УДК 518:517.948

Н. И. Ронто

Метод полиномиальных приближений при исследовании краевых задач

В данной работе для выделенного класса обыкновенных дифференциальных уравнений предлагается полиномиальная модификация развитого в [1] численно-аналитического метода исследования решений двухточечных краевых задач.

Отличительная черта метода полиномиальных приближений состоит в том, что по его схеме легко строить высшие приближения как к решениям рассматриваемых краевых задач, так и к определяющим уравнениям, неподвижные точки которых и задают начальные значения искомых решений. При этом последовательность приближенных решений аналитически представляется в виде алгебраических полиномов, удовлетворяющих заданным краевым условиям.

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

$$Ax(0) + Cx(T) = d, \tag{2}$$

где $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $f=(f_1,\ \ldots,\ f_n)$, $d=(d_1,\ \ldots,\ d_n)$ — точки n-мерного евклидова пространства E_n; A, C — постоянные матрицы и $\det C\neq 0$. Считаем, что правая часть уравнения (1) определена и непрерывна по t, x в области

$$(t,\ x)\in[0,\ T]\times D, \tag{3}$$

где D — замкнутая ограниченная область пространства E_n.

Предположим, что в области (3) функция $f(t,\ x)$ ограничена вектором M и удовлетворяет условию Липшица с матрицей K с неотрицательными компонентами:

$$|f(t,x)|\leqslant M,\quad |f(t,x')-f(t,x'')|\leqslant K|x'-x''|\quad \forall t\in[0,T], \tag{4}$$

$x,\ x',\ x''\in D$, где $|x|=(|x_1|,\ldots,|x_n|)$, а неравенство в (4) понимается покомпонентно.

Определим для каждой непрерывной функции $y_k(t)$ со значениями в D векторный интерполяционный многочлен Лагранжа степени p $f^p(t,y_k(t))=(f_1^p(t,y_k(t)),\ldots,f_n^p(t,y_k(t))$, где полином $f_i^p(t,y_k(t))=a_{0i}+a_{1i}t+\ldots+a_{pi}t^p$ степени p таков, что его значения в $p+1$ точках отрезка $[0,T]$

$$t_i=[\cos((2i-1)\pi/2(p+1))+1]/2,\quad i=1,2,\ldots,p+1, \tag{5}$$

совпадают со значениями функции $f_i(t,\ y_k(t))$. Точки (5) получены из корней полинома Чебышева первого рода $(p+1)$-й степени с помощью линейной замены, переводящей отрезок $[-1,1]$ в $[0,T]$. Предполагается также, что $f_i(t,\ y_k(t))$ как функции аргумента t удовлетворяют условию Дини, что обеспечивает равномерную сходимость соответствующих интерполяционных полиномов, построенных по узлам (5).

О существовании точного решения и о приближенном решении краевой задачи (1), (2) будем судить по последовательности функций, определяемых рекуррентным соотношением

$$x_m^{x+1}(t,x_0)=x_0+\int\limits_0^t\left[f^p(t,x_{m-1}^{p+1}(t,x_0))-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f^p(s,x_{m-1}^{p+1}(s,x_0))\,ds\right]dt+$$

$$+\frac{t}{T}[C^{-1}d-(C^{-1}A+E)x_0],\quad x_0^{p+1}(t,x_0)=x_0,\quad m=1,2,\ldots. \tag{6}$$

Все функции этой последовательности — многочлены $p+1$-й степени, удовлетворяющие краевым условиям (2).

Рассмотрим множество D_β точек $x_0\in E_n$, содержащееся в области D вместе со своей β-окрестностью, где $\beta=T(M+L_p)/2+\beta_1$, $\beta_1=|C^{-1}d-(C^{-1}A+E)x_0|$, $L_p=(5+\lg p)\max\limits_j E_p(f(t,x_j^{p+1}(t,x_0)))=(5+\lg p)(\max\limits_j E_p(f_1(t,x_j^{p+1}(t,x_0))),\ldots,\max\limits_j E_p(f_n(t,x_j^{p+1}(t,x_0))))$, $E_p(f_k(t,x_j^{p+1}(t,x_0)))$, $k=1,2,\ldots,n$, — наилучшее равномерное приближение функции $f_k(t,x_j^{p+1}(t,x_0))$ в классе полиномов степени не выше p.

Рассматриваемый метод можно обосновать для определенного класса краевых задач. Предположим, что

$$D_\beta\neq\varnothing \tag{7}$$

и все собственные значения $\lambda_j(Q)$ матрицы $Q=TK/\pi$ лежат в круге единичного радиуса

$$|\lambda_j(Q)|<1,\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{8}$$

Л е м м а 1. *Пусть функция* $f(t,\ x)$ *определена в области* (3), *непрерывна по* t, x *и удовлетворяет условиям* (4), (7), (8).

Тогда последовательность алгебраических полиномов степени $p+1$, *найденная по* (6), *при* $m,\ p\to\infty$ *равномерно сходится относительно*

$$(t,\ x_0)\in[0,\ T]\times D_\beta \tag{9}$$

к функции $x^*(t, x_0)$, определенной в области (9) и удовлетворяющей системе интегральных уравнений

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left\{ f(t, x(t, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x(s, x_0))\, ds + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{T} \left[C^{-1}d - (C^{-1}A + E)\, x_0\right] \right\} dt. \tag{10}$$

При этом для всех $m,\ p \geqslant 1$ и $t \in [0, T]$ справедлива оценка погрешности

$$|x_m^{p+1}(t, x_0) - x^*(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t)\, \varepsilon_m^p, \tag{11}$$

где

$$\varepsilon_m^p = W(x_0, t) + \left(\sum_{i=0}^{m-1} Q^i + QB_1\right) L_p, \quad \alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right),$$

$$W(x_0, t) = Q^m \left[(E - Q)^{-1} + \sum_{j=1}^{3} \delta_{jm} B_j\right] M +$$

$$+ KQ^{m-1} \left[(E - Q)^{-1} + \delta_{1m} QB_1 + \sum_{j=1}^{3} \delta_{j+1, m} B_j\right] \beta_1,$$

$B_j,\ j = 1, 2, 3,$ — известные матрицы, зависящие от Q; δ_{jm} — символ Кронекера.

Доказательство. Согласно [1], предел $x^*(t, x_0)$ равномерно сходящейся последовательности функций

$$x_m(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \left[f(t, x_{m-1}(t, x_0)) - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x_{m-1}(s, x_0))\, ds \right] dt +$$

$$+ \frac{t}{T} \left[C^{-1}d - (C^{-1}A + E)\, x_0\right], \quad x_0(t, x_0) = x_0, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

удовлетворяет интегральному уравнению (10), причем

$$|x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t)\, W(x_0, t). \tag{13}$$

Методом математической индукции устанавливается, что для всех $m,\ p \geqslant 0$, любых $t \in [0, T]$ и каждого $x_0 \in D_\beta$ последовательные полиномиальные приближения $x_m^{p+1}(t, x_0)$ принадлежат области D.

Оценка (11) получается из неравенства

$$|x^*(t, x_0) - x_m^{p+1}(t, x_0)| \leqslant |x^*(t, x_0) - x_m(t, x_0)| + |x_m(t, x_0) - x_m^{p+1}(t, x_0)| \tag{14}$$

с учетом (13). Для второго слагаемого в правой части неравенства (14) на основании соотношений (6), (12) и свойств, построенных по узлам (5) интерполяционных полиномов Лагранжа, можно получить, что $|x_m(t, x_0) - x_m^{p+1}(t, x_0)| \leqslant \alpha_1(t) \left(\sum_{i=0}^{m-1} Q^i + QB_1\right) L_p$.

При условиях, наложенных на функцию $f(t, x)$ при $m,\ p \to \infty$, правая часть неравенства (11) стремится к нулю, что и определяет равномерную сходимость полиномиальных приближений $x_m^{p+1}(t, x_0)$ к предельной функции $x^*(t, x_0)$.

Если в равенстве (6) перейти к пределу при $m,\ p \to \infty$, видно, что $x^*(t, x_0)$ — действительно решение системы уравнений (10). Лемма доказана.

Известно [1], что начальные значения решения краевой задачи (1), (2) задаются корнями определяющего уравнения

$$\Delta(x_0) = \frac{1}{T}\left[C^{-1}d - (C^{-1}A + E)\, x_0\right] - \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x^*(t, x_0))\, dt = 0. \tag{15}$$

Исследуем существование точного решения краевой задачи (1), (2) на основании свойств приближенных систем определяющих уравнений

$$\Delta^p(x_0) = \frac{1}{T}[C^{-1}d - (C^{-1}A + E)x_0] - \frac{1}{T}\int_0^T f^p(t, x^*(t, x_0))\,dt = 0, \quad (16)$$

$$\Delta_m^p(x_0) = \frac{1}{T}[C^{-1}d - (C^{-1}A + E)x_0] - \frac{1}{T}\int_0^T f^p(t, x_m^{p+1}(t, x_0))\,dt = 0. \quad (17)$$

Лемма 2. *При предположениях леммы 1 для всех $x_0 \in D_\beta$ справедливо неравенство*

$$|\Delta(x_0) - \Delta_m^p(x_0)| \leqslant \frac{T}{3} K\varepsilon_m^p + L_p.$$

Доказательство. Из (15), (17) следует

$$|\Delta(x_0) - \Delta_m^p(x_0)| \leqslant \frac{1}{T}\int_0^T |(f(t, x^*\ t, x_0)) - f(t, x_m^{p+1}(t, x_0))) +$$

$$+ (f(t, x_m^{p+1}(t, x_0)) - f^p(t, x_m^{p+1}(t, x_0)))|\,dt.$$

В силу свойств наилучших приближений $|f(t, x_m^{p+1}(t, x_0)) - f^p(t, x_m^{p+1}(t, x_0))| \leqslant (5 + \lg p)E_p(f(t, x_m^{p+1}(t, x_0))) \leqslant L_p$. Поэтому с учетом (4), (11) $|\Delta(x_0) - \Delta_m^p(x_0)| \leqslant \frac{1}{T}K\varepsilon_m^p\int_0^T \alpha_1(t)\,dt + L_p = \frac{T}{3}K\varepsilon_m^p + L_p$, что и требовалось доказать.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Определяющая функция $\Delta^p(x_0)$ вида* (16) *непрерывна для системы дифференциальных уравнений* (1), *удовлетворяющей в области* (3) *условиям леммы 1, причем*

$$|\Delta^p(x_0)| \leqslant M + L_p + M_1, \quad |\Delta^p(x_0') - \Delta^p(x_0'')| \leqslant 2L_p + \Big\{\frac{1}{T}R + K\Big[E + B +$$

$$+ \frac{TK}{3}(E - Q)^{-1}\Big](E + R)\Big\}|x_0' - x_0''| \quad \forall x_0,\ x_0',\ x_0'' \in D_\beta, \quad (18)$$

где

$$B = [(10\pi^3 - 30\pi^2)T^2K^2 + (3\pi^3 - 30\pi)T^3K^3 + (\pi^3 - 30)T^4K^4]/90\pi^3,$$

$$R = |C^{-1}A + E|, \quad M_1 = \max_{x_0 \in D_\beta}(|C^{-1}d - (C^{-1}A + E)x_0|/T).$$

Доказательство. Непосредственно из свойств функции $x^*(t, x_0)$ и условий теоремы следует непрерывность и ограниченность функции $\Delta^p(x_0)$ в области D_β.

Далее,

$$|\Delta^p(x_0') - \Delta^p(x_0'')| \leqslant \frac{1}{T}R|x_0' - x_0''| + \frac{1}{T}\int_0^T |(f^p(t, x^*(t, x_0')) - f(t, x^*(t, x_0'))) +$$

$$+ (f(t, x^*(t, x_0')) - f(t, x^*(t, x_0''))) + (f(t, x^*(t, x_0'')) - f^p(t, x^*(t, x_0'')))|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T}R|x_0' - x_0''| + 2L_p + \frac{1}{T}K\int_0^T |x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')|\,dt. \quad (19)$$

Как и в теореме 5.2 из [2], можно получить что $|x^*(t, x_0') - x^*(t, x_0'')| \leqslant \leqslant \Big[E + \alpha_1(t)K\sum_{m=0}^{\infty} q_m(TK)^m\Big](E + R)|x_0' - x_0''|$, где $q_0 = 1$, $q_1 = 1/3$, $q_2 =$

$= 1/10$, $q_3 = 1/30$, $q_m \leqslant 1/\pi^m$, $m = 4, 5, \ldots$. Подставляя последнее неравенство в (19) и проделывая соответствующие выкладки, получим оценку (18). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть система дифференциальных уравнений* (1) *в области* (3) *удовлетворяет условиям* (4), (7), (8). *Кроме того, существует замкнутая выпуклая область $D_1 \subset D_\beta$, в которой приближенная система определяющих уравнений* (17) *для некоторых m, p имеет единственное изолированное решение $\bar{x}_0$ ненулевого индекса $\Delta_m^p(x_0) = 0$ и на границе Γ_{D_1} области D_1 выполняется неравенство* $\inf\limits_{x \in \Gamma_{D_1}} |\Delta_m^p(x)| > \frac{T}{3} K\varepsilon_m^p + L_p$.

Тогда краевая задача (1), (2) *имеет единственное решение $x^* = x^*(t)$, начальное значение которого — $x^*(0) \in D_1$.*

Доказательство основано на установлении с помощью леммы 2 и теоремы 1 гомотопности на Γ_{D_1} полей Δ_m^p и Δ, порожденных отображениями (17), (15), и может быть проведено подобно доказательству теоремы 7.1 из [2].

1. *Самойленко А. М., Ронто В. А.* О численно-аналитическом методе решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 4, с. 467—475.
2. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища школа, 1976.— 180 с.

Ин-т пробл. моделирования
в энергетике АН УССР, Киев

Поступила 15.10.82