УДК 517.936:513.7

Ю. А. Митропольский, А. К. Прикарпатский
В. Гр. Самойленко

Об интегрируемости идеалов в алгебрах Грассмана на дифференцируемых многообразиях и некоторые их приложения

1. В последнее время методы дифференциальной геометрии стали особенно популярны в теоретической и математической физике в связи с успехами, достигнутыми на их основе в теории вполне интегрируемых динамических систем [1—3]. Идея инвариантного описания свойств дифференциальных уравнений в частных производных при помощи внешнего дифференциально-геометрического исчисления была положена французским математиком Э. Картаном в основание созданной им геометрической теории уравнений в частных производных [4, 5]. При таком подходе основная информация о свойствах уравнений содержится в специально конструируемом идеале I в алгебре Грассмана $\Lambda(M)$ дифференциальных форм на многообразии переменных M, причем задача интегрируемости этого идеала эквивалентна задаче интегрирования исходных уравнений [6]. В частности, если M — дифференцируемое многообразие размерности $\dim M = m$ и на M задана система Пфаффа P ранга $p \leqslant m$, критерий интегрируемости этой системы в терминах идеала $I(P)$, порожденного системой P в алгебре Грассмана $\Lambda(M)$ дифференциальных форм на M, дает теорема Фробениуса [7, с. 146; 8, с. 111; 9].

В предположении, что нам задана не система Пфаффа, а однородный идеал I в алгебре Грассмана $\Lambda(M)$, условие интегрируемости этого идеала дает известная теорема Картана [7, с. 147], утверждающая, что если идеал I однороден, невырожден и замкнут, т. е. $\mathbf{d}I \subset I$, где $\mathbf{d}$ — операция внешнего дифференцирования в $\Lambda(M)$, то он интегрируем. (По поводу других направлений развития теории Картана для дифференциальных форм на многообразиях следует отметить [10, 11]).

В настоящей работе мы предлагаем некоторое обобщение конструкции Э. Картана, ведущее к построению критерия интегрируемости идеала I в алгебре Грассмана $\Lambda(M)$ при более слабых ограничениях, а также приводим некоторые классические применения.

2. Введем некоторые обозначения и сформулируем ряд определений.

Обозначим: $\Gamma(M)$ — множество векторных полей на многообразии M; $\Lambda^{(p)}(M)$ — множество дифференциальных p-форм на M, $T_y(M)$ — касательное пространство над M в точке $y \in M$; $\Gamma(y)$ — подпространство дифференцируемых элементов $X(y) \in T_y(M)$; $I(y)$ — значение идеала I в точке $y \in M$, $I(y) \in \Lambda_y(M)$; $i(X(y))$ — внутреннее произведение на вектор $X(y) \in T_y(M)$ в алгебре внешних форм на $T_y(M)$; i_x — внутреннее произведение на векторное поле $X \in \Gamma(M)$ в алгебре Грассмана $\Lambda(M)$; $\lhd$ и $\rhd$ — начало и соответственно конец доказательства.

Определение 1. *Характеристическим подпространством однородного идеала I алгебры $\Lambda(M)$ в точке $y \in M$ называется подпространство $C_y(I)$ $\Gamma \subset (y)$ — пересечение ассоциированных подпространств $\mathscr{A}(I(y))$ и $\mathscr{A}(\mathscr{L}I(y))$, где*

$$\mathscr{A}(I(y)) = \{X(y) \in \Gamma(y) : i(X(y))\, I(y) \subset I(y)\}, \quad \mathscr{A}(\mathscr{L}I(y)) = \{X(y) \in \Gamma(y) : i(X(y))\, \mathbf{d}I(y) + di(X(y))\, I(y) \subset I(y)\}, \; C_y(I) = \mathscr{A}(I(y)) \cap \mathscr{A}(\mathscr{L}I(y)).$$

Определение 2. *Характеристической системой идеала I алгебры $\Lambda(M)$ в точке $y \in M$ называется подпространство $C_y^*(I) = C_y^{\perp}(I)$ ортогональное к подпространству $C_y(I)$.*

Определение 3. *Классом идеала I в точке $y \in M$ называется число* $\dim C_y^*(I)$.

Определение 4. *Характеристическим векторным полем идеала I называется такое поле $X \in \Gamma(M)$, что $X(y) \in C_y(I)$ $\forall y \in M$.*

Множество $\mathfrak{S}(I)$ всех характеристических векторных полей — подмодуль в $\Gamma(M)$, устойчивый относительно локально-конечных сумм.

Определение 5. *Характеристической формой Пфаффа идеала I называется форма $\omega \in \Lambda^{(1)}(M)$ такая, что $\omega(y) \in C_y^*(I)$ $\forall y \in M$.*

Очевидно, что множество $\mathfrak{S}^*(I)$ всех характеристических форм Пфаффа — подмодуль $\Lambda^{(1)}(M)$, устойчивый относительно локально-конечных сумм.

Определение 6. *Идеал I называется регулярным, если $C_y^*(I) = \mathfrak{S}_y^*(I)$ $\forall y \in M$.*

В общем случае, очевидно, $C_y^*(I) \supseteq \mathfrak{S}_y^*(I)$.

3. *Исходя из введенных выше определений, можно дать более детальную характеристику введенных геометрических объектов.*

Лемма 1. *Векторное поле $X \in \Gamma(M)$ будет характеристическим тогда и только тогда, когда $i_X I \subset I$, $\mathcal{L}_X I \subset I$, где $\mathcal{L}_X = i_X \mathrm{d} + \mathrm{d} i_X$ — производная Ли.*

Доказательство очевидным образом следует из определений 1 и 4.

Следствие. *Векторные поля $X \in \mathfrak{S}(I)$ образуют алгебру Ли над кольцом Д (M) дифференцируемых функций на многообразии $M: \forall X, Y \in \mathfrak{S}(I)$ $[X, Y] \in \mathfrak{S}(I)$; $\forall f \in$ Д (M) $fX \in \mathfrak{S}(I)$.*

$\lhd$ Имеем: $i_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, i_Y]$, $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$, $\mathcal{L}_{fX} = f\mathcal{L}_X + df \wedge i_X$, $i_{fX} = f i_X$. Объединение этих формул доказывает следствие. $\rhd$

Установление эффективного критерия регулярности идеала I — пока сложная задача. Но справедливо следующее утверждение: если $\alpha \in \Lambda^{(1)}(M)$ и $I(\alpha)$ — идеал, порожденный формой α $\left(I(\alpha) = \sum_{p \geqslant 0} \alpha \wedge \Lambda^{(p)}(M)\right)$, то идеал $I(\alpha)$ регулярный. Надо показать, что $C_y^*(I(\alpha)) = \mathfrak{S}_y^*(I(\alpha))$ $\forall y \in M$. Построим в $T_y^*(M)$, где $T_y^*(M)$ — кокасательное пространство над M, подпространство $\Gamma_y^* = \{\alpha(y)\} + \{i(\overline{X}(y))\, \mathrm{d}\alpha(y)\}$, $\overline{X}(y) \in \mathcal{A}(I(\alpha)(y))$. Легко показать, что $\Gamma_y^* \equiv C_y^*(I(\alpha))$ $\forall y \in M$. Кроме того, $\dim C_y^*(I(\alpha))$, как функция от переменной $y \in M$, полунепрерывна снизу и принимает целочисленные значения. Отсюда следует, что $\forall \omega_y \in C_y^*(I(\alpha))$ в некоторой окрестности $U \ni y$ существует 1-форма $\omega \in \Lambda^{(1)}(M)$ с такими свойствами: $\omega(y) = \omega_y$, $\omega(z) \in C_z^*(I(\alpha))$ $\forall z \in U$. Используя этот факт, а также разбиение единицы $\{\theta_1, \theta_2\}$ для $V \ni y$, $\overline{V} \subset U$ и $M \setminus U$, находим, что 1-форма $\theta_1\omega$ продолжается до 1-формы (нулем на $M \setminus U$) на всем M, т. е. $\theta_1\omega \in \mathfrak{S}^*(I(\alpha))$. Итак, вследствие того, что $(\theta_1\omega)(y) = \omega_y \in C_y^*(I(\alpha))$, $C_y^*(I(\alpha)) = \mathfrak{S}_y^*(I(\alpha))$.

Замечание. Для дифференциальной формы $\alpha \in \Lambda^{(p)}(M)$, $p \geqslant 2$, аналогичное доказательство регулярности не проходит.

4. Изучим интегрируемость идеала I. Будем исходить из следующих определений.

Определение 7. *Интегральным многообразием регулярного идеала I постоянного класса $m - p$ называется пара объектов (V^p, f), где $f: V^p \to M$ — инъективная иммерсия многообразия V^p в M такая, что $f^* I = 0$.*

Определение 8. *Идеал I называется интегрируемым, если $\forall y \in M$ существует интегральное многообразие (V^p, f) такое, что $f(V^p) \ni y$.*

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть I — регулярный идеал постоянного класса $m - p$. Тогда характеристическая система $\mathfrak{S}(I)$ векторных полей на M задает интегрируемую дифференциальную систему* (см. [1, с. 142]) *размерности p, а сам идеал интегрируем.*

$\lhd$В силу регулярности идеала I $\mathfrak{S}^*(I) = \mathfrak{S}^{\perp}(I)$. Это следует из леммы.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{X}$ — дифференциальная система размерности p на M. Тогда $\mathcal{X}^{\perp} = \{\alpha \in \Lambda^{(1)}(M) : \alpha(X) = 0$ $\forall X \in \mathcal{X}\}$ задает систему форм Пфаффа ранга $m - p$, $m = \dim M$, на всем многообразии M.*

$\lhd$ Для доказательства леммы построим разбиение единицы $\{\theta_i\}$ на многообразии M, которое отвечает некоторому тласу $\{(U_i, \varphi_i)\}$, $i \in K$ — некоторое множество индексов. Тогда представление $\mathscr{X} = \sum_{i \in K} (\theta_i \mathscr{X})$ задает дифференциальные системы в каждом $U_i \subset M$ ($\operatorname{supp} \theta_i \subset U_i$), где существует базис векторов, порождающий $\sum_{i \in K} (\theta_i \mathscr{X})|_{U_i}$. Такой базис можно выбрать в силу локальной конечности разбиения $\{\theta_i\}$, $i \in K$, а также постоянной размерности дифференциальных систем $\mathscr{X}|_{U_i}$, $i \in K$. Итак, на всем многообразии M существует базис $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ векторных полей в $\Gamma(M)$ такой, что $\{X_1, X_2, \dots, X_p\}$ порождают $\mathscr{X}$ в каждой точке $y \in M$. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ — дуальный базис в $\Lambda^{(1)}(M)$ к базису $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ в $\Gamma(M)$. Тогда, очевидно, формы Пфаффа $\{\alpha_{p+1}, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_m\}$ порождают $\mathscr{X}^\perp$ и $\mathscr{X} = \{X \in \Gamma(M) : \alpha(X) = 0 \ \forall \alpha \in \mathscr{X}^\perp\}$, т. е. система 1-форм $\mathscr{X}^\perp \subset \Lambda^{(1)}(M)$ есть система Пфаффа постоянного ранга $m - p \cdot \triangleright$.

Далее, если задано, что $\dim \mathfrak{S}^*(I) = m - p \ \forall y \in M$, то $\dim \mathfrak{S}_y(I) = p$ для $\forall y \in M$. Кроме того, $\mathfrak{S}(I)$ — алгебра Ли векторных полей на M. Тогда по теореме Фробениуса дифференциальная система $\mathfrak{S}(I)$ размерности p интегрируема на M, т. е. существует такое интегральное многообразие (V^p, f), что $f_* T_y(V^p) = \mathfrak{S}_{f(y)}(I) \ \forall y \in V^p$. Отсюда и из условия $i_X I \subset I$, $\mathscr{L}_X I \subset I$ $\forall X \in \mathfrak{S}(I)$, находим, что $f^* I = 0$ на V^p, т. е. (V^p, f), $f: V^p \to M$ — интегральное многообразие для идеала I, т. е. идеал I интегрируем на M. $\triangleright$ Как следствие получаем теорему Картана [7].

Следствие. *Пусть I — однородный, регулярный и замкнутый идеал ($\mathrm{d}I \subset I$) постоянного класса $m - p$. Тогда идеал I — интегрируемый на M.*

Замечание. *Свойство «невырожденности» идеала I в смысле Э. Картана* [7, с. 147], *очевидно, эквивалентно регулярности идеала и постоянству класса только в случае замкнутых идеалов.*

5. Пусть $I(\alpha)$ — идеал алгебры Грассмана $\Lambda(M)$, порожденный 1-формой $\alpha \in \Lambda^{(p)}(M)$. Построим фактор-пространство $\operatorname{def} \alpha(y) = \{X(y) \in \mathscr{A}(I(\alpha)(y)) : i(X(y))\, \mathrm{d}\alpha(y) = f(y)\, \alpha(y)\} / \mathscr{A}(I(\mathrm{d}\alpha)(y))$, $\mathscr{A}(I(\mathrm{d}\alpha)(y)) = \{X(y) \in \Gamma(y) : i(X(y))\, \mathrm{d}\alpha(y) = 0\}$, $f \in Д(M)$.

Определение 8. *Индексом дефекта дифференциальной формы $\alpha \in \Lambda^{(p)}(M)$ в точке $y \in M$ называется число* $\dim \operatorname{def} \alpha(y)$.

Легко усмотреть, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Число* $\dim \operatorname{def} \alpha(y)$ *принимает целочисленные значения, равные* 0 *или* 1.

Установим аналог теоремы Дарбу (см. [1, с. 153, 2, с. 119]), пользуясь полученными выше результатами.

Теорема 2. *Пусть $\alpha \in \Lambda^{(1)}(M)$ — форма Пфаффа на M, не имеющая особенностей, и пусть класс идеала $I(\alpha)$ постоянен и равен числу $2s+1$ ($2s$). Тогда в некоторой открытой окрестности $U \ni y$ существуют дифференцируемые функции $\{y_1, y_2, \dots, y_{2s+1}\}$,* $\dim \operatorname{def} \alpha(y) = 0$ ($\{y_1, y_2, \dots, y_{2s}\}$, $\dim \operatorname{def} \alpha(y) = 1$) *такие, что* $y_1(y) = y_2(y) = \dots = y_{2s+1}(y) = 0$ ($y_1(y) = y_2(y) = \dots = y_{2s}(y) = 0$) *и* $\alpha|_U = dy_1 + y_2 dy_3 + \dots + y_{2s} dy_{2s+1}$ ($\alpha|_U = (1 + y_1) dy_2 + y_3 dy_4 + \dots + y_{2s-1} dy_{2s}$).

$\triangleleft$ Докажем сначала следующие две леммы.

Лемма 3. *Пусть форма $\alpha \in \Lambda^{(1)}(M)$ порождает идеал $I(\alpha)$ постоянного класса $2s+1$ на M, а индекс дефекта* $\dim \operatorname{def} \alpha(y) = 0$ $\forall y \in M$. *Тогда $\forall y \in M$ $\exists f \in Д(V)$, $f(y) = 0$, где $V \ni y$ — некоторая окрестность, причем форма $\alpha_1 = \alpha|_V - df$ не имеет особенностей,* $\dim \operatorname{def} \alpha_1(y) = 1$ *и идеал $I(\alpha_1)|_V$ имеет постоянный класс $2s - 1$.*

Лемма 4. *Пусть $\alpha \in \Lambda^{(1)}(M)$ — форма без особенностей, порождает идеал $I(\alpha)$ постоянного класса $2s - 1$ и индекса дефекта* $\dim \operatorname{def} \alpha(y) = 1$. *Тогда $\forall y \in M$ существует дифференцируемая функция $g \in Д(W)$, где $W \ni y$ — некоторая окрестность в M, причем $g(y) = 0$ и форма $\alpha_2 = (1 + g)\alpha|_W$*

порождает идеал $I(\alpha_2)|_W$ *постоянного класса* $2s-1$ *на* W, *не вырождена и* $\dim \operatorname{def} \alpha_2(y) = 0$.

$\lhd$ Доказательство леммы 3. Так как индекс дефекта формы α равен нулю, то легко устанавливаем, что характеристические системы идеалов $I(\alpha \wedge (d\alpha)^s)$ и $I(\alpha)$, а также идеалов $I((d\alpha)^s)$ и $I(d\alpha)$ соответственно равны: $\mathfrak{S}^*(I(\alpha \wedge (d\alpha))^s) = \mathfrak{S}^*(I(\alpha))$, $\mathfrak{S}^*(I(d\alpha)^s) = {}^*(I(d\alpha))$.

Система форм $\mathfrak{S}^*(I(\alpha))$ имеет постоянную размерность $2s+1$, что ведет к существованию в некоторой окрестности $V \ni y$ таких локальных координат $\{y_1, y_2, \ldots, y_{2s+1}\}$ $(y_1(y) = y_2(y) = \ldots = y_{2s+1}(y) = 0)$, что 1) $(d\alpha)^s|_V = dy_2 \wedge dy_3 \wedge \ldots \wedge dy_{2s+1}$, 2) $\alpha \wedge (d\alpha)^s|_V = dy_1 \wedge dy_2 \wedge \ldots \wedge dy_{2s+1}$, 3) $\alpha|_V = dy_1 + \sum\limits_{i=2}^{2s+1} a_i dy_i$, причем $\sum\limits_{i=2}^{2s+1} a_i^2(y) \neq 0$ (ибо в противном случае $d\alpha|_V = 0$ и класс идеала $I(\alpha)$ не равен $2s+1$). Форма $\alpha_1 = \alpha|_V - dy_1$ не имеет особенностей на V и обладает свойствами: 1) $(d\alpha_1)^s = (d\alpha)^s \neq 0$, 2) $(d\alpha_1)^s \wedge \alpha_1 = 0$, т. е. идеал $I(\alpha_1)|_V$ имеет класс $2s-1$ и $\dim \operatorname{def} \alpha_1(y) = 1$. $\rhd$

$\lhd$ Доказательство леммы 4. Пространство характеристических форм $\mathfrak{S}^*(I(d\alpha)^s) = \mathfrak{S}^*(I(d\alpha))$ имеет постоянную размерность $2s$, и пространство характеристических векторных полей $\mathfrak{S}(I(d\alpha)^s) = \mathfrak{S}(I(d\alpha)) = \mathfrak{S}^*(I(d\alpha))^\perp$ — интегрируемая дифференциальная система размерности $m-2s$. Пусть $\mathfrak{R}^*$ — множество таких форм Пфаффа на M, что $\forall \omega \in \mathfrak{R}^*: \omega(y) \in \mathscr{A}^\perp(I(\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1})(y))$ $\forall y \in M$. Множество $\mathfrak{R}^*$ — подмодуль в $\Lambda^{(1)}(M)$, устойчивый относительно локально конечных сумм своих элементов. Поскольку форма $\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}(y)$ приводит к идеалу $I(\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}(y))$ с ассоциированной системой $\mathscr{A}^\perp(I(\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}(y))$ размерности $2s-1$, то легко показать, что выполняется условие типа регулярности идеала $I(\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1})$ в $y \in M: \mathscr{A}^\perp(I(\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}))(y)) = \mathfrak{R}^*_y$. Справедливо также, что $\mathfrak{R}^* \subset \mathfrak{S}^*(I(d\alpha)^s)$.

Построим следующую дифференциальную систему постоянной размерности $m-2s+1: \mathfrak{R} = \{X \in \Gamma(M): i_X(\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}) = 0\}$. Эта система двойственна (ортогональна) к $\mathfrak{R}^*$, т. е. $\mathfrak{R}^\perp = \mathfrak{R}^*$, кроме того, она интегрируема, т. е. $\mathfrak{R}$ — алгебра Ли: $\forall X, Y \in \mathfrak{R}$ $i_{[X,Y]}(\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}) = -i_Y d i_X(\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}) - i_Y i_X (d\alpha)^s = -i_Y i_X (d\alpha)^s = 0$, так как $\mathfrak{S}((d\alpha)^s) \subset \mathfrak{R}$ (в силу равенства индекса дефекта формы α единице). Итак, существует такая система локальных координат $\{z_1, z_2, \ldots, z_m\}$ в некоторой окрестности $W \ni y$, что $z_1(y) = z_2(y) = \ldots z_m(y) = 0$ и 1) $(d\alpha)^s|_W = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_{2s}$, 2) $(\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1})|_W = b\,dz_2 \wedge dz_3 \wedge \ldots \wedge dz_{2s}$, $b(z) \neq 0$ $\forall z \in W$. (Так как $\mathfrak{R}^*_y$ имеет базис $dz_2, \ldots, dz_{2s}$ из $2s-1$ элемента и форма $\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}$ имеет степень $2s-1$, то $\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}|_W$ строится однозначно через базис $dz_2, dz_3, \ldots, dz_{2s}$ и некоторую функцию $b(z)$ в виде $\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}|_W = b(z)\, dz_2 \wedge \ldots \wedge dz_{2s}$, $b \neq 0$). Если h — дифференцируемая функция на W и $\alpha_2 = h\alpha|_W$, то $\alpha_2 \wedge (d\alpha_2)^{s-1} = h^s(\alpha \wedge (d\alpha)^{s-1})|_W$, $(d\alpha_2)^s = h^{s-1}[s\,dh \wedge \alpha \wedge (d\alpha)^{s-1}]|_W + h^s (d\alpha)^s|_W$. Взяв $h = 1 + g$, $g = \exp(-B/s) - 1$, $B = \int\limits_0^z b^{-1} dz_1$ получим, что $\alpha_2 = (1+g)\alpha|_W$ порождает идеал $I(\alpha_2)|_W$ класса $2s-1$ и $g(y) = 0$, причем $\dim \operatorname{def} \alpha_2(y)|_W = 0$. $\rhd$

Переходим к доказательству теоремы 2, используя индукцию по классу идеала $I(\alpha)$ формы Пфаффа $\alpha \in \Lambda^{(1)}(M)$. Очевидно, форма постоянного класса нуль является нулевой. Предположим, что $I(\alpha)$ имеет постоянный класс $2s+1$ и $\dim \operatorname{def} \alpha(y) = 0$ $\forall y \in M$. Тогда в некоторой окрестности $V \ni y$ $\exists f \in Д(V)$, $f(y) = 0$, что форма $\alpha_1 = \alpha|_V - df$ не имеет особенностей при $s>0$ и имеет постоянный класс $2s-1$ $\forall y\in V$. Теперь, в силу индукции, в некоторой окрестности $U\subset V$, $U\ni y$, мы можем найти $2s$ функций $\{g_1, g_2,\dots, g_{2s}\}$ $(g_1(y)=g_2(y)=\dots=g_{2s}(y)=0)$ таких, что $\alpha_1|_U=(1+g_1)\,dg_2+$ $+g_3dg_4+\dots+g_{2s-1}dg_{2s}$. Положим $y_1=f+g_2$ $(y_1=f$, если $s=0)$, $y_i=$ $=g_{i-1}$, $i=\overline{2, 2s+1}$. Эти функции равны нулю в точке $y\in M$ и $\alpha|_U=$ $=dy_1+y_2dy_3+\dots+y_{2s}dy_{2s+1}$.

Предположим теперь, что идеал $I(\alpha)$ имеет постоянный класс $2s+1$, $\dim\operatorname{def}\alpha(y)=1$ и форма α не имеет особенностей. Тогда в некоторой окрестности $W\ni y$ существует такая дифференцируемая функция $g\in Д(W)$, $g(y)=0$, что форма $\alpha_2=(1+g)\,\alpha|_W$ порождает идеал $I(\alpha_2)|_W$ постоянного класса $2s+1$, $\dim\operatorname{def}\alpha_2(y)=0$ $\forall y\in W$. Таким образом, в некоторой окрестности $U\subset W$, $U\ni y$, существуют такие дифференцируемые функции $\{f_1, f_2,\dots, f_{2s+1}\}$ $(f_1(y)=f_2(y)=\dots=f_{2s+1}(y)=0)$, что $\alpha_2|_U=df_1+f_2df_3+\dots$ $\dots+f_{2s}df_{2s+1}$. Если $y_1=-g/(1+g)$, $y_{2i+1}=f_{2i}/(1+g)$, $y_{2i}=f_{2i-1}$, $i=$ $=\overline{1, s+1}$, то $y_1(y)=y_2(y)=\dots=y_{2s+2}(y)=0$ и $\alpha|_U=(1+y_1)\,dy_2+$ $+y_3dy_4+\dots+y_{2s+1}dy_{2s+2}$, что и доказывает теорему. $\triangleright$

Замечания. 1. Функции y_i, $i=\overline{1, 2s+2}$, введенные выше, независимы в точке $y\in M$. 2. Если форма Пфаффа α имеет нулевой индекс дефекта и порождает идеал $I(\alpha)$ постоянного класса, то α не имеет особенностей на всем M; если форма имеет индекс дефекта равный единице, то α может иметь особенности и приведенное доказательство не проходит.

Из теоремы 2 прямо следует такое утверждение.

Утверждение 2. *Пусть ω — замкнутая дифференциальная форма степени 2, порождающая идеал $I(\omega)$ постоянного класса $2s$ на M. Тогда для произвольной точки $y\in M$ существуют $2s$ дифференцируемых функций $\{y_1, y_2,\dots, y_{2s}\}$, заданных в некоторой окрестности $U\ni y$, таких, что $y_1(y)=y_2(y)=\dots=y_{2s}(y)=0$ и $\omega|_U=dy_1\wedge dy_2+dy_3\wedge dy_4+\dots$ $\dots+dy_{2s-1}\wedge dy_{2s}$.*

$\triangleleft$ По лемме Пуанкаре [1, с. 132] существует форма Пфаффа α в некоторой окрестности $V\ni y$ такая, что $d\alpha=\omega|_V$. Класс идеала $I(\alpha)$ в точке y равен $2s-1$ либо $2s+1$. Пусть сперва $2s<m$, а $f\in Д(M)$ такая функция, что класс идеала $I(\alpha+df)$ уже будет равным $2s+1$ в некоторой окрестности $W\subset V$, $W\ni y$, и индекс дефекта $\dim\operatorname{def}[\alpha(y)+df(y)]|_W=0$. Тогда в некоторой окрестности $U\subset W$, $U\ni y$, существуют такие гладкие функции $\{y_1, y_2,\dots, y_{2s+1}\}$, что $y_1(y)=y_2(y)=\dots y_{2s+1}(y)=0$ и $(\alpha+df)|_U=$ $=y_1dy_2+y_3dy_4+\dots+y_{2s-1}dy_{2s}+dy_{2s+1}$, откуда $d\alpha|_U=\omega_U=|dy_1\wedge dy_2+\dots$ $\dots+dy_{2s-1}\wedge dy_{2s}$. Если же $2s=m$, то можно считать, что $\dim\operatorname{def}\alpha(y)=1$ и форма α не имеет особенностей в некоторо окрестности $W'\subset V$, $W'\ni y$, и что существует $m=2s$ таких функций $\{z_1, z_2,\dots, z_{2s}\}$ в некоторой окрестности $U'\subset W'$, $U'\ni y$, что $z_1(y)=z_2(y)=\dots=z_{2s}(y)=0$ и $\alpha|_{U'}=$ $=(1+z_1)\,dz_2+z_3dz_4+\dots+z_{2s-1}dz_{2s}$, откуда $d\alpha|_{U'}=\omega|_{U'}=dz_1\wedge dz_2+$ $+dz_3\wedge dz_4+\dots+dz_{2s-1}\wedge dz_{2s}$. $\triangleright$

Рассмотренная процедура изучения интегрируемости идеалов в алгебрах Грассмана — очевидно, естественное продолжение тех основных конструкций Э. Картана которые были приспособлены для изучения структуры отдельных дифференциальных форм и находят нетривиальные приложения в теории вполне интегрируемых динамических систем, в частности в теории вполне интегрируемых дифференциальных уравнений с частными производными.

1. *Теория* солитонов : Метод обратной задачи / Под ред. С. П. Новикова.— М. : Наука, 1980.— 320 с.
2. *Солитоны* : Пер. с англ. / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри.— М. : Мир, 1983.— 408 с.
3. *Estabrook F., Wahlquist H.* Prolongation structures of nonlinear evolution equations.— J. Math. Phys., 1975, N 1, p. 1—7.

4. *Картан Э.* Интегральные инварианты.— М., Л. : ГИТТЛ, 1940.— 217 с.
5. *Hermann R.* E. Cartan's geometric theory of partial differential equations.— Adv. Mathem., 1965, 1, p. 265—318.
6. *Самойленко В. Г., Прикарпатский А. К.* Геометрическая структура преобразований Бэклунда вполне интегрируемых динамических систем.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1984, № 3, с. 22—24.
7. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии.— М. : Мир, 1970.— 412 с.
8. *Годбийон В.* Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.— М. : Мир, 1973.— 188 с.
9. *Вифлянцев В. П.* Теорема Фробениуса для дифференциальных систем с особенностями.— Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика и механика, 1980, № 3, с. 11—14.
10. *Васильев А. М.* Системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка при трех неизвестных функциях и двух независимых переменных (локальная теория).— Мат. сб., 1966, 70, № 4, с. 457—480.
11. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.— М. : ВИНИТИ, 1979.— 247 с.— (Итоги науки и техники. Проблемы геометрии / ВИНИТИ; т. 9.)

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 09.08.83