УДК 517.518.2+517.982.27

В. А. Михайлец, А. А. Мурач (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

РАСШИРЕННАЯ СОБОЛЕВСКАЯ ШКАЛА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ*

We obtain a constructive description of all Hilbert function spaces that are interpolation spaces with respect to a couple of Sobolev spaces $[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]$ of some integer orders s_0 and s_1 and that form an extended Sobolev scale. We find equivalent definitions of these spaces with the use of uniformly elliptic pseudodifferential operators positive definite in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Possible applications of the introduced scale of spaces are indicated.

Отримано конструктивний опис усіх гільбертових функціональних просторів, які є інтерполяційними для пари соболєвських просторів $[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]$ деяких цілих порядків s_0 і s_1 та утворюють розширену соболєвську шкалу. Знайдено еквівалентні означення таких просторів за допомогою додатно визначених в $L_2(\mathbb{R}^n)$ рівномірно еліптичних псевдодиференціальних операторів. Зазначено можливі застосування введеної шкали просторів.

1. Введение. В теории уравнений с частными производными центральное место занимают вопросы существования, единственности и регулярности решений. При этом свойства регулярности решений выражаются в терминах их принадлежности к одному из функциональных пространств эталонной шкалы. Чем тоньше градуирована эта шкала, тем содержательнее такие результаты. Известны фундаментальные применения пространств Соболева к изучению дифференциальных уравнений, в частности, эллиптического типа. Однако [1, 2] для ряда важных задач анализа шкала $\{H^{(s)}\colon s \in \mathbb{R}\}$ оказалась недостаточно тонкой.

Около полувека назад появилась [3 – 5] теория более общих, чем соболевские, пространств Хермандера. Они оказались полезными во многих вопросах. Однако их применения к эллиптическим операторам до недавнего времени имели частный характер. Это связано с отсутствием аналитического аппарата, пригодного для работы с такими пространствами. В случае пространств Соболева таковым является классическая теория интерполяции. Так, произвольное пространство $H^{(s)}$ дробного порядка можно получить путем интерполяции некоторой пары пространств целых порядков. Это существенно облегчает как введение самих пространств (например, на многообразиях), так и разработку теории эллиптических уравнений, поскольку при интерполяции сохраняются свойства ограниченности и нетеровости линейных операторов.

В связи с этим представляется полезным выделить среди гильбертовых пространств Хермандера те, которые получаются посредством произвольной интерполяции пар гильбертовых пространств Соболева. Им соответствуют необязательно степенные функциональные параметры интерполяции. В работах [6, 7] авторами был введен и исследован класс такого рода изотропных пространств Хермандера

$$H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n) := B_{2,\mu}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{для} \quad \mu(\xi) := (1+|\xi|^2)^{s/2}\varphi\big((1+|\xi|^2)^{1/2}\big), \qquad (*)$$

которые образуют уточненную соболевскую шкалу. Здесь числовой параметр s принадлежит $\mathbb{R}$, а функциональный параметр φ медленно меняется на бесконечности по Карамата. Например, в качестве φ допускаются логарифмическая функция, ее итерации, любые их степени, а также произведения таких функций. Класс пространств $(*)$ содержит соболевскую шкалу

*Поддержана грантом № 01/01.12 НАН Украины (в рамках совместного украинско-российского проекта НАН Украины и Российского фонда фундаментальных исследований).

$\{H^{(s)}\} = \{H^{s,1}\}$, привязан к ней числовым параметром s, но градуирован тоньше, чем соболевская шкала. Числовой параметр s определяет основную (степенную) гладкость, а функциональный параметр φ задает дополнительную (субстепенную) гладкость. Последняя может как расширить, так и сузить пространство $\{H^{(s)}\}$. В работах [6 – 11] удалось перенести в полном объеме классическую „соболевскую” теорию эллиптических краевых задач на случай уточненной соболевской шкалы $(*)$.

Вместе с тем оставался открытым вопрос об описании (с точностью до эквивалентности норм) класса *всех* гильбертовых функциональных пространств, которые могут быть получены в результате интерполяции пространств соболевской шкалы. Конструктивный ответ на него дается в настоящей работе. Он формулируется непосредственно в терминах условий на радиальную весовую функцию, которая задает изотропное пространство Хермандера. Она должна принадлежать введенному В. Г. Авакумовичем классу RO-меняющихся на бесконечности функций.

2. Расширенная соболевская шкала. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, а измеримая по Лебегу функция $\mu\colon \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ является весовой, т. е. существуют числа $c \geq 1$ и $l > 0$ такие, что

$$\frac{\mu(\xi)}{\mu(\eta)} \leq c\,(1+|\xi-\eta|)^l \quad \text{для любых} \quad \xi,\eta \in \mathbb{R}^n.$$

По определению [3] (п. 2.2) пространство Хермандера $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех распределений медленного роста $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, что их преобразование Фурье $\widehat{u}$ является локально суммируемой по Лебегу в $\mathbb{R}^n$ функцией, удовлетворяющей включению $\mu\,\widehat{u} \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Норма в комплексном линейном пространстве $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ определена по формуле

$$\|u\|_{B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)} := \|\mu\,\widehat{u}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1}$$

При $p = 2$ она гильбертова.

Пространство $B_{p,\mu}(\mathbb{R}^n)$ полно относительно нормы (1) и непрерывно вложено в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Если $1 \leq p < \infty$, то это пространство сепарабельно, и множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в нем (см. [3] (п. 2.2) или [4] (п. 10.1)).

Отметим, что в гильбертовом случае (когда $p = 2$) пространства Хермандера совпадают с пространствами, введенными и изученными Л. Р. Волевичем и Б. П. Панеяхом [5] (см. также монографию [12] (п. 1.4)).

Среди пространств Хермандера нам нужны гильбертовы изотропные пространства $B_{2,\mu}(\mathbb{R}^n)$, которым соответствуют радиальные весовые функции $\mu(\xi) = \varphi(\langle\xi\rangle)$ аргумента $\xi \in \mathbb{R}^n$. Здесь $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$, а класс функциональных параметров φ определен следующим образом.

Пусть RO — класс всех измеримых по Борелю функций $\varphi\colon [1,\infty) \to (0,\infty)$, для которых существуют числа $a > 1$ и $c \geq 1$ такие, что

$$c^{-1} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c \qquad \text{для любых} \quad t \geq 1, \quad \lambda \in [1,a] \tag{2}$$

(вообще, a и c зависят от φ). Эти функции называют RO-меняющимися (или OR-меняющимися) на бесконечности. Класс RO-меняющихся функций введен В. Г. Авакумовичем и достаточно полно изучен (см., например, монографии [13, 14]). Отметим некоторые важные свойства этого класса.

Предложение 1. (i) *Любая функция* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *ограничена и отделена от нуля на каждом отрезке* $[1, b]$, $1 < b < \infty$.

(ii) *Верно следующее описание класса* RO:

$$\varphi \in \mathrm{RO} \;\Leftrightarrow\; \varphi(t) = \exp\left(\beta(t) + \int_1^t \frac{\alpha(\tau)}{\tau}\, d\tau\right), \qquad t \geq 1,$$

где вещественные функции α *и* β *и измеримы по Борелю и ограничены на полуоси* $[1, \infty)$.

(iii) *Для произвольной функции* $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$ *условие* (2) *равносильно следующему: существуют числа* $s_0,\, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 \leq s_1$, *и* $c \geq 1$ *такие, что*

$$t^{-s_0}\varphi(t) \leq c\,\tau^{-s_0}\varphi(\tau), \;\; \tau^{-s_1}\varphi(\tau) \leq c\,t^{-s_1}\varphi(t) \quad \textit{для всех} \quad t \geq 1,\; \tau \geq t. \tag{3}$$

Условие (3) показывает, что функция $t^{-s_0}\varphi(t)$ эквивалентна некоторой возрастающей функции, а функция $t^{-s_1}\varphi(t)$ — некоторой убывающей функции на полуоси $[1, \infty)$. При этом эквивалентность понимается в слабом смысле, а возрастание и убывание — в нестрогом смысле. Напомним, что положительные функции ψ_1 и ψ_2 называются эквивалентными (в слабом смысле) на некотором множестве Q, если их отношения ψ_1/ψ_2 и ψ_2/ψ_1 ограничены на Q. В этом случае пишем $\psi_1 \asymp \psi_2$ на Q

Положив в условии (3) $\lambda := \tau/t$, перепишем его в эквивалентном виде

$$c^{-1}\lambda^{s_0} \leq \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \leq c\lambda^{s_1} \quad \text{для всех} \quad t \geq 1, \quad \lambda \geq 1. \tag{4}$$

Для произвольной функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ обозначим

$$\sigma_0(\varphi) := \sup\{s_0 \in \mathbb{R}\colon \text{ выполняется левое неравенство в (4)}\},$$

$$\sigma_1(\varphi) := \inf\{s_1 \in \mathbb{R}\colon \text{ выполняется правое неравенство в (4)}\}.$$

Очевидно, что $-\infty < \sigma_0(\varphi) \leq \sigma_1(\varphi) < \infty$. Числа $\sigma_0(\varphi)$ и $\sigma_1(\varphi)$ равны соответственно нижнему и верхнему индексам Матушевской функции φ [14, с. 72].

Пусть функция φ принадлежит классу RO. По определению $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ — гильбертово пространство $B_{2,\mu}(\mathbb{R}^n)$, где $\mu(\xi) := \varphi(\langle\xi\rangle)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. В пространстве $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ определено скалярное произведение по формуле

$$(u_1, u_2)_{\varphi} := \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\, \widehat{u_1}(\xi)\, \overline{\widehat{u_2}(\xi)}\, d\xi.$$

Оно порождает норму $\|u\|_{\varphi} := (u, u)_{\varphi}^{1/2}$, введенную в (1).

В случае степенной функции $\varphi(t) = t^s$, где $s \in \mathbb{R}$, пространство $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ совпадает с гильбертовым пространством Соболева $H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ порядка s.

Класс гильбертовых функциональных пространств

$$\{H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)\colon \varphi \in \mathrm{RO}\} \tag{5}$$

мы называем расширенной соболевской шкалой (на $\mathbb{R}^n$).

Отметим следующие важные свойства этой шкалы, вытекающие из соответствующих свойств пространств Хермандера.

Предложение 2. *Пусть* $\varphi, \varphi_1 \in \mathrm{RO}$. *Тогда*: (i) *Функция* $\varphi(t)/\varphi_1(t)$ *ограничена в окрестности бесконечности тогда и только тогда, когда* $H^{\varphi_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$. *Это вложение непрерывное и плотное.*

(ii) *Для любых вещественных чисел* $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ *и* $s_1 > \sigma_1(\varphi)$ *справедливы непрерывные и плотные вложения* $H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n)$.

(iii) *Пространства* $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *и* $H^{1/\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *взаимно двойственные относительно расширения по непрерывности скалярного произведения в пространстве*[1] $L_2(\mathbb{R}^n)$.

(iv) *Для каждого фиксированного целого числа* $k \geq 0$ *неравенство*

$$\int\limits_1^{\infty} t^{2k+n-1} \varphi^{-2}(t)\, dt < \infty$$

равносильно вложению $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^k_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$. *Это вложение непрерывно* [2].

3. Характеризация шкалы. Напомним базисное для нас определение. Пусть $[X_0, X_1]$ — пара комплексных гильбертовых пространств X_0 и X_1 таких, что X_1 непрерывно вложено в X_0. Комплексное гильбертово пространство H называется интерполяционным для пары $[X_0, X_1]$, если:

(i) справедливы непрерывные вложения $X_1 \hookrightarrow H \hookrightarrow X_0$;

(ii) произвольный линейный оператор $T\colon X_0 \to X_0$, ограниченный на каждом из пространств X_0 и X_1, является также ограниченным оператором на пространстве H.

Из условия (ii) следует неравенство для норм операторов

$$\|T\|_{H \to H} \leq c \max\bigl\{\|T\|_{X_0 \to X_0},\ \|T\|_{X_1 \to X_1}\bigr\},$$

где число $c > 0$ не зависит от оператора T [15, с. 28].

Сформулируем основной результат статьи. Рассмотрим дискретную соболевскую шкалу гильбертовых пространств

$$\{H^{(s)}(\mathbb{R}^n)\colon\ s \in \mathbb{Z}\}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Расширенная соболевская шкала* (5) *совпадает с классом всех гильбертовых пространств, интерполяционных относительно соболевской шкалы* (6). *А именно, гильбертово пространство* H *является интерполяционным для некоторой пары соболевских пространств* $[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]$, *где* $s_0,\ s_1 \in \mathbb{Z}$ *и* $s_0 < s_1$, *тогда и только тогда, когда* $H = H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *с точностью до эквивалентности норм для некоторого* $\varphi \in \mathrm{RO}$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся несколько фактов из теории интерполяции гильбертовых пространств. Для наших целей достаточно ограничиться сепарабельными комплексными пространствами.

Упорядоченную пару $[X_0, X_1]$ комплексных гильбертовых пространств X_0 и X_1 назовем допустимой, если эти пространства сепарабельны и справедливо непрерывное и плотное вложение $X_1 \hookrightarrow X_0$.

[1] Отметим, что $\varphi \in \mathrm{RO} \Leftrightarrow 1/\varphi \in \mathrm{RO}$.

[2] Здесь $C^k_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^n)$ — банахово пространство всех функций $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, имеющих непрерывные и ограниченные в $\mathbb{R}^n$ производные до порядка k включительно.

Напомним определение интерполяции с функциональным параметром гильбертовых пространств. Оно является естественным обобщением классического интерполяционного метода Ж.-Л. Лионса и С. Г. Крейна на случай, когда вместо числового параметра интерполяции используется достаточно общая функция. Это обобщение появилось в статье К. Фояша, Ж.-Л. Лионса [16, с. 278] и затем было исследовано рядом авторов.

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех измеримых по Борелю функций $\psi\colon (0,\infty)\to(0,\infty)$, которые ограничены на каждом отрезке $[a,b]$, $0<a<b<\infty$, и отделены от нуля на каждом множестве $[r,\infty)$, $r>0$.

Пусть произвольно заданы функция $\psi\in\mathcal{B}$ и допустимая пара гильбертовых пространств $X=[X_0,X_1]$. Для пары X существует изометрический изоморфизм $J\colon X_1\leftrightarrow X_0$ такой, что J является самосопряженным положительно определенным оператором в пространстве X_0 с областью определения X_1. Оператор J называется порождающим для пары X. Этот оператор определяется парой X однозначно.

В пространстве X_0 определен как борелевская функция от J оператор $\psi(J)$. Обозначим через $[X_0,X_1]_\psi$ или, короче, X_ψ область определения оператора $\psi(J)$, наделенную скалярным произведением

$$(u_1,u_2)_{X_\psi}:=(\psi(J)u_1,\psi(J)u_2)_{X_0}$$

и соответствующей нормой $\|u\|_{X_\psi}=(u,u)^{1/2}_{X_\psi}$. Пространство X_ψ гильбертово и сепарабельно.

Функция $\psi\in\mathcal{B}$ называется интерполяционным параметром, если для произвольных допустимых пар $X=[X_0,X_1]$ и $Y=[Y_0,Y_1]$ гильбертовых пространств и для любого линейного отображения T, заданного на X_0, выполняется следующее. Если при каждом $j\in\{0,\,1\}$ сужение отображения T на пространство X_j является ограниченным оператором $T\colon X_j\to Y_j$, то и сужение отображения T на пространство X_ψ является ограниченным оператором $T\colon X_\psi\to Y_\psi$.

Если функция ψ — интерполяционный параметр, то будем говорить, что пространство X_ψ получено интерполяцией пары X с параметром ψ. В этом случае выполняются непрерывные и плотные вложения $X_1\hookrightarrow X_\psi\hookrightarrow X_0$, а пространство X_ψ является интерполяционным для пары X.

Классический результат Ж.-Л. Лионса и С. Г. Крейна состоит в том, что степенная функция $\psi(t):=t^\theta$, где $0<\theta<1$, является интерполяционным параметром. При этом показатель θ является числовым параметром интерполяции.

Приведем описание всех интерполяционных параметров (в смысле данного выше определения).

Пусть заданы функция $\psi\colon(0,\infty)\to(0,\infty)$ и число $r\geq 0$. Функция ψ называется псевдовогнутой на полупрямой (r,∞), если существует вогнутая функция $\psi_1\colon(r,\infty)\to(0,\infty)$ такая, что $\psi\asymp\psi_1$ на (r,∞). Функция ψ называется псевдовогнутой в окрестности бесконечности, если она псевдовогнута на некоторой полупрямой (r,∞), где r — достаточно большое число.

Предложение 3. *Функция $\psi\in\mathcal{B}$ является интерполяционным параметром тогда и только тогда, когда она псевдовогнута в окрестности бесконечности.*

Этот факт вытекает из описания класса всех интерполяционных функций для весовых пространств типа $L_p(\mathbb{R}^n)$, полученного Ж. Петре [17] (см. также [15, с. 118]). Доказательство предложения 3 приведено, например, в [1] (п. 1.1.9).

В. И. Овчинникову [18, с. 511] принадлежит описание (с точностью до эквивалентности норм) *всех* гильбертовых пространств, интерполяционных для произвольной фиксированной пары гильбертовых пространств. Применительно к рассмотренному нами случаю его результат можно сформулировать следующим образом.

Пусть $X = [X_0, X_1]$ — произвольная допустимая пара гильбертовых пространств.

Предложение 4. *Предположим, что гильбертово пространство H является интерполяционным для пары X. Тогда существует псевдовогнутая в окрестности бесконечности функция $\psi \in \mathcal{B}$ такая, что пространства H и X_ψ равны, а нормы в них эквивалентны.*

Таким образом, класс всех гильбертовых пространств, интерполяционных для пары X, совпадает с классом пространств X_ψ, где $\psi \in \mathcal{B}$ — произвольная псевдовогнутая функция в окрестности бесконечности.

В этой связи нам будет полезно следующее свойство псевдовогнутых функций [1, с. 41] (лемма 1.2).

Предложение 5. *Пусть заданы функция $\psi \in \mathcal{B}$ и число $r \geq 0$. Функция ψ псевдовогнута на полупрямой (r, ∞) тогда и только тогда, когда существует число $c > 0$ такое, что*

$$\frac{\psi(\tau_1)}{\psi(\tau_2)} \leq c\,\max\Bigl\{1,\,\frac{\tau_1}{\tau_2}\Bigr\} \qquad \text{для любых} \quad \tau_1, \tau_2 > r. \tag{7}$$

Отметим, что в случае $r = 0$ этот факт установлен Ж. Петре [17], при этом условие $\psi \in \mathcal{B}$ излишне.

Доказательству теоремы 1 предпошлем следующую интерполяционную лемму.

Лемма 1. *Пусть $s_0,\, s_1 \in \mathbb{R}$, $s_0 < s_1$, а функция $\psi \in \mathcal{B}$ является интерполяционным параметром. Положим*

$$\varphi(t) := t^{s_0}\,\psi(t^{s_1 - s_0}) \quad \text{при} \quad t \geq 1. \tag{8}$$

Тогда функция φ принадлежит классу RO *и выполняется следующее равенство пространств и норм в них*:

$$[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]_\psi = H^\varphi(\mathbb{R}^n). \tag{9}$$

Доказательство. Сначала покажем, что φ принадлежит классу RO. В силу определения, функция φ измерима по Борелю на полупрямой $[1, \infty)$. Покажем, что она удовлетворяет условию (2). Поскольку ψ — интерполяционный параметр, в силу предложения 3 функция ψ псевдовогнута на полупрямой (r, ∞) для некоторого $r \gg 1$. Поэтому на основании предложения 5 имеем следующее:

$$\frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} = \lambda^{s_0}\,\frac{\psi((\lambda t)^{s_1 - s_0})}{\psi(t^{s_1 - s_0})} \leq \lambda^{s_0}\,c_1\,\max\{1, \lambda^{s_1 - s_0}\} = c_1\,\lambda^{s_1},$$

$$\frac{\varphi(t)}{\varphi(\lambda t)} = \lambda^{-s_0}\,\frac{\psi(t^{s_1 - s_0})}{\psi((\lambda t)^{s_1 - s_0})} \leq \lambda^{-s_0}\,c_1\,\max\{1, \lambda^{s_0 - s_1}\} = c_1\,\lambda^{-s_0}$$

для произвольных $t > r_1 := r^{1/(s_1 - s_0)}$ и $\lambda \geq 1$. Здесь число $c_1 > 0$ не зависит от t и λ. Отсюда получаем неравенство

$$c_2^{-1} \le \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \le c_2 \qquad \text{для любых} \quad t > r_1, \quad \lambda \in [1,2]. \tag{10}$$

Кроме того, поскольку $\psi \in \mathcal{B}$, то $\varphi \asymp 1$ на отрезке $[1, 2\,r_1]$, следовательно,

$$c_3^{-1} \le \frac{\varphi(\lambda t)}{\varphi(t)} \le c_3 \qquad \text{для любых} \quad t \in [1, r_1], \quad \lambda \in [1,2]. \tag{11}$$

В формулах (10) и (11) числа c_2, $c_3 \ge 1$ не зависят от t и λ. На основании этих формул заключаем, что функция φ удовлетворяет условию (2), где $a = 2$ и $c = \max\{c_2, c_3\}$, т. е. φ принадлежит классу RO.

Теперь докажем равенство (9). Пара соболевских пространств $[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]$ допустимая. Псевдодифференциальный оператор с символом $\langle\xi\rangle^{s_1-s_0}$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$, является порождающим оператором J для этой пары. С помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}\colon H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow L_2(\mathbb{R}^n, \langle\xi\rangle^{2s_0}\,d\xi)$ оператор J приводится к оператору умножения на функцию $\langle\xi\rangle^{s_1-s_0}$. Следовательно, оператор $\psi(J)$ приводится к оператору умножения на функцию $\psi(\langle\xi\rangle^{s_1-s_0}) =$ $= \langle\xi\rangle^{-s_0}\varphi(\langle\xi\rangle)$. Поэтому для любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ можно записать

$$\|u\|^2_{[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]_\psi} = \|\psi(J)u\|^2_{H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |(\widehat{\psi(J)u})(\xi)|^2\, \langle\xi\rangle^{2s_0}\,d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\,\psi(\langle\xi\rangle^{s_1-s_0})\,\widehat{u}(\xi)|^2\, \langle\xi\rangle^{2s_0}\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi^2(\langle\xi\rangle)\,|\widehat{u}(\xi)|^2\,d\xi = \|u\|^2_\varphi \quad \text{для всех} \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда следует равенство пространств (9) и норм в них, так как множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в каждом из этих пространств. (Заметим, что множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в интерполяционном пространстве $[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]_\psi$, поскольку это множество плотно в соболевском пространстве $H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)$, которое в свою очередь непрерывно и плотно вложено в указанное интерполяционное пространство.)

Лемма 1 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** *Необходимость.* Предположим, что гильбертово пространство H является интерполяционным для некоторой пары соболевских пространств $[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]$, где s_0, $s_1 \in \mathbb{Z}$ и $s_0 < s_1$. Тогда в силу предложения 4 существует псевдовогнутая в окрестности бесконечности функция $\psi \in \mathcal{B}$ такая, что

$$H = [H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]_\psi$$

с точностью до эквивалентности норм. Отсюда на основании предложения 3 и леммы 1 заключаем, что $H = H^\varphi(\mathbb{R}^n)$, где функциональный параметр $\varphi \in \mathrm{RO}$ определен по формуле (8).

Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что гильбертово пространство H равно $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ с точностью до эквивалентности норм для некоторого $\varphi \in \mathrm{RO}$. Выберем числа s_0, $s_1 \in \mathbb{Z}$ так, чтобы $s_0 < \sigma_0(\varphi)$, $s_1 > \sigma_1(\varphi)$, и положим

$$\psi(\tau) := \begin{cases} \tau^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\varphi(\tau^{1/(s_1-s_0)}) & \text{при} \quad \tau \geq 1, \\ \varphi(1) & \text{при} \quad 0 < \tau < 1. \end{cases} \tag{12}$$

Борелевская функция ψ принадлежит классу $\mathcal{B}$ (в силу предложения 1 (i)) и удовлетворяет равенству (8). Кроме того, она является интерполяционным параметром. Это устанавливается с помощью предложений 3 и 5 следующим образом.

Для произвольных $\tau_1 \geq \tau_2 \geq 1$ в силу правого неравенства в формуле (4) имеем соотношения

$$\frac{\psi(\tau_1)}{\psi(\tau_2)} = \frac{\tau_1^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\varphi(\tau_1^{1/(s_1-s_0)})}{\tau_2^{-s_0/(s_1-s_0)}\,\varphi(\tau_2^{1/(s_1-s_0)})} \leq \lambda_1^{-s_0/(s_1-s_0)}\,c\,\lambda_1^{s_1/(s_1-s_0)} = c\,\lambda_1 = c\,\max\Big\{1,\,\frac{\tau_1}{\tau_2}\Big\},$$

где $\lambda_1 := \tau_1/\tau_2 \geq 1$, а число $c > 0$ не зависит от τ_1 и τ_2. Аналогично, для любых $\tau_2 \geq \tau_1 \geq 1$ на основании левого неравенства в (4) можно записать оценку

$$\frac{\psi(\tau_1)}{\psi(\tau_2)} \leq \lambda_2^{s_0/(s_1-s_0)}\,c\,\lambda_2^{-s_0/(s_1-s_0)} = c = c\,\max\Big\{1,\,\frac{\tau_1}{\tau_2}\Big\},$$

где $\lambda_2 := \tau_2/\tau_1 \geq 1$. Таким образом, выполняется неравенство (7), в котором $r = 1$, и функция ψ псевдовогнута на полупрямой $(1,\infty)$ в силу предложения 5. Отсюда на основании предложения 3 делаем вывод, что ψ — интерполяционный параметр.

Напомним, что ψ удовлетворяет соотношению (8). Поэтому согласно лемме 1 выполняется равенство пространств (9). Следовательно, пространство H, равное $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ с точностью до эквивалентности норм, является интерполяционным для выбранной пары соболевских пространств $[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)]$, где, напомним, $s_0,\, s_1 \in \mathbb{Z}$.

Достаточность доказана. Тем самым установлена теорема 1.

4. Эллиптические операторы и шкала. Согласно определению, норма в пространстве $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathrm{RO}$, удовлетворяет равенству

$$\|u\|_{\varphi} = \|\varphi(1-\Delta)u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \qquad \text{для любого} \quad u \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Здесь, как обычно, Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi(1-\Delta)$ — функция φ от оператора $1-\Delta$, рассматриваемого как неограниченный самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Оказывается, что вместо оператора $1-\Delta$ можно использовать равномерно эллиптический псевдодифференциальный оператор (ПДО), удовлетворяющий некоторым условиям. При этом получим эквивалентную норму в пространстве $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Соответствующий результат будет установлен ниже в теореме 2.

Предварительно приведем необходимые нам результаты, относящиеся к равномерно эллиптическим ПДО, заданным в $\mathbb{R}^n$.

Следуя [19] (п. 1.1), обозначим через $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, $m \in \mathbb{R}$, класс всех ПДО A в $\mathbb{R}^n$ таких, что их символ $a(x,\xi)$ является комплекснозначной бесконечно дифференцируемой функцией аргументов $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей следующему условию: для любых мультииндексов α и β существует число $c_{\alpha,\beta} > 0$, при котором

$$\big|\partial_x^{\alpha}\,\partial_{\xi}^{\beta}\,a(x,\xi)\big| \leq c_{\alpha,\beta}\,\langle\xi\rangle^{m-|\beta|} \qquad \text{для всех} \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(Здесь, как обычно, $|\beta| := \beta_1 + \ldots + \beta_n$ для мультииндекса $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.) Число m называется (формальным) порядком ПДО $A \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$.

Отметим, что ПДО класса $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$ являются ограниченными операторами в соответствующих парах пространств расширенной соболевской шкалы. А именно, для любого ПДО $A \in \in \Psi^m(\mathbb{R}^n)$ сужение линейного отображения $u \mapsto Au$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, на пространство $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ является ограниченным оператором

$$A\colon H^\varphi(\mathbb{R}^n) \to H^{\varphi\rho^{-m}}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{для любого} \quad \varphi \in \mathrm{RO}.$$

Здесь и далее $\rho(t) := t$ при $t \geq 1$. Заметим, что $\varphi\rho^{-m} \in \mathrm{RO}$. В случае (гильбертовых) пространств Соболева это свойство ПДО известно [19] (теорема 1.1.2). Общая ситуация произвольного $\varphi \in \mathrm{RO}$ следует из соболевского случая с помощью интерполяционной леммы 1.

Пусть A — произвольный ПДО класса $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, где $m > 0$. Предположим, что он удовлетворяет следующим условиям:

(i) ПДО A равномерно эллиптический в $\mathbb{R}^n$, т. е. существуют положительные числа c_1 и c_2 такие, что

$$(x, \xi \in \mathbb{R}^n,\ |\xi| \geq c_2) \ \Rightarrow\ |a(x,\xi)| \geq c_1 |\xi|^m;$$

(ii) неограниченный оператор $u \mapsto Au$, где $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, является положительно определенным в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, т. е. существует число $r > 0$ такое, что

$$(Au, u)_{(0)} \geq r\, \|u\|_{(0)} \qquad \text{для любого} \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Здесь и далее через $(\cdot,\cdot)_{(0)}$ и $\|\cdot\|_{(0)}$ обозначены соответственно скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n) = H^{(0)}(\mathbb{R}^n)$.

Из условий (i) и (ii) следует, что отображение $u \mapsto Au$, $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, является неограниченным самосопряженным и положительно определенным оператором в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ (см. [19] (п. 3.1 b и п. 2.3)). Обозначим этот оператор через A_0. Его спектр расположен на полуоси $[r, \infty)$.

Лемма 2. *Сужение отображения $u \mapsto Au$, $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, на пространство $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ является изоморфизмом*

$$A\colon H^\varphi(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow H^{\varphi\rho^{-m}}(\mathbb{R}^n) \qquad \textit{для любого} \quad \varphi \in \mathrm{RO}. \tag{13}$$

Доказательство. Сначала отметим, что в парах пространств Соболева отображение $u \mapsto \mapsto Au$ определяет изоморфизм

$$A\colon H^{(s)}(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow H^{(s-m)}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{для любого} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

В случае $s = m$ это непосредственно следует из указанных выше свойств оператора A_0. Отсюда следует изоморфизм (14) для произвольного $s > m$. Действительно, для любого $f \in H^{(s-m)}(\mathbb{R}^n)$ существует единственное решение $u \in H^{(m)}(\mathbb{R}^n)$ уравнения $Au = f$. Но поскольку ПДО A равномерно эллиптический в $\mathbb{R}^n$, то $u \in H^{(s)}(\mathbb{R}^n)$ (см. [19] (теорема 1.8.5)). Следовательно, непрерывное отображение (14) взаимно однозначно и поэтому является изоморфизмом (по теореме Банаха об обратном операторе). Случай $s \leq 0$ получается теперь переходом к оператору, сопряженному к (14), а случай $0 < s < m$ — аналогично случаю $s > m$.

Для произвольного $\varphi \in \mathrm{RO}$ изоморфизм (13) установим с помощью интерполяции. Выберем целые числа $s_0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 > \sigma_1(\varphi)$. Рассмотрим изоморфизмы пар соболевских пространств:

$$A\colon H^{(s_j)}(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow H^{(s_j-m)}(\mathbb{R}^n) \qquad \text{для} \quad j = 0, 1. \tag{15}$$

Определим функцию ψ по формуле (12). Как показано в доказательстве теоремы 1, эта функция является интерполяционным параметром. Поэтому изоморфизмы (15) влекут за собой еще один изоморфизм

$$A\colon \big[H^{(s_0)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1)}(\mathbb{R}^n)\big]_\psi \leftrightarrow \big[H^{(s_0-m)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1-m)}(\mathbb{R}^n)\big]_\psi. \tag{16}$$

Согласно (12) функция φ удовлетворяет равенству (8), которое можно записать в таком виде:

$$\varphi(t)t^{-m} := t^{s_0-m}\,\psi\big(t^{(s_1-m)-(s_0-m)}\big) \quad \text{при} \quad t \geq 1.$$

Следовательно, в силу леммы 1 справедливы интерполяционные формулы (9) и

$$\big[H^{(s_0-m)}(\mathbb{R}^n), H^{(s_1-m)}(\mathbb{R}^n)\big]_\psi = H^{\varphi\varrho^{-m}}(\mathbb{R}^n).$$

Они вместе с (16) влекут изоморфизм (13).

Лемма 2 доказана.

Доопределим $\varphi(t) := \varphi(1)$ при $0 < t < 1$. Поскольку $\mathrm{Spec}\, A_0 \subset (0, \infty)$, в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ определен оператор $\varphi(A_0^{1/m})$ как борелевская функция $\varphi(t^{1/m})$, $t > 0$, от положительного самосопряженного оператора A_0.

В силу предложения 2 (ii) положим

$$H^\infty(\mathbb{R}^n) := \bigcap_{s \in \mathbb{R}} H^{(s)}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{RO}} H^\varphi(\mathbb{R}^n).$$

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения*:

(i) *Область определения оператора* $\varphi(A_0^{1/m})$ *содержит множество* $H^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) *Отображение*

$$u \mapsto \|\varphi(A_0^{1/m})\, u\|_{(0)} =: \|u\|_{\varphi,A}, \quad u \in H^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{17}$$

является гильбертовой нормой.

Доказательство. (i) В силу предложения 1 (iii) (где полагаем $t := 1$) существуют числа $k \in \in \mathbb{N}$ и $c > 0$ такие, что $\varphi(\tau^{1/m}) \leq c\,\tau^k$ для всех $\tau \geq 1$ (достаточно выбрать целое $k > \sigma_1(\varphi)/m$). Следовательно,

$$H^\infty(\mathbb{R}^n) \subset H^{km}(\mathbb{R}^n) = \mathrm{Dom}\, A_0^k \subseteq \mathrm{Dom}\, \varphi(A_0^{1/m}).$$

(ii) Для отображения (17) все свойства нормы очевидны, за исключением свойства положительной определенности. Докажем его. Для произвольной функции $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$ на основании спектральной теоремы запишем

$$\|\varphi(A_0^{1/m})\, u\|_{(0)}^2 = \int\limits_r^\infty \varphi^2(t^{1/m})\, d(E_t\, u, u)_{(0)}, \tag{18}$$

$$\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_r^\infty d(E_t\, u, u)_{(0)}. \tag{19}$$

Здесь E_t, $t \geq r$, — разложение единицы, соответствующее самосопряженному оператору A_0 в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Теперь, если левая часть равенства (18) равна 0, мера $(E(\cdot)u, u)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ множества $[r, \infty)$ также равна 0, поскольку $\varphi > 0$. Отсюда в силу (19) получаем, что $u = 0$ в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, отображение (17) — норма и, очевидно, она гильбертова.

Лемма 3 доказана.

Обозначим через $H^\varphi_A(\mathbb{R}^n)$ пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по гильбертовой норме (17).

Теорема 2. *Для произвольной функции $\varphi \in \mathrm{RO}$ нормы в пространствах $H^\varphi(\mathbb{R}^n)$ и $H^\varphi_A(\mathbb{R}^n)$ эквивалентны на плотном множестве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тем самым $H^\varphi(\mathbb{R}^n) = H^\varphi_A(\mathbb{R}^n)$ с точностью до эквивалентности норм.*

Доказательство. Предположим сначала, что функция $\varphi \in \mathrm{RO}$ удовлетворяет условию $\sigma_0(\varphi) > 0$. Выберем число $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $k\,m > \sigma_1(\varphi)$. Поскольку оператор A_0^k замкнут и положительно определен в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, его область определения $\mathrm{Dom}\, A_0^k$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения $(A^k u_1, A^k u_2)_{(0)}$ функций u_1, u_2. При этом пара гильбертовых пространств $[L_2(\mathbb{R}^n), \mathrm{Dom}\, A_0^k]$ допустима и оператор A_0^k является порождающим для нее. Кроме того, пространства $\mathrm{Dom}\, A_0^k$ и $H^{(km)}(\mathbb{R}^n)$ совпадают с точностью до эквивалентности норм в силу леммы 2. Определим интерполяционный параметр ψ по формуле (12), где $s_0 := 0 < \sigma_0(\varphi)$ и $s_1 = k\,m > \sigma_1(\varphi)$. Так как $\varphi(t) = \psi(t^{km})$ при $t > 0$, в силу леммы 1 имеем

$$\|u\|_\varphi = \|u\|_{[H^0(\mathbb{R}^n), H^{(km)}(\mathbb{R}^n)]_\psi} \asymp \|u\|_{[L_2(\mathbb{R}^n), \mathrm{Dom}\, A_0^k]_\psi} =$$

$$= \|\psi(A_0^k)u\|_{(0)} = \|\varphi(A_0^{1/m})u\|_{(0)} = \|u\|_{\varphi, A},$$

где $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$, а знак $\asymp$ обозначает эквивалентность норм.

В случае $\sigma_0(\varphi) > 0$ теорема доказана.

Пусть теперь функция $\varphi \in \mathrm{RO}$ произвольна. Выберем число $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\sigma_0(\varphi) + k\,m > 0$. Тогда $\sigma_0(\varphi\rho^{km}) > 0$ и по уже доказанному

$$\|v\|_{\varphi\rho^{km}} \asymp \|v\|_{\varphi\rho^{km}, A}, \quad v \in H^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{20}$$

В силу леммы 2 ПДО A^k задает изоморфизм

$$A^k \colon H^{\varphi\rho^{km}}(\mathbb{R}^n) \leftrightarrow H^\varphi(\mathbb{R}^n).$$

Обозначим через A^{-k} оператор, обратный к A^k. Пусть u принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Воспользовавшись формулой (20) для $v := A^{-k}u \in H^\infty(\mathbb{R}^n)$, получим требуемую эквивалентность норм

$$\|u\|_\varphi \asymp \|A^{-k}u\|_{\varphi\rho^{km}} \asymp \|A^{-k}u\|_{\varphi\rho^{km}, A} = \|\varphi(A_0^{1/m}) A_0^k A^{-k} u\|_{(0)} = \|u\|_{\varphi, A}.$$

Теорема 2 доказана.

Выделим следующий важный случай.

Теорема 3. *Предположим, что функция* $\varphi \in \mathrm{RO}$ *отделена от нуля на полуоси* $[1,\infty)$. *Тогда пространство* $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *совпадает с областью определения оператора* $\varphi(A_0^{1/m})$, *причем норма в пространстве* $H^{\varphi}(\mathbb{R}^n)$ *эквивалентна норме графика оператора* $\varphi(A_0^{1/m})$.

Доказательство. Пространство $\operatorname{Dom}\varphi(A_0^{1/m})$ гильбертово относительно скалярного произведения графика замкнутого оператора $\varphi(A_0^{1/m})$. По условию существует число $c>0$ такое, что $\varphi(t)\geq c$ при $t>0$. Следовательно,

$$\|\varphi(A_0^{1/m})u\|_{(0)}\geq c\,\|u\|_{(0))} \qquad \text{для любого} \quad u\in H^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда в силу теоремы 2 следует требуемая эквивалентность норм на множестве $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Остается доказать его плотность в пространстве $\operatorname{Dom}\varphi(A_0^{1/m})$.

Пусть u принадлежит $\operatorname{Dom}\varphi(A_0^{1/m})$. Поскольку $\varphi(A_0^{1/m})u$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^n)$, существует последовательность функций $v_j\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $v_j\to\varphi(A_0^{1/m})u$ в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $j\to\infty$. Так как $1/\varphi(t^{1/m})\leq 1/c$ при $t>0$, оператор $\varphi^{-1}(A_0^{1/m})$ ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$. Следовательно,

$$u_j:=\varphi^{-1}(A_0^{1/m})v_j\to u, \qquad \varphi(A_0^{1/m})u_j=v_j\to\varphi(A_0^{1/m})u$$

в $L_2(\mathbb{R}^n)$ при $j\to\infty$. Иными словами, $u_j\to u$ по норме графика оператора $\varphi(A_0^{1/m})$. Кроме того, поскольку $v_j\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, для каждого $k\in\mathbb{N}$ в силу леммы 2 имеем

$$u_j=A_0^{-k}\varphi^{-1}(A_0^{1/m})A_0^k\,v_j\in H^{(km)}(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, u_j принадлежит $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ и тем самым плотность множества $H^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\operatorname{Dom}\varphi(A_0^{1/m})$ установлена.

Теорема 3 доказана.

5. Дополнения и замечания. В последнее время пространства Хермандера и их различные аналоги, называемые пространствами обобщенной гладкости, активно исследуются как сами по себе, так и с точки зрения приложений. Для таких пространств показателем гладкости является не числовой, а функциональный параметр. В этой связи отметим недавние монографии Б. Панеяха [12], Х. Трибеля [20], Н. Якоба [21] и Ф. Никола, Л. Родино [22].

Среди пространств обобщенной гладкости расширенная соболевская шкала занимает особое место благодаря своим интерполяционным свойствам. Они обуславливают различные ее применения в теории эллиптических операторов [23 – 30]. Можно ожидать, что расширенная соболевская шкала окажется полезной и в других областях математического анализа и теории дифференциальных уравнений, в частности там, где используются интерполяционные шкалы гильбертовых пространств (см., например, [31, 32]).

1. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2010. – 372 с. (Доступно на arXiv: 1106.3214.)
2. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* The refined Sobolev scale, interpolation, and elliptic problems // Banach J. Math. Anal. – 2012. – **6**, № 2. – P. 211 – 281.
3. *Hörmander L.* Linear partial differential operators. – Berlin: Springer, 1963. – 285 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М.: Мир, 1965. – 380 с.)
4. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. II: Differential operators with constant coefficients.– Berlin: Springer, 1983. – viii+391 p. (Рус. перевод: *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. – М.: Мир, 1986. – Т. 2. – 456 с.)

5. *Volevich L. R., Paneah B. P.* Certain spaces of generalized functions and embedding theorems // Rus. Math. Surv. – 1965. – **20**, № 1. – P. 1 – 73.
6. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic operators in a refined scale of function spaces // Ukr. Math. J. – 2005. – **57**, № 5. – P. 817 – 825.
7. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Improved scale of spaces and elliptic boundary-value problems. II // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 3. – P. 398 – 417.
8. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* A regular elliptic boundary-value problem for a homogeneous equation in a two-sided improved scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, № 11. – P. 1748 – 1767.
9. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Refined scale of spaces and elliptic boundary-value problems. III // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 5. – P. 744 – 765.
10. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* An elliptic boundary-value problem in a two-sided refined scale of spaces // Ukr. Math. J. – 2008. – **60**, № 4. – P. 574 – 597.
11. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic problems and Hörmander spaces // Oper. Theory: Adv. and Appl. – 2009. – **191**. – P. 447 – 470.
12. *Paneah B.* The oblique derivative problem. The Poincaré problem.– Berlin: Wiley–VCH, 2000. – 348 p.
13. *Seneta E.* Regularly varying functions. – Berlin: Springer, 1976. – 112 p. (Рус. перевод: *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 144 с.)
14. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 512 p.
15. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction. – Berlin: Springer, 1976. – x+207 p. (Рус. перевод: *Берг Й, Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980. – 264 с.)
16. *Foiaş C., Lions J.-L.* Sur certains théorèmes d'interpolation // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1961. – **22**, № 3-4. – P. 269 – 282.
17. *Peetre J.* On interpolation functions. II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1968. – **29**, № 1-2. – P. 91 – 92.
18. *Ovchinnikov V. I.* The methods of orbits in interpolation theory // Math. Rep. Ser. 1. – 1984. – № 2. – P. 349 – 515.
19. *Agranovich M. S.* Elliptic operators on closed manifolds // Encycl. Math. Sci. Partial Different. Equat. VI. – Berlin: Springer, 1994. – **63**. – P. 1 – 130.
20. *Triebel H.* The structure of functions. – Basel: Birkhäuser, 2001. – xii+425 p.
21. *Jacob N.* Pseudodifferential operators and Markov processes (in 3 volumes). – London: Imperial College Press, 2001, 2002, 2005. – xxii+493 p., xxii+453 p., xxviii+474 p.
22. *Nicola F., Rodino L.* Global pseudodifferential calculas on Euclidean spaces. – Basel: Birkhäuser, 2010. – x+306 p.
23. *Murach A. A.* Elliptic pseudo-differential operators in a refined scale of spaces on a closed manifold // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 6. – P. 874 – 893.
24. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Interpolation with a function parameter and refined scale of spaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 1. – P. 81 – 100.
25. *Murach A. A.* Douglis-Nirenberg elliptic systems in the refined scale of spaces on a closed manifold // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2008. – **14**, № 2. – P. 142 – 158.
26. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Elliptic systems of pseudodifferential equations in the refined scale on a closed manifold // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. – 2008. – **56**, № 3-4. – P. 213 – 224.
27. *Murach A. A.* On elliptic systems in Hörmander spaces // Ukr. Math. J. – 2009. – **61**, № 3. – P. 467 – 477.
28. *Зинченко Т. Н., Мурач А. А.* Эллиптические по Дуглису – Ниренбергу системы в пространствах Хермандера // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 11. – С. 1477 – 1491.
29. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* On the unconditional almost-everywhere convergence of general orthonormal series // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, № 10. – P. 1543 – 1550.
30. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* General forms of the Menshov – Rademacher, Orlicz, and Tandori theorems on orthogonal series // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2011. – **17**, № 4. – P. 330 – 340.
31. *Hegland M.* Error bounds for spectral enhancement which are based on variable Hilbert scale inequalities // J. Integral Equat. and Appl. – 2010. – **22**, № 2. – P. 285 – 312.
32. *Mathé P., Tautenhahn U.* Interpolation in variable Hilbert scales with application to innverse problems // Inverse Problems. – 2006. – **22**, № 6. – P. 2271 – 2297.

Получено 15.11.12