УДК 517.948

П. Фолькманн

# Заметка об интегральных неравенствах типа Вольтерра

1. Пусть $E$ — вещественное банахово пространство, полуупорядоченное с помощью телесного конуса $K$ (см. напр., [1], опред. 11, 2.1).

Как обычно, используем обозначения $x \leqslant y$, если $y - x \in K$; $x \ll y$, если $y - x \in \operatorname{int} K$.

Согласно доказательству теоремы 1 из [2] вытекает правильность следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $[0, T] \subseteq R^n$ *— отрезок в* $n$*-мерном пространстве, а*

$$f : [0, T] \times [0, T] \times E \to E,$$
$$F : [0, T] \times [0, T] \times E \times E \to E,$$
$$u, v, w, q : [0, T] \to E$$

*— непрерывные функции, так что,*

$$F(t, s, x, x) = f(t, s, x),$$
$$y \leqslant x \leqslant z \Rightarrow F(t, s, y, z) \leqslant F(t, s, x, x) \leqslant F(t, s, z, y), \tag{1}$$
$$u(t) = q(t) + \int_0^t f(t, s, u(s))\, ds,$$
$$v(t) \ll q(t) + \int_0^t F(t, s, v(s), w(s))\, ds, \quad w(t) \gg q(t) + \int_0^t F(t, s, w(s), v(s))\, ds. \tag{2}$$

*Тогда будет выполняться неравенство*

$$v(t) \ll u(t) \ll w(t).$$

В [2] рассмотрен специальный случай условия (1), когда функция $F(t, s, y, z)$ не убывает по $y$, а по $z$ не возрастает.

2. Для приложений теоремы 1 к изучению интегральных уравнений типа Вольтерра (2) с заданной функцией $f$ нужно найти функцию $F$.

Теорема 2. *Пусть $M$ — метрическое пространство, $A$ — любое множество, а*

$$l_\infty(A) = \{x \mid x = (x_\alpha)_{\alpha\in A},\ x_\alpha \in R\ (\forall \alpha \in A),\ \|x\| = \sup_{\alpha\in A} |x_\alpha| < \infty\}$$

*— банахово пространство ограниченных функций, полуупорядоченное с помощью конуса $K = \{x \in l_\infty(A) \mid x_\alpha \geqslant 0\ (\forall \alpha \in A)\}$.*

*Пусть, далее, $f: M \times l_\infty(A) \to l_\infty(A)$ — равномерно непрерывная функция.*

*Тогда будет существовать непрерывная функция*

$$F: M \times l_\infty(A) \times l_\infty(A) \to l_\infty(A),$$

*такая, что*

$$F(\xi, x, x) = f(\xi, x), \tag{3}$$

$$y \leqslant x \leqslant z \Rightarrow F(\xi, y, z) \leqslant F(\xi, x, x) \leqslant F(\xi, z, y) \tag{4}$$

*для всех $\xi \in M$; $x, y, z \in l_\infty(A)$.*

Доказательство. Из равномерной непрерывности функции $f$ следует существование непрерывной функции $\omega: [0, \infty) \to [0, \infty)$, так что $\omega(0) = 0$, $\omega(\sigma) \leqslant \omega(\tau)$, $0 \leqslant \sigma < \tau$,

$$\|f(\xi, x) - f(\bar\xi, \bar x)\| \leqslant \omega(\max\{d(\xi, \bar\xi), \|x - \bar x\|\}),\ \xi, \bar\xi \in M;\ x, \bar x \in l_\infty(A),$$

где $d(\xi, \bar\xi)$ обозначает расстояние элементов $\xi$, $\bar\xi$ метрического пространства $M$. Имеем $f(\xi, x) = (f_\alpha(\xi, x))_{\alpha\in A}$ с функциями $f_\alpha: M \times l_\infty(A) \to R$. С помощью множества

$$D = D_1 \cup D_2 = \{(y, z) \mid y, z \in l_\infty(A), y \leqslant z\} \cup \{(y, z) \mid y, z \in l_\infty(A), z \leqslant y\}$$

определяем функции $F_\alpha: M \times D \to R$ формулой

$$F_\alpha(\xi, y, z) = \begin{cases} \inf\limits_{y \leqslant x \leqslant z} f_\alpha(\xi, x), & (y, z) \in D_1; \\ \sup\limits_{z \leqslant x \leqslant y} f_\alpha(\xi, x), & (y, z) \in D_2. \end{cases}$$

Пусть $F(\xi, y, z) = (F_\alpha(\xi, y, z))_{\alpha\in A}$, $(\xi, y, z) \in M \times D$. Тогда функция $F: M \times D \to l_\infty(A)$ будет обладать свойством

$$\|F(\xi, y, z) - F(\bar\xi, \bar y, \bar z)\| \leqslant \omega(\max\{d(\xi, \bar\xi), \|y - \bar y\|, \|z - \bar z\|)$$

на множествах $M \times D_1$ и $M \times D_2$. Таким образом, $F$ — непрерывная функция на замкнутом подмножестве $M \times D$ метрического пространства $M \times l_\infty(A) \times l_\infty(A)$; следовательно, существует непрерывное расширение

$$F: M \times l_\infty(A) \times l_\infty(A) \to l_\infty(A) \tag{5}$$

на все $M \times l_\infty(A) \times l_\infty(A)$ [3]. Из конструкции следует, что функция (5) обладает свойствами (3), (4).

3. Если пространство $E$ из теоремы 1 конечномерно, то можно найти функцию $F$ в смысле статьи [2], т.е.

$$y \leqslant \bar y,\ z \geqslant \bar z \Rightarrow F(t, s, y, z) \leqslant F(t, s, \bar y, \bar z)$$

(см. ниже, теорема 3).

Используем обозначение

$$R_+^n = \{x \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n;\ x_1, \ldots, x_n \geqslant 0\}.$$

Л е м м а. *Пусть n-мерное пространство* $R^n$ *полуупорядочено с помощью конуса* $R^n_+$, $M$ — *топологическое пространство, а* $f: M \times R^n \to R$ — *непрерывная функция.*

*Тогда будет существовать непрерывная функция* $F: M \times R^n \times R^n \to R$, *такая, что*

$$F(\xi, x, x) = f(\xi, x), \quad \xi \in M; \; x \in R^n,$$

$$y \leqslant \bar{y}, \; z \geqslant \bar{z} \Rightarrow F(\xi, y, z) \leqslant F(\xi, \bar{y}, \bar{z}), \; \xi \in M; \; y, \bar{y}, z, \bar{z} \in R^n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $f(\xi, x) = f(\xi, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\xi \in M$; $x \in R^n$. Определяем функции $F_\nu : M \times R^\nu \times R^\nu \times R^{n-\nu} \to R$, $\nu = 0, 1, \ldots, n$, формулами

$$F_0(\xi, x_1, \ldots, x_n) = f(\xi, x_1, \ldots, x_n),$$

$$F_\nu(\xi, y_1, z_1, \ldots, y_\nu, z_\nu, x_{\nu+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= \begin{cases} \min\limits_{y_\nu \leqslant x_\nu \leqslant z_\nu} F_{\nu-1}(\xi, y_1, z_1, \ldots, y_{\nu-1}, z_{\nu-1}, x_\nu, \ldots, x_n), & y_\nu \leqslant z_\nu; \\ \max\limits_{z_\nu \leqslant x_\nu \leqslant y_\nu} F_{\nu-1}(\xi, y_1, z_1, \ldots, y_{\nu-1}, z_{\nu-1}, x_\nu, \ldots, x_n), & z_\nu \leqslant y_\nu, \; \nu = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Тогда $F(\xi, y, z) = F_n(\xi, y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n)$, $\xi \in M$; $y, z \in R^n$, — искомая функция.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $M$ — *топологическое пространство, а* $E_1$, $E_2$ — *конечномерные банаховы пространства, полуупорядоченные с помощью телесных конусов* $K_1 \subseteq E_1$, $K_2 \subseteq E_2$. *Если* $f: M \times E_1 \to E_2$ — *непрерывная функция, то существует непрерывная функция*

$$F: M \times E_1 \times E_1 \to E_2, \tag{6}$$

*такая, что*

$$F(\xi, x, x) = f(\xi, x), \quad \xi \in M; \quad x \in E_1, \tag{7}$$

$$y \leqslant \bar{y}, \; z \geqslant \bar{z} \Rightarrow F(\xi, y, z) \leqslant F(\xi, \bar{y}, \bar{z}), \; \xi \in M; \; y, \bar{y}, z, \bar{z} \in E_1. \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $E_1 = R^n$, а $E_2 = R^m$. Без ограничения общности можно предполагать, что $K_1 \subseteq R^n_+$, $R^m_+ \subseteq K_2$, т. е.

$$x \leqslant \bar{x} \Rightarrow x \leqslant_n x, \quad x, \bar{x} \in E_1, \tag{9}$$

$$a \leqslant_m \bar{a} \Rightarrow a \leqslant \bar{a}, \quad a, \bar{a} \in E_2, \tag{10}$$

где $\leqslant_k$ обозначает полупорядок пространства $R^k$ с конусом $R^k_+$, $k = m, n$. С помощью леммы можно найти непрерывную функцию (6) со свойствами (7) и

$$y \leqslant_n \bar{y}, \; \bar{z} \leqslant_n z \Rightarrow F(\xi, y, z) \leqslant_m F(\xi, \bar{y}, \bar{z}), \; \xi \in M; y, \bar{y}, z, \bar{z} \in E_1. \tag{11}$$

Соотношение (8) следует из (9), (10), (11).


1. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха.— Усп. мат. наук, 1948, 3, № 1 (23), с. 3—95.
2. *Шувар Б. А., Копач М. И.* О двусторонних интегральных неравенствах типа Вольтерра со многими независимыми переменными.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 6, с. 848—853.
3. *Dugundji J.* An extension of Tietze's theorem.— Pac. J. Math., 1951, N 1, p. 353—367.


Мат. ин-т I, ун-т Карлсруэ, ФРГ

Поступила в редакцию 22.06.82