УДК 517.948.35

В. В. Левчук

Гладкие максимально диссипативные граничные задачи для параболического уравнения в гильбертовом пространстве

1. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. В гильбертовом пространстве $L_2(H; (0, b))$ вектор-функций со значениями в H, норма которых интегрируема с квадратом на $(0,b)$, $0 < b < \infty$, рассмотрим дифференциальное выражение

$$l[y] = y'(t) + Ay(t), \tag{1}$$

где A — положительный самосопряженный оператор в H с областью определения $D(A)$.

На плотном в $L_2(H; (0, b))$ множестве D_0' элементов вида $y(t) = \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) f_k$, где $f_k \in D(A)$, а $\varphi_k(t) \in C_0^\infty(0, b)$ ($C_0^\infty(0, b)$ — множество финитных бесконечно дифференцируемых функций), зададим оператор $L_0' : L_0' y = l[y]$. Из формулы

$$\mathrm{Re}\int_\alpha^\beta (L_0' y, z)\, dt = (y(t), z(t))\big|_\alpha^\beta + 2\int_\alpha^\beta (Ay, z)\, dt, \tag{2}$$

$$y(t), z(t) \in D_0', \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant b,$$

вытекает, что оператор L_0' диссипативен в $L_2(H; (0, b))$. Оператор B в H с плотной областью определения $D(B)$ называется диссипативным, если $\mathrm{Re}(Bf, f) \geqslant 0$ при всех $f \in D(B)$, и максимально диссипативным, если он диссипативен и у него не существует собственных диссипативных расширений [1]. Замыкание L_0 оператора L_0' в пространстве $L_2(H; (0, b))$ назо-

Обратно, если $f \in W^{-\infty}\{a_s\}$ и $P_0 f = 0$, то

$$\| Pu \|_{\infty}^2 = \sum_{(k,p)\in\Omega} \lambda_{k,p} \left| \frac{f_{k,p}}{L(\tau(p), ik)} \right|^2 = \sum_{(k,p)\in\Omega} \lambda_{k,p}^{-1} | f_{k,p} |^2 = \| Pf \|_{-\infty}^2 = \| f \|_{-\infty}^2.$$

$P_0 = 0$ тогда и только тогда, когда $L(\tau(p), ik) \neq 0$ для всех векторов $(k, p) \in \mathbb{Z}^{m+1}$. Отсюда получим, что однородная задача, отвечающая задаче (1), (2), имеет только тривиальное решение. Теорема доказана.

Полученные результаты можно обобщить на случай, когда вместо операторов дифференцирования на торе рассматривать произвольные линейные операторы, имеющие совместное спектральное представление.

1. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения.— В кн.: Современные проблемы математики. М., ВИНИТИ, 1976, 9, с. 5—130.
2. *Дубинский Ю. А.* Об одном методе решения дифференциальных уравнений с частными производными.— Докл. АН СССР, 258, № 4, с. 780—784.
3. *Илькив В. С.* Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1982, № 5, с. 15—19.
4. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. — М. : Наука, 1980. — 208 с.
5. *Берник В. И.*, *Пташник Б. И.*, *Сальгa Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами.— Дифференц. уравнения, 1977, 13, № 4, с. 637—645.

Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
13.05.82

вем минимальным оператором, порожденным дифференциальным выражением (1).

Аналогично предыдущему по формально сопряженному к (1) выражению

$$l^{+}[y] = -y'(t) + Ay(t) \tag{3}$$

строим минимальный оператор L_0^+. Сопряженный к L_0^+ оператор L будем называть максимальным, порожденным выражением (1).

Одной из задач, возникающих при исследовании операторов L_0 и L, является задача об описании их областей определения [2]. Для решения этой задачи нам необходимо выйти из пространства H в более широкое негативное пространство, построенное по оператору A. Не уменьшая общности, будем считать, что в выражении (1) оператор $A \geqslant E$, E — единичный оператор в H.

Через H_τ, $-\infty < \tau < \infty$, обозначим гильбертову шкалу пространств, порожденную оператором A [3]. Теперь оператор можно рассматривать как оператор, изометрически переводящий H_{+1} в H. Сопряженный к нему оператор $\hat{A}$, действующий из H в H_{-1}, является расширением оператора $\hat{A}$. Если оператор $\hat{A}$ рассматривать как оператор в H_{-1} с $D(\hat{A}) = H$, то оказывается, что $\hat{A}$ самосопряжен, причем $\hat{A} \geqslant E$ [4, 5].

Рассмотрим дифференциально-операторное уравнение

$$y'(t) + Ay(t) = h(t), \ t \in [0, b], \ h(t) \in L_2(H; (0, b)). \tag{4}$$

Определение. *Вектор-функция* $y(t) \in L_2(H; (0, b))$ *называется обобщенным решением уравнения* (4), *если равенство*

$$-\int_0^b (y(t), f)\,\varphi'(t)\,dt + \int_0^b (y(t), Af)\,\varphi(t)\,dt = \int_0^b (h(t), f)\,\varphi(t)\,dt \tag{5}$$

выполняется для произвольных $f \in D(A)$ *и* $\varphi(t) \in C_0^\infty(0, b)$.

Лемма. *Вектор-функция* $y(t) \in L_2(H; (0, b))$ *является обобщенным решением уравнения* (4) *в том и только в том случае, если она представима в виде*

$$y(t) = e^{-\hat{A}t} f + \int_0^t e^{-A(t-s)} h(s)\,ds, \tag{6}$$

где $f \in H_{-1/2}$.

Доказательство. Согласно [6] получаем, что первое слагаемое в правой части равенства (6) является решением внутри $(0, b)$ уравнения (4) с нулевой правой частью, принадлежащим к $L_2(H; (0, b))$. Второе слагаемое в (6) сильно непрерывно по t на $[0, b]$ и, следовательно, принадлежит к $L_2(H; (0, b))$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $y(t)$ удовлетворяет равенству (5). Обратно: пусть $y(t) \in L_2(H; (0, b))$ — обобщенное решение уравнения (4), тогда вектор-функция $z(t) = y(t) - \int_0^t e^{-A(t-s)} h(s)\,ds$ — обобщенное решение из $L_2(H; (0, b))$ уравнения (4) с нулевой правой частью.

Из [7] вытекает, что $z(t)$ — решение внутри $(0, b)$ уравнения (4) с $h(t) = 0$. Последнее означает [6], что существует такой вектор $f \in H_{-1/2}$, для которого $z(t) = \exp(-At) f$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Область определения* $D(L)$ *максимального оператора* L *состоит из тех и только тех вектор-функций* $y(t)$, *представимых в виде*

$$y(t) = e^{-\hat{A}t} f + \int_0^t e^{-A(t-s)} h(s)\,ds, \tag{7}$$

где $f \in H_{-1/2}$, $h(t) = Ly(t) \in L_2(H; (0, b))$.

Доказательство. Пусть $y(t)\in D(L)$ и $z(t)\in D(L_0^+)$, тогда

$$(Ly(t), z(t))_{L_2(H;(0,b))}=(y(t), L_0^+ z(t))_{L_2(H;(0,b))}=(h(t), z(t))_{L_2(H;(0,b))}, \qquad (8)$$

где $h(t)=Ly(t)\in L_2(H;\ 0, b))$.

В частности, равенство (8) имеет место для $z(t)=\varphi(t)f,\ f\in D(A)$, $\varphi(t)\in C_0^\infty(0, b)$, т. е.

$$-\int_0^b (y(t), f)\,\varphi'(t)\,dt+\int_0^b (y(t), Af)\,\varphi(t)\,dt=\int_0^b (Ly(t), f)\,\varphi(t)\,dt, \qquad (9)$$

где $f\in D(A)$ и $\varphi(t)\in C_0^\infty(0, b)$ произвольны.

Из леммы и равенства (9) вытекает требуемое.

Обратное утверждение получаем непосредственной проверкой. Теорема доказана.

Пусть D' — множество вектор-функций $y(t)\in L_2(H;\ (0,\ b))$, удовлетворяющих условиям: а) $y(t)$ сильно непрерывно дифференцируема в H на $[0, b]$; б) $[0, b]\to y(t)\in D(A)$; $l[y]\in L_2(H;\ (0, b))$.

Нетрудно убедиться, что если $y(t)\in D'$, то она принадлежит и к $D(L)$. Более того, подобно [5], можно получить следующее утверждение.

Следствие 1. *Оператор L совпадает с замыканием оператора L', $L'y=l[y]$, $y\in D'$, в пространстве $L_2(H;\ (0,\ b))$.*

Из теоремы 1 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 2. *Вектор-функция $y(t)\in L_2(H;\ (0,\ b))$ принадлежит к $D(L)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условиям: а) $y(t)$ абсолютно непрерывна на $(0,\ b]$ в пространстве $H_{-1/2}$; б) $l[y]\in$ $\in L_2(H;\ (0, b))$, $\tilde{l}[y]=y'(t)+\hat{A}y(t)$. На $D(L)$ оператор L действует как $Ly=\tilde{l}[y]$.*

Следующая теорема дает описание области определения $D(L_0)$ минимального оператора L_0.

Теорема 2. *$D(L_0)$ состоит из тех и только тех вектор-функций $y(t)\in D(L)$, которые удовлетворяют условию*

$$y(0)=y(b)=0. \qquad (10)$$

Доказательство. Ясно, что $L_0\subseteq L$. Следовательно, если $y(t)\in$ $\in D_0'\subseteq D(L)$, то в силу теоремы 1 она представима в виде

$$y(t)=\int_0^t e^{-A(t-s)}h(s)\,ds, \qquad (11)$$

где $h(s)=Ly(t)\in L_2(H;\ (0,\ b))$, при этом $\int_0^b e^{-A(b-s)}h(s)\,ds=0$.

Пусть последовательности $D_0'\ni y_k(t)=\int_0^t e^{-A(t-s)}h_k(s)\,ds\xrightarrow[k\to\infty]{} u(t)$ и $l[y_k](t)=Ly_k(t)=h_k(t)\xrightarrow[k\to\infty]{} z(t)$ в пространстве $L_2(H;\ 0, b))$. Тогда $u(t)=$ $=\int_0^t e^{-A(t-s)}z(s)\,ds$, поэтому $u(0)=0$. Так как $y_k(b)=\int_0^b e^{-A(b-s)}\,h_k(s)\,ds=$ $=0$, то переходом к пределу при $k\to\infty$ получаем, что $u(b)=0$. Обратно, если вектор-функция $y(t)\in D(L)$ и удовлетворяет условию (10), то она представима в виде (11), а такие вектор-функции принадлежат к области определения замыкания оператора L_0' в пространстве $L_2(H;\ (0,\ b))$. Теорема доказана.

В [5] показано, что оператор $h(s)\to\int_0^t e^{-A(t-s)}h(s)\,ds$ непрерывен из $L_2(H;\ (0, t))$ в $H_{1/2}$. Тогда из теоремы 2 нетрудно получить следующее следствие.

С л е д с т в и е 3. *Если вектор-функция* $y(t) \in D(L_0)$, *то она непрерывна в пространстве* $H_{1/2}$ *на* $[0, b]$.

2. Дальнейшая цель — дать описание в терминах граничных условий некоторых классов максимально диссипативных расширений минимального оператора, порожденного выражением (1), и изучить спектральные свойства таких расширений. Будем использовать методику, развитую при описании других типов расширений минимального оператора второго порядка в работах [5, 6, 8].

Любое линейное многообразие M в $H \oplus H$ называется линейным отношением в H.

Линейное отношение M в H называется i-диссипативным (диссипативным), если для произвольного элемента $\{x, x'\} \in M$ выполнено неравенство $\operatorname{Im}(x, x') \geqslant 0$ $(\operatorname{Re}(x, x') \geqslant 0)$.

Диссипативное (i-диссипативное) отношение M называется максимально диссипативным, если оно не имеет собственных диссипативных (i-диссипативных) расширений M_1 $(M_1 \supset M)$.

Унитарный в $H \oplus H$ оператор $J = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & iE \end{pmatrix}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между i-диссипативными и диссипативными отношениями в H с сохранением свойства максимальности. Из последнего замечания и [8] вытекает предложение.

П р е д л о ж е н и е. *Каким бы ни было сжатие* K *в* H, $\|K\| \leqslant 1$, *линейное отношение, определяемое уранением*

$$(K + E)x' + (K - E)x = 0 \tag{12}$$

максимально диссипативно в H. *Обратно, всякое максимально диссипативное отношение в* H *представимо в виде* (12), *при этом сжатие* K *определяется отношением однозначно.*

3. Если вектор-функция $y(t) \in D(L)$, то из теоремы 1 и следствия 3 вытекает, что $y(t)$ непрерывна в пространстве $H_{1/2}$ и непрерывно дифференцируема в $H_{-1/2}$ на произвольном отрезке $[\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta \leqslant b$. Благодаря этому, для любых $y(t)$ и $z(t)$ из $D(L)$ имеет место формула

$$\int_\alpha^\beta (Ly, z)\,dt + \int_\alpha^\beta (y, Lz)\,dt = (y(\beta), z(\beta)) - (y(\alpha), z(\alpha)) + \\ + 2\int_\alpha^\beta (\hat{A}^{1/2}y, \hat{A}^{1/2}z)\,dt. \tag{13}$$

Так как при $t \to 0$ вектор-функции из $D(L)$ принимают граничные значения в пространстве $H_{-1/2}$, то в правой части равенства (13) теряют смысл второе и третье слагаемые при $\alpha = 0$. Если же $y(t)$ и $z(t)$ принадлежат множеству $D_H(L)$ вектор-функций из $D(L)$, принимающих граничное значение в нуле в пространстве H, то, взяв в (13) $y(t) = z(t) \in D_H(L)$, $\alpha = 0$ и $\beta = b$, получим

$$\operatorname{Re}(Ly, y)_{L_2(H;(0,b))} = \|y(b)\|^2 - \|y(0)\|^2 + 2\int_0^b \|\hat{A}^{1/2}y\|^2\,dt. \tag{14}$$

Из формулы (14) вытекает, что оператор L_0 диссипативен в пространстве $L_2(H; (0, b))$. Через L_H обозначим сужение оператора L на множество $D_H(L)$. Ясно, что $L_0 \subset L_H \subset L$.

Максимально диссипативные расширения $\tilde{L}$ минимального оператора L_0 такие, что $L_0 \subset \tilde{L} \subset L_H$ будем называть гладкими максимально диссипативными.

Т е о р е м а 3. *Каким бы ни было сжатие* K *в* H, *расширение* L_K *минимального оператора* L_0, *порожденное операцией* $\hat{l}[y] = y' + \hat{A}y$ *и краевым условием*

$$y(0) = Ky(b), \tag{15}$$

является гладким максимально диссипативным. Обратно, всякое гладкое максимально диссипативное расширение минимального оператора L_0 *в* $L_2(H; (0, b))$ *порождается операцией* $\tilde{l}[y]$ *и краевым условием* (15).

Доказательство. Пусть L_K — расширение оператора L_0, определяемое условием (15). Так как для любой вектор-функции $y(t) \in D(L)$ $y(b) \in H_{1/2}$, то $Ky(b) = y(0) \in H$. Поэтому $L_0 \subset L_K \subset L_H$. Из формулы (14) следует диссипативность L_K. Если $\exp(\lambda_0 b) > \| K \exp(-Ab) \|$, то при всех $h(t) \in L_2(H; (0, b))$ уравнение $(L_K + \lambda_0 E) y = h$ имеет решение $y(t) \in D(L_K)$. Действительно, вектор-функция

$$y(t) = e^{-(A+\lambda_0 E)t} f + \int_0^t e^{-(A+\lambda_0 E)(t-s)} h(s)\, ds,$$

$$f = (E - K e^{-(A+\lambda_0 E)b})^{-1} K \int_0^b e^{-(A+\lambda_0 E)(b-s)} h(s)\, ds \in H,$$

— решение уравнения, о котором идет речь. Следовательно, оператор L_K максимально диссипативен [1].

Обратно, пусть $\tilde{L}$ — гладкое максимально диссипативное расширение минимального оператора L_0. Нетрудно показать, что для произвольной вектор-функции $y(t) \in D(\tilde{L})$

$$Q(y) = \| y(b) \|^2 - \| y(0) \|^2 \geqslant 0 \tag{16}$$

В пространстве $H \oplus H$ рассмотрим линейное множество M, состоящее из пар $\{Y, Y'\}$, где $Y = [y(0) + y(b)]/2$, $Y' = [y(0) - y(b)]/2$.

Из соотношения (16) и тождества $Q(y) = 4 Re(Y, Y')$ вытекает, что M — диссипативное отношение в H. Учитывая максимальную диссипативность $\tilde{L}$, нетрудно установить, что отношение M максимально диссипативно. В силу предложения M представимо в виде $y(0) = Ky(b)$, $y(t) \in D(\tilde{L})$, $\| K \| \leqslant 1$. Теорема доказана.

4. Для произвольного гладкого максимально диссипативного расширения L_K минимального оператора L_0, любых $\lambda > 0$ и $h(t) \in L_2(H; (0, b))$ вектор—функция $y(t) = (L_K + \lambda E)^{-1} h(t) \in D_H(L) \subset D(L)$. Заменив в выражении (1) оператор A на $A + \lambda E$, а затем подставив представление (7) для $y(t) \in D_H(L)$ в условие (15), получим резольвенту $R_{-\lambda}(L_K)$ оператора L_K в точке $-\lambda$, т. е.

$$R_{-\lambda}(L_K) h(t) = e^{-(A+\lambda E)(b-t)} (E - K e^{-(A+\lambda E)b})^{-1} K \int_0^b e^{-(A+\lambda E)(b-s)} h(s)\, ds + \\ + \int_0^t e^{-(A+\lambda E)(t-s)} h(s)\, ds, \ \lambda > 0. \tag{17}$$

Из представления (17) для резольвенты оператора L_K вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Если в выражении* (1) *оператор* A *таков, что* $(A + \mu E)^{-1}$ *вполне непрерывен при некотором* $\mu > 0$, *то резольвента произвольного гладкого максимально диссипативного расширения* L_K *минимального оператора* L_0 *также вполне непрерывна.*

Имеет место более тонкий факт.

Теорема 5. *Если оператор* $(A + \mu E)^{-1/2}$ *при некотором* $\mu > 0$ *является оператором Гильберта — Шмидта, то резольвента произвольного гладкого максимально диссипативного расширения* L_K *минимального оператора* L_0 — *также оператор Гильберта — Шмидта.*

Доказательство. Резольвента оператора L_K в точке — λ, $\lambda > 0$,— сумма двух интегральных операторов в $L_2(H; (0, b)$ (см. (17)). Докажем, например, что первый интегральный оператор в (17) — оператор Гильберта — Шмидта. В качестве базиса в пространстве $L_2(H; 0, b))$ выберем систему вектор-функций $\{\varphi_i(t) f_k\}_{i,k=1}^{\infty}$, в которой

$\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L_2(0, b)$ и $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ — собственный ортонормированный базис оператора A, отвечающий собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Так как первый интегральный оператор в (17) имеет вид

$$I_1 h(t) = C(t) \int_0^b e^{-(A+\lambda E)(b-s)} h(s)\, ds,$$

где $C(t) = \exp(-(A+\lambda E)(b-t)(E - K\exp(-(A+\lambda E)(b-s))^{-1}K$ — равномерно ограниченная по t оператор-функция, то, учитывая утловие теоремы, получаем

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \| I_1\varphi_i(\cdot) f_k \|_{L_2(H;(0,b))} = \sum_{i,k=1}^{\infty} \int_0^b \left\| C(t) \int_0^b e^{-(A+\lambda E)(b-s)} \varphi_i(s) f_k ds \right\|^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant M \sum_{i,k=1}^{\infty} \int_0^b \left\| \int_0^b e^{-(\lambda_k+\lambda)(b-s)} \varphi_i(s)\, ds f_k \right\|^2 dt =$$

$$= M \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^b \int_0^b e^{-2(\lambda_k+\lambda)(b-s)}\, ds dt = N \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k + \lambda} < \infty,$$

где M и N — положительные числа. Последнее неравенство означает, что оператор I_1 Гильберта—Шмидта. Теорема доказана.

5. Пример. Пусть $H = L_2(-\infty, \infty)$. Если оператор A равен замыканию в H оператора, заданного дифференциальным выражением $-d^2/dx^2$, определенного первоначально на множестве $C_0^{\infty}(-\infty, \infty)$, то все гладкие максимально диссипативные расширения минимального оператора, порожденного выражением $l[y] = \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ в пространстве $L_2((0, b) \times (-\infty, \infty))$, в силу теоремы 3, описываются граничными условиями $Ky(b, x) = y(0, x)$, где K — сжатие в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

При других ограничениях на оператор A в выражении (1) задачи с граничным условием типа (15), в котором $K = \mu E$, $\mu \in C$, изучались в [2].

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1967.— 464 с.
2. *Дезин А. А.* Общие вопросы граничных задач.— М. : Наука, 1980.— 208 с.
3. *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи.— М. : Мир, 1971.— 371 с.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
5. *Горбачук М. Л.* Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом.— Функ. анализ, 1971, 5, вып. 1, с. 10—21.
6. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1977, 102, № 1, с. 124—150.
7. *Левчук В. В.* Слабые решения дифференциально-операторного уравнения первого порядка.— В кн.: Школа по теории операторов в функциональных пространствах. Минск. Изд-во БГУ, 1982, с. 104.
8. *Горбачук М. Л., Кочубей А. Н., Рыбак М. А.* Диссипативные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций.— Докл. АН СССР, 1972, 205, № 5, с. 1029—1033.

Киевский
государственный университет

Поступила в редакцию
10.12.82