УДК 517.537.6

М. М. Хомяк

Метод Вимана — Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле, с условием на рост на некоторой последовательности

1°. Пусть f — целая функция, заданная абсолютно сходящимся в $\mathbf{C}$ рядом Дирихле

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{z\lambda_n\}, \quad z=x+iy, \tag{1}$$

где $a_0=1$ и $0=\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Обозначим $M(x, f)=$

$=\{\sup|f(x+iy)|:y\in\mathbf{R}\}$ и пусть $\mu(x,f)$ и $\nu=\nu(x,f)$ — соответственно максимальный член и центральный индекс ряда (1).

Скажем, что функция $\Phi\in\Omega_0$, если Φ — положительная возрастающая выпуклая на $(-\infty,\infty)$ функция. Через φ будем обозначать в дальнейшем функцию, обратную к Φ, а через φ' — ее правостороннюю производную, которая, ввиду вогнутости φ, является невозрастающей функцией.

Развитию метода Вимана — Валирона для целых функций (1), удовлетворяющих условию $\ln M(x,f)\leqslant\Phi(x)\in\Omega_0$ для всех $x\in\mathbf{R}$, посвящены работы [1—4]. Здесь будут рассматриваться классы функций (1) с условием на рост на некоторой последовательности, т.е. предполагается выполненным условие

$$\ln M(x_k,f)\leqslant\Phi(x_k), \tag{2}$$

где $\Phi\in\Omega_0$ и $x_k\to+\infty(k\to\infty)$. Естественно, что получение результатов типа Вимана — Валирона для таких классов функций (1) связано с новыми трудностями, и методика из [1—4] здесь не подходит. Меняется также и качественная сторона результатов: полученные оценки будут выполняться вне некоторых исключительных множеств определенной нижней плотности. Нижней плотностью $\underline{d}E$ измеримого множества $E\subset\mathbf{R}$ будем называть величину

$$\underline{d}E=\varliminf_{x\to\infty}(mE\cap[0,x])/x,\quad mE=\int\limits_{E\cap[0,\infty)}dx.$$

2°. Положим $\varphi_1(t)=\varphi(t)$ при $t\geqslant a$ и $\varphi_1(t)=\varphi(a)\,t/a$ при $0\leqslant t\leqslant a$, где a — произвольная точка такая, что $a>1$ и $\varphi(a)>0$, и пусть

$$\psi_0(\lambda_n,x)=\int\limits_{\lambda_{\nu(x,f)}}^{\lambda_n}(\lambda_n-t)\,\varphi_1'(t)\,dt. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть* $0\leqslant\delta<1$, $1<K<1/\delta$, $N(x)=\max\{n:\varphi_1(\lambda_n)\leqslant K\varphi_1(\lambda_{\nu(x,f)})\}$ *и выполнено условие* (2). *Тогда для всех x вне некоторого множества E с* $\underline{d}E\leqslant\delta/(1+\delta-K\delta)$ *будут выполняться неравенства*

$$|a_n|\,e^{x\lambda_n}\leqslant\mu(x,f)\exp\{-\delta\psi_0(\lambda_n,x)\},\quad 0\leqslant n\leqslant N(x), \tag{4}$$

$$|a_n|\,e^{x\lambda_n}\leqslant\mu(x,f)\max\left\{\exp\{-\delta\psi_0(\lambda_n,x)\},\exp\left\{-\frac{\delta(K-1)^2}{2K}\varphi(\lambda_{\nu(x,f)})\,\lambda_n\right\}\right\},$$

$$n>N(x). \tag{5}$$

Отметим, что теорема 1 является аналогом одной теоремы из [5], полученной для целых функций конечного нижнего порядка, представленных степенными рядами.

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся некоторые рассуждения. Достаточно рассматривать случай, когда $0<\delta<1$. Положим

$$\alpha_n=\exp\left\{-\delta\int\limits_0^{\lambda_n}\varphi_1'(t)\,dt\right\},\quad \tau_n=\delta\varphi_1(\lambda_n). \tag{6}$$

Тогда для всех $n\neq\nu$ получим

$$\alpha_n\exp\{\tau_\nu\lambda_n\}=\exp\left\{-\delta\int\limits_0^{\lambda_n}\varphi_1(t)\,dt+\delta\varphi_1(\lambda_\nu)\,\lambda_n\right\}=\exp\{-\delta\psi(\lambda_n)\},$$

где $\psi(x)=\int\limits_0^x(\varphi_1(t)-\varphi_1(\lambda_\nu))\,dt$. Так как $\psi'(x)=\varphi_1(x)-\varphi_1(\lambda_\nu)$, а φ_1 — возрастающая функция, то функция ψ имеет единственную точку экстремума $x=\lambda_\nu$, являющуюся точкой минимума функции ψ. А поскольку

$\psi(0)=0$, $\psi(+\infty)=+\infty$ и $\psi(\lambda_\nu)<0$, то для всех $n\neq\nu$ имеем

$$\alpha_n \exp\{\tau_\nu\lambda_n\}=\exp\{-\delta\psi(\lambda_n)\}<\exp\{-\delta\psi(\lambda_\nu)\}=\alpha_\nu\exp\{\tau_\nu\lambda_\nu\}. \qquad (7)$$

Используя равенство $\ln\mu(x, f)-\ln\mu(x_0, f)=\int\limits_{x_0}^{x}\lambda_{\nu(t,f)}dt$, для последовательности (x_k) из (2) при всех достаточно больших k имеем

$$\lambda_{\nu(x_k-1,f)}\leqslant\int\limits_{x_k-1}^{x_k}\lambda_{\nu(t,f)}dt\leqslant\ln\mu(x_k, f)\leqslant\ln M(x_k, f)\leqslant\Phi(x_k),$$

т. е. $x_k-1\geqslant\varphi(\lambda_{\nu(x_k-1,f)})-1$, и, таким образом,

$$\varliminf_{x\to\infty}\tau_{\nu(x,f)}/x\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\delta\varphi(\lambda_{\nu(x_k-1,f)})/(x_k-1)\leqslant\delta,$$

т. е. существует последовательность $x_n\uparrow\infty$ такая, что

$$\tau_{\nu(x_n,f)}\leqslant(\delta+o(1))\,x_n,\quad n\to\infty. \qquad (8)$$

Положим

$$\overline{N}=\overline{N}(x_n)=\max\{k:\varphi_1(\lambda_k)\leqslant K\varphi_1(\lambda_{\nu(x_n,f)})\},\quad t_n=x_n-\tau_{\overline{N}(x_n)}. \qquad (9)$$

Тогда

$$t_n=x_n-\delta\varphi_1(\lambda_{\overline{N}(x_n)})\geqslant x_n-\delta K\varphi_1(\lambda_{\nu(x_n,f)})=x_n-K\tau_{\nu(x_n,f)}\geqslant$$

$$\geqslant x_n(1-K\delta+o(1))\to+\infty,\quad n\to\infty. \qquad (10)$$

Лемма 1. *Для каждого t, $0\leqslant t\leqslant t_n=x_n-\tau_{\overline{N}(x_n)}$, существует число $\nu_n(t)\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ такое, что $\nu_n(t)\leqslant\nu(x_n, f)$, и для всех m, $0\leqslant m\leqslant\leqslant\overline{N}(x_n)$, выполняется неравенство*

$$(|a_m|/|a_{\nu_n(t)}|)(\alpha_{\nu_n(t)}/\alpha_m)\exp\{t(\lambda_m-\lambda_{\nu_n(t)})\}\leqslant 1. \qquad (11)$$

Последовательность $(\nu_n(t_n))$ неограничена.

Действительно, пусть t — произвольное число, $0\leqslant t\leqslant t_n$, и пусть q, $0\leqslant q\leqslant\overline{N}(x_n)$, — наибольшее целое число, для которого $(|a_m|/\alpha_m)\times\times\exp\{t\lambda_m\}\leqslant(|a_q|/\alpha_q)\exp\{t\lambda_q\}$ для всех m, $0\leqslant m\leqslant\overline{N}(x_n)$. Тогда достаточно показать, что $q\leqslant\nu(x_n, f)$. Последнее неравенство справедливо, поскольку для всех m, $\nu(x_n, f)<m\leqslant\overline{N}(x_n)$, в силу (7) выполняется

$$(|a_m|/|a_{\nu(x_n,f)}|)(\alpha_{\nu(x_n,f)}/\alpha_m)\exp\{t(\lambda_m-\lambda_{\nu(x_n,f)})\}=(|a_m|\exp\{x_n\lambda_m\}/$$

$$/|a_{\nu(x_n,f)}|\exp\{x_n\lambda_{\nu(x_n,f)}\})(\alpha_{\nu(x_n,f)}\exp\{\tau_m\lambda_{\nu(x_n,f)}\}/\alpha_m\exp\{\tau_m\lambda_m\})\times$$

$$\times\exp\{(\lambda_m-\lambda_{\nu(x_n,f)})(t-x_n+\tau_m)\}<\exp\{(\lambda_m-\lambda_{\nu(x_n,f)})(t-x_n+\tau_m)\}\leqslant 1,$$

так как $t-x_n+\tau_m\leqslant\tau_m-\tau_{\overline{N}(x_n)}\leqslant 0$ при $0\leqslant t\leqslant x_n-\tau_{\overline{N}(x_n)}$, т. е. для всех m, $\nu(x_n, f)<m<\overline{N}(x_n)$, выполняется неравенство $(|a_m|/\alpha_m)\times\times\exp\{t\lambda_m\}<(|a_{\nu(x_n,f)}|/\alpha_{\nu(x_n,f)})\exp\{t\lambda_{\nu(x_n,f)}\}$ и, таким образом, $q=\nu_n(t)\leqslant\leqslant\nu(x_n, f)$. Первая часть леммы 1 доказана.

Докажем вторую часть. Допустим от противного, что существует число $c\in\mathbb{N}$ такое, что для всех n выполняется $\nu_n(t_n)\leqslant c$. Пусть $m=\min\{n>c: :a_n\neq 0\}$. Тогда в силу (10) получим $(|a_m|/\alpha_m)\exp\{t_n(\lambda_m-\lambda_{\nu_n(t_n)})\}\geqslant\geqslant(|a_m|/\alpha_m)\exp\{t_n(\lambda_m-\lambda_c)\}\to\infty$ $(n\to\infty)$. С другой стороны, согласно (11)

$$\sup\{(|a_k|/\alpha_k)\exp\{t_n(\lambda_k-\lambda_{\nu_n(t_n)})\}:c\leqslant k\leqslant\overline{N}(x_n)\}\leqslant$$

$$\leqslant(|a_{\nu_n(t_n)}|/\alpha_{\nu_n(t_n)})\leqslant\sup\{(|a_k|/\alpha_k):0\leqslant k\leqslant c\}<\infty,$$

что невозможно. Лемма 1 полностью доказана.

Приступим к доказательству теоремы 1. Из леммы 1 вытекает, что для всех t, $0 \leqslant t \leqslant t_n = x_n - \tau_{\overline{N}(x_n)}$, и всех m, $0 \leqslant m \leqslant \overline{N}(x_n)$, выполняется неравенство

$$(|a_m|/|a_{\nu_n(t)}|) \exp\{(t+\tau_{\nu_n(t)})(\lambda_m - \lambda_{\nu_n(t)})\} \leqslant (\alpha_m/\alpha_{\nu_n(t)}) \exp\{\tau_{\nu_n(t)}(\lambda_m - \lambda_{\nu_n(t)})\}. \tag{12}$$

Выражение, стоящее в правой части (12), при $m \neq \nu_n(t)$ согласно (7) меньше единицы. Далее, при $0 \leqslant t \leqslant t_n$ имеем $t + \tau_{\nu_n(t)} \leqslant x_n - \tau_{\overline{N}(x_n)} + \tau_{\nu_n(t)} \leqslant x_n$, а $\nu_n(t) \leqslant \nu(x_n, f)$. Отсюда следует, что

$$\nu_n(t) = \nu(t + \tau_{\nu_n(t)}, f). \tag{13}$$

Обозначим $S = \bigcup\limits_n \{x = t + \tau_{\nu_n(t)} : 0 \leqslant t \leqslant t_n = x_n - \tau_{\overline{N}(x_n)}\}$. Пусть $x \in S$. Тогда $x = t + \tau_{\nu_n(t)}$, $0 \leqslant t \leqslant t_n$, при некотором n. Поскольку $\nu(x, f) \leqslant \leqslant \nu(x_n, f)$, то и $N(x) \leqslant \overline{N}(x_n)$. С другой стороны, из (12) для такого x имеем

$$\begin{aligned}(|a_m|/|a_\nu|) \exp\{x(\lambda_m - \lambda_\nu)\} &\leqslant (\alpha_m/\alpha_\nu) \exp\{\tau_\nu(\lambda_m - \lambda_\nu)\} = \\ &= \exp\left\{-\delta \int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_m} \varphi_1(t)\,dt + \delta\varphi_1(\lambda_\nu)(\lambda_m - \lambda_\nu)\right\} = \\ &= \exp\left\{-\delta \int\limits_{\lambda_\nu}^{\lambda_m} (\lambda_m - t)\,\varphi_1'(t)\,dt\right\} = \exp\{-\delta\psi_0(\lambda_m, x)\}, \quad \nu = \nu(x, f)\end{aligned} \tag{14}$$

для всех m, $0 \leqslant m \leqslant \overline{N}(x_n)$, а значит, и для всех m, $0 \leqslant m \leqslant N(x)$. Отсюда вытекает, что для всех $x \in S$ выполняется (4).

Перейдем к доказательству неравенства (5). Прежде всего отметим, что в силу выпуклости Φ для любого $K > 1$ при $x \geqslant b$ выполняется неравенство

$$\Phi(Kx) \geqslant K\Phi(x). \tag{15}$$

Не уменьшая общности, можем считать, что

$$\varphi(\lambda_{\overline{N}(x_n, f)}) \sim K\varphi(\lambda_{\nu(x_n, f)}), \quad n \to \infty. \tag{16}$$

В противном случае в ряд (1) можем вставить члены с нулевыми коэффициентами [2].

Пусть $x \in S$ настолько велико, что $\lambda_{\nu(x,f)} \geqslant a$, $\varphi(\lambda_{\nu(x,f)}) \geqslant b$, а $m > N(x)$. Тогда $x = t + \tau_{\nu_n(t)}$ при некотором n. Если $N(x) < \overline{N}(x_n)$, то для всех m, $N(x) < m \leqslant \overline{N}(x_n)$, как и раньше, имеем (14). При $m > \overline{N}(x_n)$ имеем

$$|a_m| e^{x\lambda_m} = |a_m| e^{x_n\lambda_m} e^{(x - x_n)\lambda_m} \leqslant \mu(x_n, f)\, e^{(x - x_n)\lambda_m} \tag{17}$$

и

$$\begin{aligned}\mu(x_n, f) = |a_{\nu(x_n, f)}| \exp\{x_n\lambda_{\nu(x_n, f)}\} = |a_{\nu(x_n, f)}| \exp\{x\lambda_{\nu(x_n, f)}\} \times \\ \times \exp\{(x_n - x)\lambda_{\nu(x_n, f)}\} \leqslant \mu(x, f) \exp\{(x_n - x)\lambda_{\nu(x_n, f)}\}.\end{aligned} \tag{18}$$

Так как $x = t + \tau_{\nu_n(t)} \leqslant t_n + \tau_{\nu_n(t)} \leqslant x_n - \tau_{\overline{N}(x_n)} + \tau_{\nu_n(t)}$, то из (17) и (18), учитывая (13), для $m > \overline{N}(x_n)$ получаем

$$\begin{aligned}|a_m| \exp\{x\lambda_m\} &\leqslant \mu(x, f) \exp\{-(x_n - x)(\lambda_m - \lambda_{\nu(x_n, f)})\} \leqslant \\ &\leqslant \mu(x, f) \exp\{-(\lambda_m - \lambda_{\nu(x_n, f)})(\tau_{\overline{N}(x_n)} - \tau_{\nu(x, f)})\}.\end{aligned} \tag{19}$$

Так как $\lambda_{\nu(x_n, f)} \geqslant \lambda_{\nu(x, f)} \geqslant a$, то при $m > N(x_n)$ выполняется неравенство

$\varphi(\lambda_m) > K\varphi(\lambda_{\nu(x_n,f)})$. Учитывая неравенство (15), имеем $\lambda_m > \Phi(K\varphi \times \times (\lambda_{\nu(x_n,f)})) \geqslant K\lambda_{\nu(x_n,f)}$. Отсюда, учитывая неравенство $\nu(x,f) \leqslant \nu(x_n,f)$, а также соотношение (16), для $m > \overline{N}(x_n)$ получаем

$$(\lambda_m - \lambda_{\nu(x_n,f)})(\tau_{\overline{N}(x_n)} - \tau_{\nu(x,f)}) \geqslant \delta\lambda_m(1 - (\lambda_{\nu(x_n,f)}/\lambda_m))(\varphi(\lambda_{\overline{N}(x_n)}) - $$
$$- \varphi(\lambda_{\nu(x_n,f)})) \geqslant \delta(1 - (1/K))\lambda_m(K - 1 + o(1))\varphi(\lambda_{\nu(x_n,f)}) \geqslant$$
$$\geqslant \delta((K-1)^2/K + o(1))\varphi(\lambda_{\nu(x,f)})\lambda_m \geqslant (\delta(K-1)^2/2K)\varphi(\lambda_{\nu(x,f)})\lambda_m \quad (20)$$

при всех достаточно больших $x \in S$. Из (19) и (20) для $m > \overline{N}(x_n)$ имеем $|a_m|\exp\{x\lambda_m\} \leqslant \mu(x,f)\exp\{-\delta((K-1)^2/2K)\varphi(\lambda_{\nu(x,f)})\lambda_m\}$. Отсюда с учетом (14) для $N(x) < m \leqslant N(x_n)$ получаем справедливость неравенства (5).

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось оценить нижнюю плотность множества E, вне которого выполняются оценки (4) и (5). Пусть $S_n = \{x = t + \tau_{\nu_n(t)} : 0 \leqslant t \leqslant t_n = x_n - \tau_{\overline{N}(x_n)}\}$, а $T_n = [0, t_n + \tau_{\nu_n(t_n)}] \setminus S_n$. Тогда $S = \bigcup\limits_n S_n$ и для всех $x \in S$ будут выполняться оценки (4) и (5), так что эти оценки могут не выполняться, если $x \in T_n$ при некотором n. Пусть $0 \leqslant t \leqslant t_n$, а $m_1, m_2, \ldots, m_p$ — значения, принимаемые центральным индексом многочлена $f_n(t) = (a_0/\alpha_0) + (a_1/\alpha_1)\exp\{t\lambda_1\} + \ldots + (a_{\overline{N}}/\alpha_{\overline{N}}) \times \times \exp\{t\lambda_{\overline{N}}\}$, $\overline{N} = \overline{N}(x_n)$, и $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_p^*$ — точки скачка центрального индекса, т. е. при $t_j^* \leqslant t < t_{j+1}^*$ выполняется $\nu(t, f_n) = \nu_n(t) = \nu(t_j^*, f_n) = m_j$. Тогда $m_p = \nu_n(t_n)$, $t_1^* = 0$, а S_n — объединение полуинтервалов вида $[\tau_{m_1}, t_2^* + \tau_{m_1}), \ldots, [t_{p-1}^* + \tau_{m_{p-1}}, t_p^* + \tau_{m_{p-1}})$, $[t_p^* + \tau_{m_p}, t_n + \tau_{m_p}]$. Поэтому T_n — объединение полуинтервалов вида $[0, \tau_{m_1})$, $[t_2^* + \tau_{m_1}, t_2^* + \tau_{m_2}), \ldots$ $\ldots, [t_p^* + \tau_{m_{p-1}}, t_p^* + \tau_{m_p})$, а $mT_n = \tau_{m_p} = \tau_{\nu_n(t_n)}$, т. е. ввиду (8), (10) и неравенства $\nu_n(t_n) \leqslant \nu(x_n, f)$ имеем

$$\underline{d}E \leqslant \varliminf_{n\to\infty}(mT_n/(t_n + \tau_{\nu_n(t_n)})) = \varliminf_{n\to\infty}(1 + t_n/\tau_{\nu_n(t_n)})^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant \varliminf_{n\to\infty}(1 + (1 - \delta K + o(1))x_n/\tau_{\nu(x_n,f)})^{-1} \leqslant \delta/(1 + \delta - K\delta).$$

Теорема 1 полностью доказана.

3°. Проиллюстрируем применение теоремы 1 для изучения связи между $M(x,f)$ и $\mu(x,f)$ в классе целых функций (1), имеющих конечный нижний R-порядок. Пусть $n(t)$ — считающая функция последовательности (λ_n).

Т е о р е м а 2. *Если целая функция* (1) *имеет конечный нижний R-порядок λ, а*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \ln n(t)/t = b < \infty, \quad (21)$$

то для произвольных $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, 1)$ и всех x вне некоторого множества E с $\underline{d}E \leqslant \delta$ выполняется

$$\ln M(x,f) \leqslant \exp\left\{\frac{\lambda b}{\delta} + \varepsilon\right\}\ln\mu(x,f). \quad (22)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как функция (1) имеет нижний R-порядок $\lambda < \infty$, т. е. выполняется условие (2) с $\Phi(x) = \exp\{(\lambda + \varepsilon_1)x\}$, где $\varepsilon_1 > 0$ — достаточно малое число, то $\varphi_1(x) = \varphi(x) = \ln x/(\lambda + \varepsilon_1)$ при $x \geqslant a = e$. $\psi_0(\lambda_n, x) = (\lambda + \varepsilon_1)^{-1}[\lambda_n\ln(\lambda_n/\lambda_{\nu(x,f)}) - (\lambda_n - \lambda_{\nu(x,f)})]$ при $\min(\lambda_n, \lambda_{\nu(x,f)}) \geqslant e$ и $N(x) = n(\lambda_{\nu(x,f)}^K)$ при $\lambda_{\nu(x,f)} \geqslant e$. Поэтому из теоремы 1 имеем

$$\frac{M(x,f)}{\mu(x,f)} \leqslant \sum_{n=0}^{N(x)} 1 + \sum_{n=\nu(x)+1}^{N(x)} \exp\{-\delta\psi_0(\lambda_n, x)\} +$$

$$+\sum_{n=N(x)+1}^{\infty}\max\{\exp\{-\delta\psi_0(\lambda_n, x)\}, \exp\{-\delta((K-1)^2/2K)\varphi(\lambda_\nu)\lambda_n\}\}\leqslant$$

$$\leqslant\nu(x)+1+\sum_{n=\nu(x)+1}^{\infty}\exp\{-\delta\psi_0(\lambda_n, x)\}+$$

$$+\sum_{n=N(x)+1}^{\infty}\exp\{-\delta((K-1)^2\ln\lambda_\nu/2K(\lambda+\varepsilon_1))\lambda_n\} \tag{23}$$

для всех x вне некоторого множества E с $\underline{d}E\leqslant\delta/(1+\delta-K\delta)$, $1<K<<1/\delta$. В силу условия (21) вторая сумма в правой части (23) стремится к 0 при $x\to\infty$. Переходя к интегралу Стильтьеса, интегрируя по частям и используя (21), имеем

$$\frac{M(x, f)}{\mu(x, f)}\leqslant\nu(x)+1+\int_{\lambda_\nu}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\delta}{\lambda+\varepsilon_1}\left[t\ln\frac{t}{\lambda_\nu}-(t-\lambda_\nu)\right]\right\}dn(t)+o(1)=$$

$$=\int_{\lambda_\nu}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\delta}{\lambda+\varepsilon_1}\left(t\ln\frac{t}{\lambda_\nu}-(t-\lambda_\nu)\right)\right\}\frac{\delta}{\lambda+\varepsilon_1}\left(\ln\frac{t}{\lambda_\nu}+1\right)n(t)\,dt+o(1)\leqslant$$

$$\leqslant\int_{\lambda_\nu}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\delta}{\lambda+\varepsilon_1}\left(t\ln\frac{t}{\lambda_\nu}-(t-\lambda_\nu)\right)+(b+\varepsilon_1)t\right\}dt+o(1)=o(1)+$$

$$+\int_{\lambda_\nu}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\delta}{\lambda+\varepsilon_1}t\ln t+t\left[\frac{\delta}{\lambda+\varepsilon_1}(\ln\lambda_\nu+1)+b+\varepsilon_1\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{\delta\lambda_\nu}{\lambda+\varepsilon_1}\right\}dt,\quad x\to\infty,\quad x\,\overline{\in}\,E.$$

Применив к последнему интегралу метод Лапласа [6], теор. 1.2.6, легко получаем, что

$$M(x, f)/\mu(x, f)\leqslant O(\sqrt{\lambda_\nu})\exp\{(\delta/(\lambda+\varepsilon_1))(\exp\{(b+\varepsilon_1)(\lambda+\varepsilon_1)/\delta\}-1)\lambda_\nu\}. \tag{24}$$

Из (4) при $n=0$ для всех x вне E имеем

$$\ln\mu(x, f)\geqslant\delta\psi_0(0, x)=\delta\int_0^{\lambda_\nu}t\varphi_1'(t)\,dt=(\delta/(\lambda+\varepsilon_1))(\lambda_\nu-e/2),\quad \nu=\nu(x, f). \tag{25}$$

Из (24) и (25) получаем, что

$$M(x, f)/\mu(x, f)\leqslant O(\sqrt{\ln\mu(x, f)})\exp\{(\delta/(\lambda+\varepsilon_1))(\exp\{(b+\varepsilon_1)\times$$

$$\times(\lambda+\varepsilon_1)/\delta\}-1)(((\lambda+\varepsilon_1)/\delta)\ln\mu(x, f)+e/2)\}.$$

Имеем $\ln M(x, f)\leqslant(1+o(1))\exp\{(b+\varepsilon_1)(\lambda+\varepsilon_1)/\delta\}\ln\mu(x, f)$ при $x\to\infty$ вне E. Отсюда легко следует, что неравенство (22) выполняется для всех x вне некоторого множества E с $\underline{d}E\leqslant\delta/(1-K\delta+\delta)$. В силу произвольности K теорема 2 доказана.

Пример функции

$$f_1(z)=\sum_{n=3}^{\infty}\exp\{-(\ln n\ln\ln\ln n/\lambda)+z\ln n\},\quad 0<\lambda<\infty,$$

указывает, что оценка (22), вообще говоря, неулучшаема. Действительно [3], для функции f_1 выполняется соотношение $\ln M(x, f)\sim e^{\lambda}\ln\mu(x, f)$ при $x\to\infty$. Функция f_1 имеет нижний R-порядок λ, а $b=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\ln n(t)/t=1$.

1. *Шеремета М. Н.* Метод Вимана — Валирона для целых функций, заданных рядами Дирихле.— Докл. АН СССР, 1978, 238, № 6. с.1307—1309.
2. *Шеремета М. Н.* Метод Вимана — Валирона для рядов Дирихле.— Укр. мат. журн., 1978, 30, № 4, с. 488—497
3. *Шеремета М. Н.* Аналоги теоремы Вимана для рядов Дирихле.— Мат. сб., 1979, 110, № 1, с. 102—116.
4. *Шеремета М. Н.* Асимптотические свойства целых функций, заданных рядами Дирихле, и их производных.— Укр. мат. журн., 1979, 31, № 6, с. 723—730.
5. *Fenton P. C.* Some results of Wiman—Valiron type for integral functions of finite lower order.— Ann. of Math., 1976, 103, N 2, p. 237—252.
6. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции.— М. : Наука, 1979.— 320 с.

Львсвский
государственный университет

Поступила в редакцию 26.02.81
после переработки 01.09.81