УДК 517.983

Н. Е. Линчук, С. С. Линчук

Об одном классе операторных уравнений в аналитических пространствах

Пусть G — произвольная область расширенной комплексной плоскости. Через $A(G)$ обозначим пространство всех аналитических в G функций (равных нулю в бесконечно-удаленной точке, если последняя принадлежит G) с общепринятой топологией [1], а символом $\mathcal{L}(A(G_1), A(G_2))$ — множество всех линейных непрерывных операторов, действующих из $A(G_1)$ в $A(G_2)$. Для фиксированной функции $\varphi(z) \in A(G)$ оператор умножения

$U_\varphi f(z) = \varphi(z) f(z)$ непрерывно действует в $A(G)$. В данной работе изучаются операторные уравнения вида

$$TU_{\varphi_1} = U_{\varphi_2}T \tag{1}$$

в классе линейных непрерывных операторов $T \in \mathscr{L}(A(G_1), A(G_2))$, где $\varphi_i(z) \in A(G_i)$, $i = 1,2$. Исследование уравнения (1) сводится к вопросам аналитического продолжения, а также к вопросам делимости в некоторых классах аналитических функций двух переменных. Найдены условия, при которых уравнение (1) имеет только тривиальное решение. В некоторых случаях дано эффективное описание всех решений уравнения (1). Полученные результаты применяются к исследованию условий эквивалентности операторов умножения в различных аналитических пространствах.

К уравнениям вида (1) приводятся при помощи определенных преобразований некоторые операторные уравнения, содержащие операторы дифференцирования [2]. Отметим, что вопросу описания линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций и перестановочных с оператором умножения на фиксированную функцию, т. е. описанию решений уравнения (1) в частном случае, когда $G_1 = G_2$ и $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$, посвящены работы [3, 4].

Основным аппаратом исследования уравнения (1) будет, полученное Кете [1], интегральное представление операторов из класса $\mathscr{L}(A(G_1), A(G_2))$, которое для удобства вкратце приведем (см. также [5]). Пусть G_1 и G_2 — произвольные области, а $G_n^{(i)}$, $i = 1,2$, $n = 1,2,\ldots$,— последовательности конечносвязных областей, каждая из которых ограничена конечным числом спрямляемых замкнутых жордановых кривых, аппроксимирующие изнутри соответствующую область, т. е. $\overline{G}_n^{(i)} \subset G_{n+1}^{(i)}$, $G_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^{(i)}$, причем связность $G_n^{(i)}$ не превосходит связности G_i и $\infty \in G_n^{(i)}$, $n = 1, 2, \ldots$, если $\infty \in G_i$. Если $T \in \mathscr{L}(A(G_1), A(G_2))$, то функция

$$t(\lambda, z) = T\left[\frac{1}{\lambda - \tilde{z}}\right], \quad \lambda \in CG_1, \ z \in G_2, \ \tilde{z} \in G_1 \tag{2}$$

локально аналитична на множестве $CG_1 \times G_2$, в следующем смысле: для любого натурального числа n существует $N(n)$ такое, что $t(\lambda, z)$ аналитична на множестве $\mathscr{H}_{N(n)}^{(1)} \times \overline{G}_n^{(2)}$, где $\mathscr{H}_n^{(1)} = C\overline{G}_n^{(1)}$, при этом $t(\lambda, z) = 0$, когда хотя бы одно из чисел λ, z равно бесконечности; кроме того, если $m > n$, то определенная на множествах $\mathscr{H}_{N(n)}^{(1)} \times \overline{G}_n^{(2)}$ и $\mathscr{H}_{N(m)}^{(1)} \times \overline{G}_m^{(2)}$ функция $t(\lambda, z)$ совпадает на их пересечении $\mathscr{H}_{N(m)}^{(1)} \times \overline{G}_n^{(2)}$ (всегда можно считать, что функция $N(n)$ монотонно возрастает). При этом, для $g(z) \in A(G_1)$ и $z \in \overline{G}_n^{(2)}$

$$Tg(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} t(\lambda, z)\, g(\lambda)\, d\lambda, \tag{3}$$

где γ_n — граница области $G_{N(n)+1}^{(1)}$, причем область $G_{N(n)+1}^{(1)}$ остается слева при обходе по контуру интегрирования.

Обратно, если функция $t(\lambda, z)$ локально аналитична на множестве $CG_1 \times G_2$, то равенством (3) определяется оператор $T \in \mathscr{L}(A(G_1), A(G_2))$. Таким образом, формулами (2) и (3) устанавливается взаимно однозначное соответствие между локальноаналитическими на множестве $CG_1 \times G_2$ функциями $t(\lambda, z)$ и линейными непрерывными операторами $T \in \mathscr{L}(A(G_1), A(G_2))$. Функцию $t(\lambda, z)$, определяемую для оператора $T \in \mathscr{L}(A(G_1), A(G_2))$ формулой (2), будем называть характеристической функцией оператора T.

1. Пусть G_i, $i = 1,2$, — произвольные области комплексной плоскости, а $\varphi_i(z) \in A(G_i)$, $i = 1,2$. Предположим, что оператор $T \in \mathscr{L}(A(G_1), A(G_2))$ с характеристической функцией $t(\lambda, z)$ удовлетворяет уравнению (1). Обозначим через $t_1(\lambda, z)$ характеристическую функцию оператора TU_{φ_1}. Для $\lambda \in \mathscr{H}_{N(n)+1}^{(1)} \cap G_1$ и $z \in G_n^{(2)}$, где $\mathscr{H}_{N(n)}^{(1)}$ и γ_n

взяты согласно определению локально аналитической на множестве $CG_1 \times \times G_2$ функции $t(\lambda, z)$, имеем

$$t_1(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} t(\tau, z) \frac{\varphi_1(\tau)}{\lambda - \tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} t(\tau, z) \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_1(\lambda)}{\lambda - \tau} d\tau + \varphi_1(\lambda) t(\lambda, z).$$

Из соотношения (1) следует, что $t_1(\lambda, z) = \varphi_2(z) t(\lambda, z)$. Приравняв полученные выражения для $t_1(\lambda, z)$, убедимся в том, что при $\lambda \in \mathscr{H}^{(1)}_{N(n)+1} \cap G_1$ и $z \in G_n^{(2)}$ выполняется равенство

$$[\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(z)]\, t(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} t(\tau, z) \frac{\varphi_1(\lambda) - \varphi_1(\tau)}{\lambda - \tau} d\tau. \tag{4}$$

Но функция

$$t_2(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} t(\tau, z) \frac{\varphi_1(\lambda) - \varphi_1(\tau)}{\lambda - \tau} d\tau$$

аналитическая при $\lambda \in G_1$ и $z \in G_n^{(2)}$. Поэтому из (4) следует, что функция $[\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(z)] t(\lambda, z)$ аналитически продолжается на множество $G_1 \times G_2$.

Обратно, пусть локально аналитическая на множестве $CG_1 \times G_2$ функция $t(\lambda, z)$ такова, что функция $[\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(z)] t(\lambda, z)$ аналитически продолжается на множество $G_1 \times G_2$. Тогда формула (3) определяет оператор T, удовлетворяющий уравнению (1). Действительно, пусть $g(z) \in A$. Тогда при $z \in G_n^{(2)}$ получим

$$TU_{\varphi_1} g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} t(\lambda, z) \varphi_1(\lambda)\, d\lambda = \varphi_2(z) Tg(z) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} t(\lambda, z) [\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(z)]\, g(\lambda)\, d\lambda = U_{\varphi_2} Tg(z).$$

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 1. *Пусть $\varphi_i(z) \in A(G_i)$, $i = 1,2$, а $t(\lambda, z)$ — характеристическая функция оператора $T \in \mathscr{L}(A(G_1), A(G_2))$. Для того чтобы оператор T был решением уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы функция $[\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(z)] t(\lambda, z)$ аналитически продолжалась на множество $G_1 \times G_2$, $\lambda \in G_1$, $z \in G_2$.*

2. Изучим операторные уравнения вида

$$TU_P = U_\varphi T \tag{5}$$

в классе линейных непрерывных операторов $T \in \mathscr{L}(A(G_1), A(G_2))$, где G_i, $i = 1, 2,$ — произвольные области комплексной плоскости, причем $\infty \notin G_1$, $P(z) = \sum_{k=0}^{m} p_k z^k$ — многочлен ненулевой степени m, а $\varphi(z) \in A(G_2)$. Предположим, что линейный непрерывный оператор T с характеристической функцией $t(\lambda, z)$ удовлетворяет уравнению (5). При $\lambda \neq z$, $\lambda, z \in \mathbf{C}$, имеем $\frac{P(\lambda) - P(z)}{\lambda - z} = \sum_{k=0}^{m-1} Q_k(z) \lambda^k$, где $Q_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, — многочлены, степени которых не превосходят $m-1$. Положим $TQ_k(z) = \varphi_k(z)$, $\varphi_k(z) \in A(G_2)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Пусть $G_n^{(2)}$ и $\mathscr{H}^{(1)}_{N(n)}$ взяты согласно определению локально аналитической на множестве $CG_1 \times G_2$ функции $t(\lambda, z)$. Проведя рассуждения, как и при доказательстве первой части теоремы 1, убеждаемся в том, что на множестве $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_{N(n)}^{(1)}\times\overline{G}_n^{(2)}$ выполняется

$$[P(\lambda)-\varphi(z)]\,t(\lambda, z)=\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_k(z)\,\lambda^k. \tag{6}$$

Таким образом доказана необходимость условий следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть G_1 и G_2 — произвольные области, причем $\infty\notin G_1$, $P(z)$ — многочлен ненулевой степени m, а $\varphi(z)\in A(G_2)$. Для того чтобы оператор $T\in\mathcal{L}(A(G_1), A(G_2))$ был решением уравнения* (5), *необходимо и достаточно, чтобы существовали функции $\varphi_k(z)\in A(G_2)$, $k=0, 1, \ldots, m-1$, такие, что для характеристической функции $t(\lambda, z)$ оператора T на множестве $F=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{H}_{N(n)}^{(1)}\times\overline{G}_n^{(2)}$ выполняется равенство* (6). *Если имеет место* (6), *то формулой* (3) *определяется линейный непрерывный оператор T, соответствующий функции $t(\lambda, z)$ и удовлетворяющий уравнению* (5).

Достаточность условий теоремы 2 следует из теоремы 1.

Приведем некоторые следствия из теоремы 2.

Теорема 3. *Если $\varphi(G_2)\cap P(CG_1)=\varnothing$, то формулой* (3), *где*

$$t(\lambda, z)=\frac{\sum\limits_{k=0}^{m-1}\varphi_k(z)\,\lambda^k}{P(\lambda)-\varphi(z)}, \tag{7}$$

а $\varphi_k(z)$, $k=0, 1, \ldots, m-1$,— произвольные функции из $A(G_2)$, дается общее решение уравнения (5).

Доказательство. При выполнении условий теоремы 3 формулой (7) определяется локально аналитическая на множестве $CG_1\times G_2$ функция $t(\lambda, z)$, удовлетворяющая равенству (6), каковы бы ни были функции $\varphi_k(z)\in A(G_2)$, $k=0,1, \ldots, m-1$. Поэтому утверждение теоремы 3 следует из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть $G_1=\mathbf{C}$, а G_2 — произвольная область. Тогда для любой функции $\varphi(z)\in A(G_2)$ и произвольного многочлена ненулевой степени $P(z)$ общее решение уравнения* (5) *дается формулой* (3), *где $t(\lambda, z)$ определяется равенством* (6), *а $\varphi_k(z)$, $k=0, 1, \ldots, m-1$,— произвольные функции из $A(G_2)$.*

Следствие 2. *Пусть G_i, $i=1, 2$, — области в $\mathbf{C}$, причем $\omega^k G_2\subset G_1$ при $k=0, 1, \ldots, m-1$, где $\omega=\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$, а m — фиксированное натуральное число. Тогда общее решение уравнения $TU_{z^m}=U_{z^m}T$ дается формулой*

$$Tg(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_k(z)\sum_{n=0}^{m-1}(\omega^n z)^{k-m+1}g(\omega^n z),$$

где $\varphi_k(z)$, $k=0, 1, \ldots, m-1$, — произвольные аналитические в области G_2 функции.

Рассмотрим случай, когда (5) имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 4. *Если для некоторого $z\in G_2$ все корни уравнения $P(\lambda)=\varphi(z)$ относительно λ лежат вне области G_1, то операторное уравнение* (5) *имеет лишь тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $t(\lambda, z)$ — характеристическая функция оператора T, который является решением уравнения (5). Тогда, согласно теореме 2, существуют функции $\varphi_k(z)\in A(G_2)$, $k=0,1, \ldots, m-1$, такие, что выполняется равенство (6). Зафиксируем $z'\in G_2$, для которого все корни уравнения $P(\lambda)=\varphi(z')$ лежат вне G_1. Возьмем натуральное число n и соответствующее ему $N(n)$ такими, чтобы $z'\in G_n^{(2)}$ и на множестве $\mathcal{H}_{N(n)}^{(1)}\times G_n^{(2)}$ выполнялось равенство (6). Уравнение $P(\lambda)=$

$=\varphi(z')$ имеет m корней, которые принадлежат открытому множеству $\mathcal{H}^{(1)}_{N(n)}$. В силу непрерывной зависимости корней многочлена от его коэффициентов, существует, содержащаяся в $G^{(2)}_n$, окрестность $V_\varepsilon=\{z:|z-z'|<\varepsilon\}$ точки z' такая, что для любого $z\in V_\varepsilon$ все корни уравнения $P(\lambda)=\varphi(z)$ будут также лежать в множестве $\mathcal{H}^{(1)}_{N(n)}$. А тогда из равенства (6) следует, что при каждом $z\in V_\varepsilon$ уравнение $\sum\limits_{k=0}^{m-1}\varphi_k(z)\lambda^k=0$ относительно λ имеет m корней (учитывая их кратности). Поэтому $\varphi_k(z)=0$ для $z\in V_\varepsilon$, а значит, $\varphi_k(z)\equiv 0$ в G_2 при $k=0,1,\dots,m-1$. Следовательно, на основании равенства (6), $t(\lambda,z)\equiv 0$, т. е. $T=0$.

Следствие 3. *Если область G_1 ограничена, а функция $\varphi(z)$ неограничена на G_2, то каков бы ни был многочлен $P(\lambda)$, уравнение* (5) *имеет лишь тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $P(\lambda)$ — произвольный многочлен. Если c стремится к бесконечности, то все корни уравнения $P(\lambda)=c$ также стремятся к бесконечности. Поэтому если выполняются условия следствия, то существует $z\in G_2$, для которого все корни уравнения $P(\lambda)=\varphi(z)$ лежат вне области G_1. Остается воспользоваться теоремой 4.

Следствие 4. *Пусть $G_1=\{z:|z|<R\}$, а G_2 — произвольная область. Если существует $z\in G_2$, для которого $|\varphi(z)|\geqslant R^m$, то*

$$TU_{z^m}=U_\varphi T \tag{8}$$

имеет лишь тривиальное решение. Если же при всех $z\in G_2$ $|\varphi(z)|<R^m$, то общее решение уравнения (8) *дается формулой*

$$Tg(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\varphi_k(z)\sum_{n=0}^{m-1}\left(\sqrt[m]{\varphi(z)}\,\omega^n\right)^{k-m+1}g\left(\sqrt[m]{\varphi(z)}\,\omega^n\right),\quad где\quad \omega=$$

$=\exp\left(\dfrac{2\pi i}{m}\right)$, $\sqrt[m]{\varphi(z)}$ *— одно из значений корня, а* $\varphi_k(z)\in A(G_2)$; $k=0,1,\dots,m-1$.

Предложение 1. *Для того чтобы существовало нетривиальное решение операторного уравнения*

$$TU_z=U_\varphi T, \tag{9}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(G_2)\subset G_1$. При условии $\varphi(G_2)\subset G_1$ общее решение уравнения (9) *дается формулой $Tg(z)=g(\varphi(z))\,h(z)$, где $h(z)$ — фиксированная функция из $A(G_2)$.*

Первая часть предложения 1 следует из теоремы 4, а вторая — из теоремы 3.

В частности, уравнение $TU_z=U_zT$ имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $G_2\subset G_1$. Поэтому верно следствие.

Следствие 5. *Пусть G_1 и G_2 — произвольные области в* $\mathbf{C}$. *Оператор U_z в $A(G_1)$ эквивалентен оператору U_z в $A(G_2)$ тогда и только тогда, когда $G_1=G_2$.*

Предложение 2. *Оператор U_z в $A(G_1)$ эквивалентен оператору U_φ в $A(G_2)$ тогда и только тогда, когда функция $\varphi(z)$ осуществляет конформное отображение области G_2 на G_1.*

Доказательство. Предположим, что оператор U_z в $A(G_1)$ эквивалентен оператору U_φ в $A(G_2)$. Тогда существует изоморфизм $T\in\mathcal{L}(A(G_1),A(G_2))$, для которого выполняется равенство (9). Поэтому согласно предложению 1 $\varphi(G_2)\subset G_1$ и существует функция $h(z)\in A(G_2)$ такая, что $Tg(z)=g(\varphi(z))\cdot h(z)$. Поскольку T — изоморфизм, то $h(z)\neq 0$ при $z\in G_2$ и $\varphi(z)$ — однолистная в области G_2. Обозначив $\varphi(G_2)=G_1'\subset G_1$, получим, что формулой $\widetilde{T}g(z)=g(\varphi(z))\,h(z)$ определяется изоморфизм, действующий из $A(G_1')$ в $A(G_2)$ и удовлетворяющий равенству $\widetilde{T}U_z=U_z\widetilde{T}$.

Следовательно, оператор U_z в $A(G_1)$ эквивалентен оператору U_z в $A(G_s')$. Поэтому на основании следствия 5 $G_1'=G_1$, и, действительно, функция $\varphi(z)$ осуществляет конформное отображение области G_2 на G_1.

Обратное утверждение следует из того, что если $\varphi(z)$ осуществляет конформное отображение области G_2 на G_1, то формулой $Tg(z) = g(\varphi(z))$ определяется изоморфизм $T \in \mathcal{L}(A(G_1), A(G_2))$, удовлетворяющий равенству (8).

3. Рассмотрим уравнение вида

$$T_1 U_{P\circ\psi} = U_\varphi T_1 \tag{10}$$

в классе линейных непрерывных операторов $T_1 \in L(A(G_1'), A(G_2))$, где G_1', G_2 — произвольные области комплексной плоскости, $\varphi(z) \in A(G_2)$, $P(z)$ — многочлен ненулевой степени, $\psi(z)$ — однолистная в G_1' функция, а $(P\circ\psi)(z) = P(\psi(z))$.

Пусть $\psi(G_1') = G_1$. Рассмотрим оператор $L \in \mathcal{L}(A(G_1), A(G_1'))$, определяемый формулой $Lg(z) = (g\circ\psi)(z)$. Поскольку $\psi(z)$ осуществляет конформное отображение области G_1' на G_1, то оператор L является изоморфизмом. Обратный оператор к L действует из $A(G_1')$ в $A(G_1)$ по правилу $L^{-1}g(z) = (g\circ\psi^{-1})(z)$, где $\psi^{-1}(z)$ — обратное отображение к отображению $\psi(z)$. Покажем, что при помощи изоморфизма L уравнение (10) может быть приведено к уравнению вида (5).

Теорема 5. *Оператор $T_1 \in \mathcal{L}(A(G_1), A(G_2))$ является решением уравнения* (10) *тогда и только тогда, тогда оператор $T = T_1L$, $T \in \mathcal{L}(A(G_1), A(G_2))$, удовлетворяет уравнению* (5).

Доказательство. Оператор L является изоморфизмом пространства $A(G_1)$ на $A(G_1')$. Учитывая еще соотношение $LU_P = U_{P\circ\psi}L$, получим, что оператор T_1 будет решением уравнения (10) тогда и только тогда, когда выполняется равенство $T_1LU_P = U_\psi T_1L$. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы 5.

Таким образом, общее решение уравнения (10) дается формулой $T_1 = TL^{-1}$, где T — произвольный линейный непрерывный оператор, действующий из $A(G_1)$ в $A(G_2)$ и удовлетворяющий равенству (5).

Используя теорему 5, все утверждения предыдущего пункта можно легко распространить на уравнение вида (10), которое является обобщением уравнения (5). Например, верно утверждение.

Предложение 3. *Если $\varphi_i(z) \in A(G_i)$, $i = 1, 2$, причем $\varphi_1(z)$ однолистна в G_1, то уравнение* (1) *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда $\varphi_2(G_2) \subset \varphi_1(G_1)$. При условии $\varphi_2(G_2) \subset \varphi_1(G_1)$ общее решение уравнения* (I) *дается формулой $Tg(z) = (g\circ\varphi_1^{-1}\circ\varphi_2)(z)\cdot h(z)$, где $h(z)$ — произвольная функция из $A(G_2)$.*

На основании теоремы 5 и предложений 2, 3 верна теорема.

Теорема 6. *Пусть $\varphi_i(z) \in A(G_i)$, $i = 1, 2$. Если функция $\varphi_1(z)$ однолистна в области G_1, то оператор U_{φ_1} в $A(G_1)$ эквивалентен оператору U_{φ_2} в $A(G_2)$ тогда и только тогда, когда $\varphi_2(z)$ однолистна в G_2 и осуществляет конформное отображение области G_2 на область $\varphi_1(G_1)$.*

Предложенный метод допускает применения к исследованию уравнений вида (1) в классах линейных непрерывных операторов, действующих в других пространствах аналитических функций.

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionentheorie.— Gourn. f. reine und angew. Math., 1953, 191, S. 30—49.
2. *Подпорин В. П.* О решениях операторного уравнения в некоторых классах линейных операторов.— Докл. АН СССР, 1978, 240, № 1, с. 28—31.
3. *Захарюта В. П., Царьков М. Ю.* Операторы, коммутирующие с умножением в пространствах аналитических функций одного переменного.— Мат. заметки, 1973, 13, вып. 2, с. 269—277.
4. *Нагнибида Н. И.* Операторы, перестановочные с операторами умножения на аналитические функции и связанные с ними квазистепенные базисы.— В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков : Изд-во ХГУ, 1971, вып. 13, с. 63—67.
5. *Коробейник Ю. Ф.* Об одном классе линейных операторов.— Годишник на ВТУЗ. Матем., 1973, 9, № 3, с. 23—33.

Черновицкий
государственный университет

Поступила в редакцию
16.02.82