, что $\lambda_i(H_0) = \lambda_i(H) + \varepsilon_i^0$, $i = \overline{1, n-1}$, то задача нахождения матрицы H_0 с заданными собственными числами решается по следующему алгоритму.

1. Задаем положительно определенную симметричную матрицу C (для определенности можно положить $C = E$, где E — единичная матрица) и, решая уравнение Ляпунова (1), находим H.
2. Вычисляем собственные числа матрицы H и ортогональную матрицу U, приводящую H к диагональному виду.
3. Умножением уравнения Ляпунова на $\lambda_n(H_0)/\lambda_n(H_0)$ нормируем матрицу H. При этом максимальное собственное число ее становится равным заданному $\lambda_n(H_0)$.
4. Матрицу $C_1(0)$ получаем по формуле $C_1(0) = U^TCU$.
5. Вычисляем $\varepsilon_i = \lambda\ (H_0) - \lambda_i(H)$, $i = \overline{1, n-1}$.
6. Полученные на предыдущем шаге значения ε_i^0, $i = \overline{1, n-1}$, подставляем в выражение (4) для $C_1(\varepsilon)$.
7. Проверяем условие $\det C_1(\varepsilon) \geqslant 0$. Если условие выполняется, то переходим на шаг 8. Иначе вычисления заканчиваются. Матрицу с заданным спектром построить не удалось. Необходимо изменить спектр.
8. Вычисляем матрицу $C_0 = UC_1(\varepsilon^0)U^T$.
9. Решаем уравнение Ляпунова с матрицей C_0 в правой части.

Полученная при этом матрица H_0 — решение задачи.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема. *Для того чтобы решением уравнения Ляпунова* (1) *была симметричная положительно определенная матрица H_0 с собственными числами $\lambda_1(H_0), \lambda_2(H_0), \ldots, \lambda_n(H_0)$, достаточно, чтобы $\varepsilon^0 \in \Omega(\varepsilon)$, где $\varepsilon^0 = (\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0, \ldots, \varepsilon_{n-1}^0)$, $\varepsilon_i^0 = \lambda_i(H_0) - \lambda_i(H)$, $i = \overline{1, n-1}$, H — решение уравнения Ляпунова с произвольной положительно определенной матрицей C, $\Omega(\varepsilon) = \{\varepsilon: \det C_1(\varepsilon) \geqslant 0\}$. Матрица $C_1(\varepsilon)$ определяется выражением* (4).

2. Нахождение решения, у которого отношение наибольшего и наименьшего собственных чисел минимально. Применим рассмотренный метод к задаче нахождения матрицы H_0, у которой [2]

$$\lambda_{\max}(H_0)/\lambda_{\min}(H_0) = \inf_H \{\lambda_{\max}(H)/\lambda_{\min}(H)\}. \tag{7}$$

Рассмотрим процедуру пошагового изменения матрицы $C_1(\varepsilon)$. Предположим, что $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = \varepsilon_{n-1}$. Тогда $C_1(\varepsilon)$ имеет вид

$$C_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} c_{11}^1 - 2a_{11}^1\varepsilon_1 & c_{12}^1 - a_{12}^1\varepsilon_1 & \ldots & c_{1n}^1 - a_{1n}^1\varepsilon_1 \\ c_{21}^1 - a_{12}^1\varepsilon_1 & c_{22}^1 & \ldots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}^1 - a_{1n}^1\varepsilon_1 & c_{n2}^1 & \ldots & c_{nn}^1 \end{pmatrix}.$$

Раскрыв определитель $\det C_1(\varepsilon)$, получим относительно $\varepsilon = \varepsilon_1$ квадратное уравнение

$$\varepsilon^2 \begin{vmatrix} 0 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}^1 & c_{n2}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} - 2\varepsilon \begin{vmatrix} a_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}^1 & c_{n2}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}^1 & c_{n2}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Поскольку (см. [5])

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 \\ a_{12}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}^1 & c_{n2}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} < 0, \qquad \begin{vmatrix} c_{11}^1 & c_{12}^1 & \dots & c_{1n}^1 \\ c_{21}^1 & c_{22}^1 & \dots & c_{2n}^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1}^1 & c_{n2}^1 & \dots & c_{nn}^1 \end{vmatrix} > 0,$$

то квадратное уравнение имеет действительные корни $\mu_1 < 0$, $\mu_2 > 0$. Таким образом, область изменения ε $\Omega(\varepsilon) = \{\varepsilon : \mu_1 < \varepsilon \leqslant \mu_2\}$. Выбирая $\varepsilon_1 = \mu_2$ и проводя указанные выше преобразования, получим матрицы $C_1(\varepsilon)$, $H_1(\varepsilon)$. Характеристическими числами $H_1(\varepsilon)$ будут $\lambda_1(H_1(\varepsilon)) = \lambda_1(H) + \mu_2$, $\lambda_2(H_1(\varepsilon)) = \lambda_2(H), \dots, \lambda_n(H_1(\varepsilon)) = \lambda_n(H)$. После этого, выбрав наименьшее из собственных чисел, можно повторить процедуру.

Таким образом, задача (7) решается по следующему алгоритму.

1. Задаем положительно определенную матрицу C (для определенности можно положить $C = E$) и, решая уравнение Ляпунова (1), находим матрицу H.
2. Находим ортогональную матрицу U, приводящую H к диагональному виду, и вычисляем собственные числа матрицы H.
3. Вычисляем матрицы $C_1(0) = U^T C U$, $A_1 = U^T A U$.
4. Выбираем λ_k — наименьшее собственное число матрицы H.
5. Вычисляем коэффициенты квадратного уравнения типа (8) относительно ε_k.
6. Вычисляем μ — максимальный корень этого уравнения.
7. Подставляем $\varepsilon_k = \mu$ в выражение (4) для $C_1(\varepsilon)$, полагая $\varepsilon_j = 0$, $j \neq k$.
8. Если матрица $C_1(\varepsilon)$ неотрицательно определена, полагаем $C_1(0) = C_1(\varepsilon)$, $\lambda_k(H) = \lambda_k(H) + \varepsilon_k$ и переходим на шаг 4. Иначе переходим на шаг 9.
9. Вычисляем матрицу $C_0 = UC_1(0)U^T$ и, решая уравнение Ляпунова (1) с матрицей C_0 в правой части, находим матрицу H_0 с минимальным отношением ее максимального собственного числа к минимальному.

Процедура вычисления матрицы C выходит на границу области положительно определенных матриц. Случай, когда искомой матрице H_0 соответствует положительно определенная матрица C_0, легко выделяется вычислением спектра матрицы $A + A^T$ [6]. Алгоритм движения вдоль границы области положительно определенных матриц требует дополнительного рассмотрения.

1. *Пустовойтов Н. А.* Исследование матричных уравнений второго метода Ляпунова.— В кн.: Динамические системы и вопросы устойчивости решений дифференциальных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 95—103.
2. *Сарыбеков Р. А.* Об экстремальной квадратичной функции Ляпунова систем уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1977, № 5, с. 1159—1167.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М. : Наука, 1967.— 575 с.
4. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения.— М. : Наука, 1965.— 207 с.
5. *Чарин В. С.* Линейные преобразования и выпуклые множества.— Киев : Вища школа, 1976.— 191 с.
6. *Комаров Ю. А., Хусаинов Д. Я.* Некоторые замечания об экстремальной функции Ляпунова для линейных систем.— Укр. мат. журн., 1983, 35, № 6, с. 750—753.

Киев. гос. ун-т

Поступила 03.04.83,
после доработки — 27.01.84