УДК 518.6

Г. А. Легейда

Об одной задаче конвективного теплообмена в кусочно-однородной среде

Пусть Ω — ограниченная осесимметричная область в R^3 с границей S, Ω_1 — строго внутренняя ее осесимметричная подобласть с границей Γ (оси симметрии Ω и Ω_1 совпадают). Процесс сопряженного конвективно-кондуктивного теплообмена в кусочно-однородной ограниченной области $\Omega \in R^3$ в приближении Обербека—Буссинеска [1, 2] описывается системой уравнений Навье—Стокса в области Ω_1, $\Omega_1 \subset \Omega$, заполненной жидкостью, и уравнением теплообмена с разрывными коэффициентами в области $\Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$:

$$\partial D(\psi)/\partial t - r\partial(\psi, r^{-2}D(\psi)/\partial(r, z) - D^2(\psi) + rG\partial\Theta_1/\partial r = 0 \ \ (r, z) \in \Omega_1,$$

$$\partial\Theta/\partial t - r^{-1}\partial(\psi, \Theta)/\partial(r, z) - P^{-1}\nabla^2\Theta = 0, \ (r, z) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \tag{1}$$

с условиями сопряжения на Γ (области Ω_1) разрыва коэффициентов P, $P = P_1 = \text{const} > 0$, $(r, z) \in \Omega_1$, $P = P_2 = \text{const} > 0$, $(r, z) \in \Omega_2$, $P_1 \neq P_2$, краевыми условиями на $\Gamma^T = \Gamma \times [0, T]$, $S^T = S \times [0, T]$ и оси симметрии $\Gamma_1^T = \Gamma_1 \times [0, T]$

$$(\Theta_1 - \Theta_2)|_{\Gamma^T} = 0, \ \ (P_1\partial\Theta_2/\partial n - P_2\partial\Theta_1/\partial n)|_{\Gamma^T} = 0,$$

$$\psi|_{\Gamma^T \cup \Gamma_1^T} = \partial\psi/\partial n|_{\Gamma^T \cup \Gamma_1^T} = 0, \quad \Theta_2|_{S^T} = \Theta(z), \tag{2}$$

начальными условиями

$$\Theta_1(r, z, 0) = \psi(r, z, 0) = 0, \quad \Theta_2(r, z, 0) = \Theta_{20}(z). \tag{3}$$

Здесь использованы обозначения:

$$\partial(f, g)/\partial(r, z) = \partial f/\partial r \cdot \partial g/\partial z - \partial f/\partial z \cdot \partial g/\partial r,$$

$$D \equiv \partial^2/\partial r^2 - r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2, \quad \nabla^2 \equiv \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r + \partial^2/\partial z^2,$$

G и P — числа Грасгофа и Прандтля, причем число G, характеризующее интенсивность конвективного теплообмена в полости, лежит в пределах от 10^7 до 10^{15}, а P — в пределах от 5 до 10. Функция тока ψ вводится соотношениями $V_r = r^{-1}d\psi/dz$, $v_z = -r^{-1}\,d\psi/dr$, $\vec{V} = (V_r, 0, V_z)$ — вектор скорости в цилиндрической системе координат, Θ — температура. Все переменные в (1)—(3) нормированы.

Для понижения порядка первого уравнения в (1) введем завихренность $\omega = r^{-1}D(\psi)$, после чего начально-краевую задачу (1)—(3) представим в виде

$$D(\psi) = r\omega, \ \ \partial\omega/\partial t - \partial(\psi, r^{-1}\omega)/\partial(r, z) - r^{-1}D(r\omega) + G\partial\Theta/\partial r = 0, \ \ (r, z) \in \Omega_1,$$

$$\partial\Theta/\partial t - \partial(\psi, \Theta)/\partial(r, z) - P^{-1}\nabla^2\Theta = 0, \ (r, z) \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \tag{4}$$

с теми же условиями сопряжения на Γ и краевыми условиями

$$(\Theta_1 - \Theta_2)|_{\Gamma^T} = 0, \ \ (P_2\partial\Theta_1/\partial n - P_1\partial\Theta_2/\partial n)|_{\Gamma^T} = 0, \ \ \Theta_2|_{S^T} = \Theta(z) \tag{5}$$

$$\psi|_{\Gamma^T \cup \Gamma_1^T} = 0, \ \ \omega = \begin{cases} r^{-1}(\partial^2\psi/\partial r^2 - r^{-1}\partial\psi/\partial r + \partial^2\psi/\partial z^2), & \partial\psi/\partial r = \partial\psi/\partial z = 0, \\ 0, \ (r, z) \in \Gamma_1^T, & (r, z) \in \Gamma_T, \end{cases}$$

начальными условиями

$$\psi(r, z, 0) = \omega(r, z, 0) = \Theta_1(r, z, 0) = 0, \quad \Theta_2(r, z, 0) = \Theta_{20}(z). \tag{6}$$

Условие на оси Γ_1^T для ω получено из условий симметрии $V_r = 0$ и $\partial V_z/\partial r = 0$.

Для численного решения задачи (4)—(6) применен метод Галеркина с конечноэлементным эрмитовым базисом на триангуляции $\mathcal{T}_n$ области $\Omega_1 \cup \Omega_2$ в сочетании с методом конечных разностей (по времени t) [2].

Приближенное решение (ψ^h, ω^h) и Θ^h задачи (4) — (6) ищем в области Ω_1^h и $\Omega_1^h \cup \Omega_2^h$ соответственно в виде

$$\psi^h(\xi, t) = N(\xi)\overline{\psi}(t), \quad \omega^h(\xi, t) = N(\xi)\overline{\omega}(t), \quad \Theta^h(\xi, t) = N(\xi)\overline{\Theta}(t), \tag{7}$$

где $\psi^h(\xi, t)$, $\omega^h(\xi, t)$, $\Theta^h(\xi, t)$ — приближенные по Галеркину решения, $\overline{\psi}(t) = \{\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_m\}$, $\overline{\omega}(t) = \{\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_m\}$, $\overline{\Theta}(t) = \{\overline{\Theta}_1, \ldots, \overline{\Theta}_n\}$ — коэффициенты разложения по базису метода конечных элементов на $\mathcal{T}_h$, где $m = m(\mathcal{T}_h^1)$, $n = n(\mathcal{T}_h)$, $\mathcal{T}_h^1 \subset \mathcal{T}_h$, $m < n$, $N(\xi)$ — базисные функции в барицентрической системе координат, которые на элементе $e \in \mathcal{T}_h$ $\left(\Omega^h = \bigcup_{j=1}^{M} e_j\right)$ имеют вид

$$N^e(\xi) = \left\{\begin{array}{l}
\xi_1 + \xi_2\xi_1^2 - \xi_1\xi_2^2 + \xi_3\xi_1^2 - \xi_1\xi_3^2 \\
0{,}5\,[r_{21}\xi_1\xi_2 + r_{31}\xi_3\xi_1 + r_{12}(\xi_1\xi_2^2 - \xi_2\xi_1^2) + r_{31}(\xi_3\xi_1^2 - \xi_1\xi_3^2)] \\
0{,}5\,[z_{21}\xi_1\xi_2 + z_{31}\xi_3\xi_1 + z_{12}(\xi_1\xi_2^2 - \xi_2\xi_1^2) + z_{31}(\xi_3\xi_1^2 - \xi_1\xi_3^2)] \\
\xi_2 + \xi_1\xi_2^2 - \xi_2\xi_1^2 - \xi_2\xi_3^2 + \xi_3\xi_2^2 \\
0{,}5\,[r_{12}\xi_1\xi_2 + r_{32}\xi_2\xi_3 + r_{12}(\xi_1\xi_2^2 - \xi_2\xi_1^2) + r_{23}(\xi_2\xi_3^2 - \xi_3\xi_2^2)] \\
0{,}5\,[z_{12}\xi_1\xi_2 + z_{32}\xi_2\xi_3 + z_{12}(\xi_1\xi_2^2 - \xi_2\xi_1^2) + z_{23}(\xi_2\xi_3^2 - \xi_3\xi_2^2)] \\
\xi_3 + \xi_2\xi_3^2 - \xi_3\xi_2^2 - \xi_3\xi_1^2 + \xi_1\xi_3^2 \\
0{,}5\,[r_{23}\xi_2\xi_3 + r_{13}\xi_3\xi_1 + r_{23}(\xi_2\xi_3^2 - \xi_3\xi_2^2) + r_{31}(\xi_3\xi_1^2 - \xi_1\xi_3^2)] \\
0{,}5\,[z_{23}\xi_2\xi_3 + z_{13}\xi_3\xi_1 + z_{23}(\xi_2\xi_3^2 - \xi_3\xi_2^2) + z_{31}(\xi_3\xi_1^2 - \xi_1\xi_3^2)]
\end{array}\right\}, \tag{8}$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — барицентрические координаты, $r_{21} = r_2 - r_1$, $z_{23} = z_2 - z_3$, а остальные элементы получены циклической перестановкой индексов 1, 2, 3; (r_i, z_i) — координаты узловых точек треугольника, $i = 1, 2, 3$; $h = \max\limits_{\forall e \in \mathcal{T}_h} h_i$ (h_i — длина i-й стороны треугольника).

Следует отметить, что функции ψ^h, ω^h, Θ^h обладают следующими свойствами: сами они непрерывны, а их частные производные терпят разрывы при переходе через границы элементов триангуляции $\mathcal{T}_h$.

Применение процедуры Галеркина к задаче (4)—(6) с использованием формулы Грина и учетом граничных условий приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M_\Theta\, d\overline{\Theta}/dt + (D_{\Theta,\psi} + K_\Theta)\,\overline{\Theta} = B_\Theta, \tag{9}$$

$$M_\omega\, d\overline{\omega}/dt + (D_{\omega,\psi} + K_\omega)\,\overline{\omega} = B_{\omega,\Theta}, \tag{10}$$

$$K_\psi\,\overline{\psi} = B_{\psi,\omega}, \tag{11}$$

где M_Θ, M_ω — матрицы массы, K_Θ, K_ω, K_ψ — матрицы жесткости линейных членов, $D_{\Theta,\psi}$, $D_{\omega,\psi}$ — матрицы жесткости нелинейных членов, B_Θ, $B_{\omega,\Theta}$, $B_{\psi,\omega}$ — векторы нагрузок. Интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9) — (11) по конечно-разностной схеме

$$M/\Delta t\,(u^{s+1} - u^s) + K\,[\gamma u^{s+1} + (1-\gamma)\,u^s] = 0{,}5\,(B_{s+1} + B_s) \tag{12}$$

($\gamma = 0{,}5$ — соответствует схеме Кранка—Никольсона, $\gamma = 1$ — полноствю неявной схеме) с шагом аппроксимации по времени

$$\Delta t \leqslant \inf\,[(h/G)^{1/2},\ h/V_{\max},\ h^2/8] \tag{13}$$

($V_{\max}$ — максимальное значение скорости конвекции жидкости) приводит к системе алгебраических уравнений

$$M_{\Theta^{s+1}}/\Delta t\,(\overline{\Theta}^{s+1}-\overline{\Theta}^{s})+(D_{\Theta^{s+1},\psi^s}+K_{\Theta^{s+1}})\,[\gamma\overline{\Theta}^{s+1}+(1-\gamma)\,\overline{\Theta}^{s}]=$$
$$=0{,}5\,(B_{\Theta^{s+1}}+B_{\Theta^s}), \tag{14}$$

$$M_{\omega^{s+1}}/\Delta t\cdot(\overline{\omega}^{s+1}-\overline{\omega}^{s})+(D_{\omega^{s+1},\psi^s}+K_{\omega^{s+1}})\,[\gamma\overline{\omega}^{s+1}+(1-\gamma)\,\overline{\omega}^{s}]=$$
$$=0{,}5\,(B_{\omega^{s+1},\Theta^s}+B_{\omega^s,\Theta^{s-1}}), \tag{15}$$

$$K_{\psi^{s+1}}\overline{\psi}^{s+1}=B_{\psi^{s+1},\omega^s}, \tag{16}$$

где индексы внизу при матрицах M, D, K, B указывают, на каком временном слое вычисляются соответствующие значения. Следует обратить внимание на D_{Θ^{s+1},ψ^s}, D_{ω^{s+1},ψ^s} и $B_{\omega^{s+1},\Theta^s}$, B_{ψ^{s+1},ω^s}. Первые две матрицы используются для определения значений $\overline{\Theta}^{s+1}$ и $\overline{\omega}^{s+1}$ со значениями $\overline{\psi}^s$, вычисленными на предыдущем временном слое; $B_{\omega^{s+1},\Theta^s}$ и B_{ψ^{s+1},ω^s} используются для определения $\overline{\omega}^{s+1}$ и $\overline{\psi}^{s+1}$ со значениями $\overline{\Theta}^s$ и $\overline{\omega}^s$, вычисленными также на предыдущем временном слое.

Для функции тока ψ строится итеррационный процесс на каждом временном слое с уточнением значений ω на границе

$$\|\psi_{n+1}-\psi_n\|<\varepsilon, \tag{17}$$

($\varepsilon>0$, $n=1,2,\ldots$, — номер итеррации).

Начально-краевая задача (4)—(6) по предложенному алгоритму просчитана на ЭВМ. При доказательстве сходимости алгоритма использованы работы [3, 4].

1. *Легейда Г. А., Галицын А. С.* Алгоритм численного решения нестационарной сопряженной задачи конвективно-кондуктивного теплообмена в неизотермической полости.— В кн.: Прикладные методы исследования физико-механических процессов.— Киев: Изд-во Ин-та матем. АН УССР, 1979, с. 7—24.
2. *Галицын А. С., Легейда Г. А.* К численному исследованию динамики тепловой конвекции в замкнутом объеме вязкой жидкости методом конечных элементов.— В кн.: Математические вопросы механики сплошных сред и теплофизики.— Киев : 1982, с. 14—22.
3. *Douglas J., Doupont T.* Galerkin method for parobolic equations.— SIAM J. Numer. Anal., 1970, 7, N 4, p. 575—626.
4. *Shinbrot M., Kotorynski W. P.* The Initial Value Problem for a Viscous Heat—Conducting Fluid.— J. Math. Anal. Appl., 1974, 45, N 1, p. 1—22.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
25.11.82