УДК 517.948

Г. П. Пелюх

Общее решение систем нелинейных функциональных уравнений в окрестности особых точек

Рассмотрим систему нелинейных функциональных уравнений вида

$$x(t) = Ax(\lambda t) + f[t, x(\lambda t)], \tag{1}$$

где $x = \mathrm{colon}(x_1, \ldots, x_m)$, $A = \{a_{ij}\}$ — невырожденная постоянная $m \times m$ — матрица, λ — вещественная постоянная, $f = \mathrm{colon}(f_1, \ldots, f_m)$, f_i, $i = \overline{1, m}$, — вещественные функции вещественных переменных.

Целью настоящей работы является построение общего решения системы уравнений (1) в окрестности точки $t = 0$ при следующих предположениях: 1) вектор-функция f непрерывна в области $D : 0 \leqslant t \leqslant \alpha$, $\| x \| \leqslant \beta$, удовлетворяет в D условию

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leqslant L\rho(t, x, y) \| x - y \|, \tag{2}$$

где L — некоторая положительная постоянная, $\rho(t, x, y) = t + \| x \| + \| y \|$ и $f(t, 0) \equiv 0$ (норма матрицы A ($\| A \|$) определяется выражением $\| A \| = \sum\limits_{i,j=1}^{m} | a_{ij} |$; вектор-столбец x с компонентами $x_1, \ldots, x_m$ будем представлять как матрицу из m строк и 1 столбца, и, следовательно, $\| x \| = \sum\limits_{i=1}^{m} | x_i |$); 2) $0 < \lambda$, $\| A^{-1} \| < 1$; 3) $\| A \| \| A^{-1} \| \theta = \delta < 1$, где $\theta = \max\{\lambda, \| A^{-1} \|\}$. При других предположениях аналогичный вопрос изучался в [1 — 4].

Теорема. *Если выполняются условия* 1)—3), *то в некоторой окрестности* $\tilde{D}$ *начала координат* O *существует замена переменных*

$$x(t) = \varkappa[t, y(t)] = y(t) + \tilde{\varkappa}[t, y(t)] \tag{3}$$

(*вектор-функция* $\tilde{\varkappa}(t, y)$ *непрерывна в* $\tilde{D}$, *удовлетворяет условию*

$$\| \tilde{\varkappa}(t, \bar{y}) - \tilde{\varkappa}(t, \bar{\bar{y}}) \| \leqslant l \| \bar{y} - \bar{\bar{y}} \|, \quad 0 < l < 1, \quad (t, \bar{y}), \quad (t, \bar{\bar{y}}) \in \tilde{D} \tag{4}$$

и $\tilde{\varkappa}(t, 0) \equiv 0$), *приводящая систему уравнений* (1) *к виду*

$$y(\lambda t) = A^{-1} y(t). \tag{5}$$

Для доказательства теоремы достаточно, очевидно, показать, что в некоторой окрестности $\tilde{D}$ начала координат O система уравнений

$$\varkappa(t, y) = A\varkappa(\lambda t, A^{-1}y) + f[t, \varkappa(\lambda t, A^{-1}y)] \tag{6}$$

имеет решение $\varkappa(t, y) = y + \tilde{\varkappa}(t, y)$, где вектор-функция $\tilde{\varkappa}(t, y)$ непрерывна в $\tilde{D}$, удовлетворяет в $\tilde{D}$ условию (4) и $\tilde{\varkappa}(t, 0) \equiv 0$.

Решение системы уравнений (6) будем искать методом последовательных приближений.

Построим последовательность функций $\{\varkappa_n(t, y)\}$, полагая

$$\begin{gathered} \varkappa_0(t, y) = y, \\ \varkappa_n(t, y) = A\varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y) + f[t, \varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y)], \quad n = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{7}$$

Сначала покажем, что при достаточно малых t, $\|y\|$ и всех $n \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\|\varkappa_n(t, y)\| \leqslant \|y\| + \frac{L}{1-\Delta}\rho(t, y, 0)\|y\|, \tag{8}$$

где $\delta < \Delta < 1$.

Существуют положительные числа α_1, β_1 ($\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 < \beta$) такие, что при $t \leqslant \alpha_1$, $\|x\| \leqslant \beta_1$, $\|y\| \leqslant \beta_1$

$$\frac{L}{1-\Delta}\rho(t, x, y) \leqslant l, \quad \|y\| + \frac{L}{1-\Delta}\rho(t, y, 0)\|y\| \leqslant \beta,$$

$$L\|A^{-1}\|\theta\rho(t, x, y) \leqslant \min\{(1-\|A^{-1}\|)(1-\Delta), \Delta-\delta\}. \tag{9}$$

Поскольку $\|\varkappa_n(t, y)\| \leqslant \|y\| + \|\varkappa_n(t, y) - y\|$, то (8) будет доказано, если мы покажем, что

$$\|\varkappa_n(t, y) - y\| \leqslant \frac{L}{1-\Delta}\rho(t, y, 0)\|y\|, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{10}$$

Так как $\varkappa_0(t, y) = y$, то (10) выполняется при $n = 0$. Пусть (10) доказано уже для некоторого индекса $n - 1 \geqslant 0$. Тогда согласно 1), (7) — (9) получим

$$\|\varkappa_n(t, y) - y\| \leqslant \|A\varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y) - AA^{-1}y\| + \|f[t, \varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y)]\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A\|\|\varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y) - A^{-1}y\| + L\rho(t, \varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y), 0)\|\varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A\|\frac{L}{1-\Delta}\rho(\lambda t, A^{-1}y, 0)\|A^{-1}\|\|y\| + L\rho(t, y, 0)\Big(\|A^{-1}\|\|y\| +$$
$$+ \frac{L}{1-\Delta}\rho(\lambda t, A^{-1}y, 0)\|A^{-1}\|\|y\|\Big) \leqslant \frac{L\delta}{1-\Delta}\rho(t, y, 0)\|y\| +$$
$$+ L\|A^{-1}\|\rho(t, y, 0)\|y\| + \frac{\|A^{-1}\|\theta}{1-\Delta}L^2\rho^2(t, y, 0)\|y\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L}{1-\Delta}\rho(t, y, 0)\|y\|[\delta + \|A^{-1}\|(1-\Delta) + (1-\|A^{-1}\|)(1-\Delta)] \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L}{1-\Delta}\rho(t, y, 0)\|y\|,$$

т. е. (10) и, следовательно, (8) выполняются при $t \leqslant \alpha_1$, $\|y\| \leqslant \beta_1$ и всех $n \geqslant 0$.

Покажем, что

$$\|\varkappa_n(t, y) - \varkappa_{n-1}(t, y)\| \leqslant L\Delta^{n-1}\rho(t, y, 0)\|y\| \tag{11}$$

при $t \leqslant \alpha_1$, $\|y\| \leqslant \beta_1$ и всех $n \geqslant 1$.

Действительно, в силу 1), (7) имеем

$$\|\varkappa_1(t, y) - \varkappa_0(t, y)\| = \|AA^{-1}y + f(t, A^{-1}y) - y\| \leqslant$$
$$\leqslant L\rho(t, A^{-1}y, 0)\|A^{-1}\|\|y\| \leqslant L\rho(t, y, 0)\|y\|,$$

т. е. неравенство (11) выполняется при $n = 1$. Предположим, что неравенство (11) доказано уже для некоторого $n - 1 \geqslant 1$. Тогда из 1), (7)—(9) будет следовать

$$\|\varkappa_n(t, y) - \varkappa_{n-1}(t, y)\| = \|A\varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y) + f[t, \varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y)] -$$
$$- A\varkappa_{n-2}(\lambda t, A^{-1}y) - f[t, \varkappa_{n-2}(\lambda t, A^{-1}y)]\| \leqslant \|A\|\|\varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y) -$$
$$- \varkappa_{n-2}(\lambda t, A^{-1}y)\| + \|f[t, \varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y)] - f[t, \varkappa_{n-2}(\lambda t, A^{-1}y)]\| \leqslant L\|A\|\times$$

$$\times\Delta^{n-2}\rho(\lambda t, A^{-1}y, 0)\,\|A^{-1}y\| + L\rho(t, \varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y), \varkappa_{n-2}(\lambda t, A^{-1}y))\,\|\varkappa_{n-1}(\lambda t, A^{-1}y) - \varkappa_{n-2}(\lambda t, A^{-1}y)\| \leqslant L\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\theta\Delta^{n-2}\rho(t,y,0)\,\|y\| + L^2\rho(t,y,y)\Delta^{n-2}\rho(\lambda t, A^{-1}y, 0)\,\|A^{-1}y\| \leqslant L\delta\Delta^{n-2}\rho(t, y, 0)\,\|y\| + L^2\|A^{-1}\|\,\theta\Delta^{n-2}\rho(t, y, y)\rho(t, y, 0)\,\|y\| \leqslant L\Delta^{n-2}\rho(t, y, 0)\,\|y\|(\delta + \Delta - \delta) = L\Delta^{n-1}\rho(t, y, 0)\,\|y\|.$$

Таким образом, неравенство (11) выполняется при $t \leqslant \alpha_1$, $\|y\| \leqslant \beta_1$ и всех $n \geqslant 1$.

Из (11) непосредственно вытекает, что при $t \leqslant \alpha_1$, $\|y\| \leqslant \beta_1$ ряд $\varkappa_0(t, y) + \sum_{i=1}^{\infty}[\varkappa_i(t, y) - \varkappa_{i-1}(t, y)]$ и, следовательно, последовательность функций (7) равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $\varkappa(t, y)$.

Переходя в (7) к пределу при $n \to \infty$, можно показать, что $\varkappa(t, y)$ — решение системы уравнений (6).

Введем обозначение

$$\tilde{\varkappa}_n(t, y) = \varkappa_n(t, y) - y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{12}$$

Тогда, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\varkappa}_n(t, y) = \tilde{\varkappa}(t, y)$.

Поскольку из (10) следует, что $\tilde{\varkappa}_n(t, 0) \equiv 0$ при всех $n \geqslant 0$, то $\tilde{\varkappa}(t, 0) \equiv 0$.

Для полного доказательства теоремы остается показать, что вектор-функция $\tilde{\varkappa}(t, y)$ удовлетворяет условию (4).

Пусть $(t, \bar{y})$, $(t, \bar{\bar{y}})$ — любые две точки из $\tilde{D}: t \leqslant \alpha_1$, $\|y\| \leqslant \beta_1$. Тогда, пользуясь соотношениями (2), (7)—(9), (12), по индукции получим, что

$$\|\tilde{\varkappa}_0(t, \bar{y}) - \tilde{\varkappa}_0(t, \bar{\bar{y}})\| \leqslant \frac{L}{1-\Delta}\rho(t, \bar{y}, \bar{\bar{y}})\,\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\|,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\|\tilde{\varkappa}_n(t, \bar{y}) - \tilde{\varkappa}_n(t, \bar{\bar{y}})\| = \|A\tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{y}) + f[t, A^{-1}\bar{y} + \tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{y})] - A\tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{\bar{y}}) - f[t, A^{-1}\bar{\bar{y}} + \tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{\bar{y}})]\| \leqslant \|A\|\,\|\tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{y}) - \tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{\bar{y}})\| + \|f[t, A^{-1}\bar{y} + \tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{y})] - f[t, A^{-1}\bar{\bar{y}} + \tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{\bar{y}})]\| \leqslant \|A\|\,\frac{L}{1-\Delta}\rho(\lambda t, A^{-1}\bar{y}, A^{-1}\bar{\bar{y}})\,\|A^{-1}\|\,\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| +$$

$$+ L\rho(t, A^{-1}\bar{y} + \tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{y}), A^{-1}\bar{\bar{y}} + \tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{\bar{y}}))\,\|A^{-1}\bar{y} + \tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{y}) - A^{-1}\bar{\bar{y}} - \tilde{\varkappa}_{n-1}(\lambda t, A^{-1}\bar{\bar{y}})\| \leqslant \frac{L}{1-\Delta}\|A\|\,\|A^{-1}\|\,\theta\rho(t, \bar{y}, \bar{\bar{y}})\,\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| +$$

$$+ L\|A^{-1}\|\,\rho(t, \bar{y}, \bar{\bar{y}})\,\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| + L\rho(t, \bar{y}, \bar{\bar{y}})\frac{L}{1-\Delta}\rho(\lambda t, A^{-1}\bar{y}, A^{-1}\bar{\bar{y}})\,\|A^{-1}\| \times$$

$$\times \|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| \leqslant \frac{L}{1-\Delta}\delta\rho(t, \bar{y}, \bar{\bar{y}})\,\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| + L\|A^{-1}\|\,\rho(t, \bar{y}, \bar{\bar{y}})\,\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| +$$

$$+ L\frac{L}{1-\Delta}\|A^{-1}\|\,\theta\rho^2(t, \bar{y}, \bar{\bar{y}})\,\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| = \frac{L}{1-\Delta}[\delta + (1-\Delta)\|A^{-1}\| +$$

$$+ L\|A^{-1}\|\,\theta\rho(t, \bar{y}, \bar{\bar{y}})]\,\rho(t, \bar{y}, \bar{\bar{y}})\,\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\| \leqslant \frac{L}{1-\Delta}\rho(t, \bar{y}, \bar{\bar{y}})\,\|\bar{y} - \bar{\bar{y}}\|.$$

Таким образом, при всех $n \geqslant 0$ выполняются неравенства

$$\| \varkappa_n (t, \bar{y}) - \varkappa_n (t, \bar{\bar{y}}) \| \leqslant \frac{L}{1-\Delta} \rho (t, \bar{y}, \bar{\bar{y}}) \| \bar{y} - \bar{\bar{y}} \|, \tag{13}$$

где $(t, \bar{y})$, $(t, \bar{\bar{y}}) \in \tilde{D}$. Переходя в (13) к пределу при $n \to \infty$ и принимая во внимание (9), получаем условие (4). Теорема доказана.

Таким образом, выполняя в (1) замену переменных (3), получаем линейную систему функциональных уравнений с постоянными коэффициентами (5). Для таких систем уравнений в [1] построено общее решение. Поскольку замена переменных (3) удовлетворяет условию (4) и, следовательно, взаимно однозначна, то при достаточно малых $t > 0$ общее непрерывное решение системы уравнений (1) имеет вид $x(t) = y(t) + \tilde{\varkappa}[t, y(t)]$, где $\varkappa(t, y) = y + \tilde{\varkappa}(t, y)$ — непрерывное решение системы уравнений (6) такое, что вектор-функция $\tilde{\varkappa}(t, y)$ удовлетворяет условию (4), $\tilde{\varkappa}(t, 0) \equiv 0$ и $y(t)$ — любое непрерывное решение системы уравнений (5), удовлетворяющее условию $\| y(t) \| \leqslant \beta_1$.

1. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1974.— 119 с.
2. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Общее решение системы функциональных уравнений в окрестности особой точки.— В кн.: Функциональные и дифференциально-разностные уравнения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974, с. 100—109.
3. *Пелюх Г. П.* Общее решение одного класса систем нелинейных функциональных уравнений.— В кн.: Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979, с. 49—53.
4. *Пелюх Г. П.* Исследование систем нелинейных функциональных уравнений в окрестности особых точек.— В кн.: Исследование дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 88—106.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
25.05.82