УДК 517.95+511.2

Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів),
І. Р. Тимків (Івано-Франк. нац. техн. ун-т нафти і газу)

БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ B-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ*

We establish conditions for the well-posedness of a problem for one class of parabolic equations with the Bessel operator in one of the space variables in a bounded domain with multipoint conditions in the time variable and some boundary conditions in the space coordinates. A solution of the problem is constructed in the form of a series in a system of orthogonal functions. We prove a metric theorem on lower bounds for the small denominators appearing in the solution of the problem.

Установлены условия корректности задачи с многоточечными условиями по временной переменной и некоторыми краевыми условиями по пространственным координатам для одного класса параболических уравнений с оператором Бесселя по одной из пространственных переменных в ограниченной области. Построено решение задачи в виде ряда по системе ортогональных функций. Доказана метрическая теорема об оценках снизу малых знаменателей, которые возникли при построении решения.

1. Вступ. Еволюційні рівняння з оператором Бесселя за просторовими координатами описують деякі дифузійні процеси, явища тепломасопереносу, зустрічаються в задачах гідродинаміки, кристалографії [1 – 3]. У згаданих працях, а також в роботі [4] для таких рівнянь вивчались задача Коші та мішані задачі. Задачі з інтегральними умовами для лінійних та нелінійних параболічних рівнянь другого порядку з оператором Бесселя (B-параболічних рівнянь) вивчались у працях [5 – 7]. Нелокальні багатоточкові задачі для B-параболічного рівняння другого порядку вивчено у роботі [8], а для систем B-параболічних рівнянь — у праці [2].

У даній статті досліджено коректну розв'язність задачі з локальними багатоточковими умовами за часом для параболічного рівняння з оператором Бесселя за однією з просторових змінних в обмеженій області, що є декартовим добутком $(p-1)$-вимірного тора $(p \geq 2)$ і прямокутника. Результати роботи частково анонсовано у [9].

Багатоточкові задачі для регулярних гіперболічних, параболічних та безтипних рівнянь досліджувались у багатьох роботах, зокрема в [10 – 14], де встановлено, що такі задачі є, взагалі, некоректними, а їх розв'язність у багатьох випадках пов'язана з проблемою малих знаменників, для розв'язання якої природним виявився метричний підхід.

Далі використовуватимемо такі позначення: $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_p) \in \mathbb{N}^p$, $p \geq 2$, — заданий вектор, b — найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_p$, $q_j := b/b_j$, $j \in \{1, \ldots, p\}$; $x = (x_1, \ldots, x_p) := (x', x_p)$, $x' \in \Omega$, де Ω — $(p-1)$-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^{p-1}$, $x_p \in [0, \ell]$, $Q = \Omega \times (0, \ell)$, $D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} \colon 0 < t < T, x \in Q\}$; $s = (s_1, \ldots, s_p) := (s', s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s|^* = \sum_{j=1}^{p-1} s_j q_j + 2 s_p q_p$, $|s'| = s_1 + \ldots + s_{p-1}$, $|s| = |s'| + s_p$; $k = (k_1, \ldots, k_p) := (k', k_p)$, $k' \in \mathbb{Z}^{p-1}$, $k_p \in \mathbb{N}$, $|k'| = |k_1| + \ldots + |k_{p-1}|$, $(k', x') = k_1 x_1 + \ldots + k_{p-1} x_{p-1}$; $S_T = \{\vec{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [0, T]^n \colon 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T\}$; $\Gamma(r)$, $r > 0$, — гамма-функція; C_n^m, $1 \leq m \leq n$, — кількість комбінацій з n елементів по m; $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ — міра Лебега в $\mathbb{R}^n$ множини $A \subset \mathbb{R}^n$.

2. Постановка задачі. В області D розглянемо задачу

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{2bs_0+|s|^*=2bn} A_{s_0,s} \frac{\partial^{s_0+|s'|} \mathcal{B}_\nu^{s_p} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_{p-1}^{s_{p-1}}} = f(t,x), \quad (t,x) \in D, \tag{1}$$

*Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 41.1/004).

$$u(t_j,x)=\varphi_j(x),\quad j\in\{1,\dots,n\},\quad \vec{t}\in S_T,\quad x\in\overline{Q},\tag{2}$$

$$\begin{cases}\left|u(t,x)|_{x_p=0}\right|<\infty,\quad \left.\dfrac{\partial^{2m+1}u(t,x)}{\partial x_p^{2m+1}}\right|_{x_p=0}=0,\quad m\in\{0,1,\dots,nb_p-2\},\quad t\in[0,T],\\ \mathcal{B}_\nu^q u(t,x)\big|_{x_p=\ell}=0,\quad q\in\{0,1,\dots,nb_p-1\},\quad t\in[0,T],\end{cases}\tag{3}$$

де $A_{s_0,s}\in\mathbb{C}$; $\mathcal{B}_\nu=\dfrac{\partial^2}{\partial x_p^2}+\dfrac{2\nu+1}{x_p}\dfrac{\partial}{\partial x_p}$ — оператор Бесселя порядку ν, $\nu\geq-\dfrac{1}{2}$, $\mathcal{B}_\nu^q u=\mathcal{B}_\nu(\mathcal{B}_\nu^{q-1}u)$, $q\in\{1,\dots,nb_p\}$, $\mathcal{B}_\nu^0 u=u$. Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінними $x_1,\dots,x_{p-1}$ на шуканий розв'язок та функції $f(t,x)$ і $\varphi_j(x)$, $j\in\{1,\dots,n\}$.

Припустимо, що рівняння (1) є $\overrightarrow{2b}$-параболічним (див. [15; 2, с. 11]) в області D, тобто для довільного $\eta\in\mathbb{R}^p$ ξ-корені рівняння

$$\xi^n+\sum_{s_0=0}^{n-1}\sum_{2bs_0+|s|^*=2bn}A_{s_0,s}(i\eta_1)^{s_1}\dots(i\eta_{p-1})^{s_{p-1}}(i\eta_p)^{2s_p}\xi^{s_0}=0\tag{4}$$

справджують нерівності

$$\operatorname{Re}\xi_r(\eta)\leq-\delta(\eta_1^{2b_1}+\dots+\eta_p^{2b_p}),\qquad \delta>0,\quad r\in\{1,\dots,n\}.\tag{5}$$

Відомо [16], що задача

$$\mathcal{B}_\nu J(x_p)+\lambda J(x_p)=0,\quad |J(0)|<\infty,\quad J(\ell)=0,$$

має повну ортогональну в ваговому просторі $L_2((0,\ell);x_p^{2\nu+1})$ систему власних функцій $\left\{j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\right),\ k_p\in\mathbb{N}\right\}$ і множину власних значень $\Lambda:=\{\lambda_{k_p}=(\sigma_{k_p}/\ell)^2,\ k_p\in\mathbb{N}\}$, де

$$j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\right)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1+r)\Gamma(r+1)}\left(\frac{\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p}{2}\right)^{2r}$$

— нормована функція Бесселя, а σ_{k_p}, $k_p\in\mathbb{N}$, — σ-корені рівняння $j_\nu(\sigma\ell)=0$; при цьому справедливими є оцінки

$$C_1k_p^2\leq\lambda_{k_p}\leq C_2k_p^2,\quad 0<C_1<C_2,\quad k_p\in\mathbb{N}.\tag{6}$$

Очевидно, що система функцій $\left\{\exp{(ik',x')}j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\right),\ k\in\mathbb{Z}^{p-1}\times\mathbb{N}\right\}$ є повною і ортогональною у ваговому просторі $L_2(Q;x_p^{2\nu+1})$. Нехай

$$f(t,x)=\sum_{|k'|\geq0}\sum_{k_p=1}^{\infty}f_k(t)\exp{(ik',x')}j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\right),$$

$$\varphi_j(x)=\sum_{|k'|\geq0}\sum_{k_p=1}^{\infty}\varphi_{jk}\exp{(ik',x')}j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\right),\quad j\in\{1,\dots,n\},$$

де

$$f_k(t)=\mathcal{P}(\lambda_{k_p})\int_Q f(t,x)\exp{(-(ik',x'))}j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}}x_p\right)x_p^{2\nu+1}dx,$$

$$\varphi_{jk} = \mathcal{P}(\lambda_{k_p}) \int\limits_Q \varphi_j(x) \exp\left(-(ik', x')\right) j_\nu \left(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p\right) x_p^{2\nu+1} dx, \quad j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\mathcal{P}(\lambda_{k_p}) = (2\pi)^{-p+1} \left(\int\limits_0^\ell x_p^{2\nu+1} j_\nu^2 \left(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p\right) dx_p \right)^{-2}.$$

Позначимо $\mathcal{W} = \mathbb{Z}^{p-1} \times \Lambda$, $\lambda_k = (k', \lambda_{k_p}) \in \mathcal{W}$; $\|\lambda_k\|^{2\vec{b}} = k_1^{2b_1} + \ldots + k_{p-1}^{2b_{p-1}} + (\lambda_{k_p})^{b_p}$; $w_{\lambda_k}(\alpha; \gamma; 2\vec{b}) = (1 + \|\lambda_k\|^{2\vec{b}})^\alpha \exp\left(\gamma \|\lambda_k\|^{2\vec{b}}\right)$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$; $C^{(m, 2\vec{b}m)}(\overline{D})$, $m \in \mathbb{N}$, — простір визначених і неперервних в $\overline{D}$ функцій $v(t,x)$ (2π-періодичних по $x_1, \ldots, x_{p-1}$), для яких існують неперервні похідні $\dfrac{\partial^{s_0 + |s|} v(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \cdots \partial x_p^{s_p}}$, де $2bs_0 + s_1 q_1 + \ldots + s_p q_p \le 2bm$, з нормою

$$\|v; C^{(m, 2\vec{b}m)}(\overline{D})\| = \sum_{2bs_0 + s_1 q_1 + \ldots + s_p q_p \le 2bm} \max_{(t,x) \in \overline{D}} \left| \frac{\partial^{s_0 + |s|} v(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \ldots \partial x_p^{s_p}} \right|;$$

$E^\gamma_{\alpha, 2\vec{b}}$ — простір функцій $\varphi(x) = \sum_{|k'| \ge 0} \sum_{k_p = 1}^\infty \varphi_k \exp\left(ik', x'\right) j_\nu \left(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p\right)$, для яких є скінченною норма

$$\|\varphi; E^\gamma_{\alpha, 2\vec{b}}\| = \sqrt{\sum_{|k'| \ge 0} \sum_{k_p \in \mathbb{N}} |\varphi_k|^2 w^2_{\lambda_k}(\alpha; \gamma; 2\vec{b})};$$

$C^m([0,T]; E^\gamma_{\alpha, 2\vec{b}})$ — простір визначених в D функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\partial^q v(t,x)/\partial t^q$, $q \in \{0, 1, \ldots, m\}$, належать простору $E^\gamma_{\alpha, 2\vec{b}}$ і є неперервними по t в нормі цього простору,

$$\left\| v; C^m([0,T]; E^\gamma_{\alpha, 2\vec{b}}) \right\| = \sum_{q=0}^m \max_{0 \le t \le T} \left\| \partial^q v(t, \cdot)/\partial t^q; E^\gamma_{\vec{\alpha}, 2\vec{b}} \right\|.$$

3. Єдиність розв'язку задачі. Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{|k'| \ge 0} \sum_{k_p = 1}^\infty u_k(t) \exp\left(ik', x'\right) j_\nu \left(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p\right). \tag{7}$$

Кожна функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^{p-1} \times \mathbb{N}$, є, відповідно, розв'язком багатоточкової задачі

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{s_0 = 0}^{n-1} \sum_{2bs_0 + |s|^* = 2bn} A_{s_0, s} (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_{p-1})^{s_{p-1}} (-\lambda_{k_p})^{s_p} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = f_k(t), \tag{8}$$

$$u_k(t_j) = \varphi_{jk}, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \vec{t} \in S_T. \tag{9}$$

Розглянемо відповідну до (8), (9) однорідну задачу

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{s_0 = 0}^{n-1} \sum_{2bs_0 + |s|^* = 2bn} A_{s_0, s} (ik_1)^{s_1} \ldots (ik_{p-1})^{s_{p-1}} (-\lambda_{k_p})^{s_p} \frac{d^{s_0} u_k(t)}{dt^{s_0}} = 0, \tag{10}$$

$$u_k(t_j) = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \quad \vec{t} \in S_T. \tag{11}$$

Запишемо для (10) характеристичне рівняння

$$\mu^n + \sum_{s_0=0}^{n-1} \sum_{2bs_0+|s|^*=2bn} A_{s_0,s}(ik_1)^{s_1}\dots(ik_{p-1})^{s_{p-1}}(-\lambda_{k_p})^{s_p}\mu^{s_0} = 0. \quad (12)$$

Позначимо через $\mu_1(\lambda_k),\dots,\mu_{l(k)}(\lambda_k)$ різні корені рівняння (12) з кратностями $n_1(k),\dots$ $\dots, n_{l(k)}(k)$ відповідно, $n_1(k)+\dots+n_{l(k)}(k)=n$. Для цих коренів справджуються оцінки [17, с. 102]

$$|\mu_q(\lambda_k)| \le C_3(1+\|\lambda_k\|^{2\vec{b}}), \quad \lambda_k \in \mathcal{W}, \quad q\in\{1,\dots,l(k)\}, \quad (13)$$

де $C_3 = 2\max_{m\in\{1,\dots,n\}}\{\max_{s,|s|^*=2bm}\{|A_{n-m,s}|^{1/m}\}\}$. Зауважимо, що при $\eta_r = k_r$, $r\in$ $\in\{1,\dots,p-1\}$, $\eta_p=\sqrt{\lambda_{k_p}}$ рівняння (4) збігається з рівнянням (12). Тому, враховуючи (5), отримуємо

$$\operatorname{Re}\mu_q(\lambda_k) \le -\delta\|\lambda_k\|^{2\vec{b}}, \quad \lambda_k\in\mathcal{W}, \quad q\in\{1,\dots,l(k)\}. \quad (14)$$

Враховуючи, що $|\operatorname{Re}\mu_q(\lambda_k)| \le |\mu_q(\lambda_k)|$, $q\in\{1,\dots,l(k)\}$, на підставі оцінок (13) отримуємо, що величина $\gamma_0 = \sup_{\lambda_k\in\mathcal{W}}\max_{q\in\{1,\dots,l(k)\}}\left\{|\operatorname{Re}\mu_q(\lambda_k)|/(1+\|\lambda_k\|^{2\vec{b}})\right\}$ є скінченною. Тому справджуються оцінки

$$|\exp(\mu_q(\lambda_k)t)| = \exp\left(-\frac{|\operatorname{Re}\mu_q(\lambda_k)|t}{(1+\|\lambda_k\|^{2\vec{b}})}(1+\|\lambda_k\|^{2\vec{b}})\right) \ge C_4\exp(-\gamma_0 T\|\lambda_k\|^{2\vec{b}}), \quad t\in[0,T], \quad (15)$$

де $\lambda_k\in\mathcal{W}$, $q\in\{1,\dots,l(k)\}$, $C_4=\exp(-\gamma_0 T)$.

Для побудови фундаментальної системи розв'язків рівняння (10) використаємо поділені різниці функції $\exp(\mu t)$, $\mu\in\mathbb{C}$, $t\in\mathbb{R}$.

Означення. *Нехай* $M = (\underbrace{\mu_1,\dots,\mu_1}_{n_1},\dots,\underbrace{\mu_l,\dots,\mu_l}_{n_l})$ *— набір комплексних чисел. Поділеною різницею порядку* $\chi = n_1+\dots+n_l$*, яка відповідає набору* M*, функції* $\psi(\mu,t)$ *комплексної змінної* μ*, де* t *— дійсний параметр, називають функцію* (*див.* [18, с. 228])

$$R_M(\psi(\mu,t)) = \sum_{j=1}^{l}\frac{1}{(n_j-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{n_j-1}\left(\psi(\mu,t)\prod_{i=1,i\ne j}^{l}(\mu-\mu_i)^{-n_i}\right)\Bigg|_{\mu=\mu_j}. \quad (16)$$

Якщо функція $\psi(\mu,t)$ аналітична в опуклій області $V\subset\mathbb{C}$, що містить точки $\mu_1,\dots,\mu_l$, то справедливою є формула (в якій $\zeta_0=1$, $\zeta_l=0$)

$$R_M(\psi(\mu,t)) = \int_0^1\int_0^{\zeta_1}\dots\int_0^{\zeta_{l-2}}\prod_{j=1}^{l}\frac{(\zeta_{j-1}-\zeta_j)^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\frac{\partial^{\chi-1}\psi(\mu,t)}{\partial\mu^{\chi-1}}\Bigg|_{\mu=\mu_1+\sum_{j=2}^{l}(\mu_j-\mu_{j-1})\zeta_{j-1}} d\zeta_{l-1}\dots d\zeta_1. \quad (17)$$

Нехай

$$M_{qr_q}(k) = \left(\underbrace{\mu_1(\lambda_k),\dots,\mu_1(\lambda_k)}_{n_1(k)},\dots,\underbrace{\mu_{q-1}(\lambda_k),\dots,\mu_{q-1}(\lambda_k)}_{n_{q-1}(k)},\underbrace{\mu_q(\lambda_k),\dots,\mu_q(\lambda_k)}_{r_q}\right),$$

$$r_q \in \{1,\ldots,n_q(k)\}, \quad q \in \{1,\ldots,l(k)\},$$

— набори, складені з коренів рівняння (12), $\chi_{qr_q}(k) = r_q + n_1(k) + \ldots + n_{q-1}(k)$. Побудуємо систему функцій

$$\left\{u_{k,q,r_q}(t) := R_{M_{qr_q}(k)}(\exp(\mu t)),\ r_q \in \{1,\ldots,n_q(k)\},\ q \in \{1,\ldots,l(k)\}\right\}, \tag{18}$$

кожна з яких є поділеною різницею порядку $\chi_{qr_q}(k)$ функції $\exp(\mu t)$, що відповідає набору $M_{qr_q}(k)$. На підставі формул (17), (18) знаходимо

$$u_{k,1,r_1}(t) = t^{r_1-1}\exp(\mu_1(\lambda_k)t)/(r_1-1)!, \quad r_1 \in \{1,\ldots,n_1(k)\}, \tag{19}$$

$$u_{k,q,r_q}(t) = \int\limits_0^1\int\limits_0^{\zeta_1}\ldots\int\limits_0^{\zeta_{q-2}} \phi(\zeta_1,\ldots,\zeta_{q-1})t^{\chi_{qr_q}(k)-1}\times$$

$$\times\exp\left\{\left(\mu_1(\lambda_k) + \sum_{j=2}^{q}(\mu_j(\lambda_k) - \mu_{j-1}(\lambda_k))\zeta_{j-1}\right)t\right\}d\zeta_{q-1}\ldots d\zeta_1, \quad q \in \{2,\ldots,l(k)\}, \tag{20}$$

де $r_q \in \{1,\ldots,n_q(k)\}$, $t \in [0,T]$, а $\phi(\zeta_1,\ldots,\zeta_{q-1})$ визначається формулою

$$\phi(\zeta_1,\ldots,\zeta_{q-1}) = \frac{(1-\zeta_1)^{n_1(k)-1}}{(n_1(k)-1)!}\prod_{j=2}^{q-1}\frac{(\zeta_{j-1}-\zeta_j)^{n_j(k)-1}}{(n_j(k)-1)!}\frac{\zeta_{q-1}^{r_q-1}}{(r_q-1)!}. \tag{21}$$

У формулі (21) точка $(\zeta_1,\ldots,\zeta_{q-1})$ належить симплексу $\mathcal{S}_q = \big\{(\zeta_1,\ldots,\zeta_{q-1}) \in [0,1]^{q-1} : 0 \leq$ $\leq \zeta_{q-1} \leq \zeta_{q-2} \leq \ldots \leq \zeta_1 \leq 1\big\}$. Звідки випливає, що $\phi(\zeta_1,\ldots,\zeta_{q-1}) \geq 0$.

Безпосередньою перевіркою можна показати, що сукупність функцій (19), (20) утворює фундаментальну систему розв'язків рівняння (10).

Характеристичний визначник задачі (8), (9) є таким:

$$\Delta(\lambda_k,\vec{t}\,) = \det\left\|u_{k,q,r_q}(t_j)\right\|_{j\in\{1,\ldots,n\},\,r_q\in\{1,\ldots,n_q(k)\}}^{q\in\{1,\ldots,l(k)\}}. \tag{22}$$

На підставі (16), (18) знаходимо

$$u_{k,q,r_q}(t) = \sum_{j=1}^{q-1}\frac{1}{(n_j(k)-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{n_j(k)-1}\times$$

$$\times\left(\exp(\mu t)\prod_{i=1,i\neq j}^{q-1}(\mu-\mu_i(\lambda_k))^{-n_i(k)}(\mu-\mu_q(\lambda_k))^{-r_q}\right)\Bigg|_{\mu=\mu_j(\lambda_k)} +$$

$$+\frac{1}{(r_q-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^{r_q-1}\left(\exp(\mu t)\prod_{i=1}^{q-1}(\mu-\mu_i(\lambda_k))^{-n_i(k)}\right)\Bigg|_{\mu=\mu_q(\lambda_k)}, \quad t\in[0,T], \tag{23}$$

де $r_q \in \{1,\ldots,n_q(k)\}$, $q \in \{1,\ldots,l(k)\}$. Враховуючи формули (22), (23), отримуємо

$$\Delta(\lambda_k,\vec{t}\,) = \prod_{1\leq i<j\leq l(k)}(\mu_j(\lambda_k)-\mu_i(\lambda_k))^{-n_i(k)n_j(k)}\det\left\|\frac{t_j^{r_q-1}\exp(\mu_q(\lambda_k)t_j)}{(r_q-1)!}\right\|_{j\in\{1,\ldots,n\},\,r_q=\overline{1,n_q(k)}}^{q\in\{1,\ldots,l(k)\}}. \tag{24}$$

Відомо [19], що задача (10), (11) має лише тривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\Delta(\lambda_k,\vec{t}\,) \neq 0$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^{(n,2\vec{b}n)}(\overline{D})$ *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\det \left\| t_j^{r_q-1} \exp\left(\mu_q(\lambda_k)t_j\right)/(r_q-1)! \right\|_{j\in\{1,\ldots,n\},\, r_q\in\{1,\ldots,n_q(k)\}}^{q\in\{1,\ldots,l(k)\}} \neq 0 \quad \forall \lambda_k \in \mathcal{W}. \tag{25}$$

Доведення. *Необхідність.* Якщо при деякому $\lambda_{k^0} \in \mathcal{W}$ умова (25) не виконується, то $\Delta(\lambda_{k^0}, \vec{t}\,) = 0$, і однорідна задача, що відповідає задачі (1)–(3), має нетривіальні розв'язки $u(t,x) = u_{k^0}(t)\exp(ik'^0, x')j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p^0}}x_p\right)$, де $u_{k^0}(t)$ — нетривіальний розв'язок задачі (10), (11) при $\lambda_k = \lambda_{k^0}$. Тому розв'язок задачі (1)–(3), якщо він існує, не буде єдиним.

Достатність встановлюється за схемою доведення теореми 5.3 з [10] (гл. 2).

4. Існування розв'язку задачі. Далі вважатимемо, що виконується умова (25). Тоді для кожного $\lambda_k \in \mathcal{W}$ існує розв'язок задачі (8), (9), який зображується формулою

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^{l(k)} \sum_{r_q=1}^{n_q(k)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q,r_q}(\lambda_k, \vec{t}\,)}{\Delta(\lambda_k, \vec{t}\,)} \varphi_{jk} u_{k,q,r_q}(t) + \int\limits_0^T G(t,\tau;\lambda_k) f_k(\tau)\,d\tau, \tag{26}$$

де $\Delta_{j,q,r_q}(\lambda_k, \vec{t}\,)$ — алгебраїчне доповнення елемента $u_{k,q,r_q}(t_j)$ у визначнику $\Delta(\lambda_k, \vec{t}\,)$, а $G(t,\tau;\lambda_k)$ — функція Гріна [19] задачі (10), (11), яка визначена у квадраті $K = \{(t,\tau)\colon 0 \le t \le T,\ 0 \le \tau \le T\}$ і в області $K_j = \{(t,\tau)\colon 0 \le t \le T,\ t_j < \tau < t_{j+1}\}$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, $t_0 = 0$, $t_{n+1} = T$, збігається, відповідно, з функцією

$$G_j(t,\tau;\lambda_k) = \frac{sgn(t-\tau)}{2} u_{k,l(k),n_l(k)}(t-\tau) + \sum_{m=1}^{j} (-1)^{m+1} F_m(t,\tau;\lambda_k) -$$

$$- \sum_{m=j+1}^{n} (-1)^{m+1} F_m(t,\tau;\lambda_k), \quad j \in \{0,1,\ldots,n\}, \tag{27}$$

$$F_m(t,\tau;\lambda_k) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{l(k)} \sum_{r_q=1}^{n_q(k)} \frac{\Delta_{m,q,r_q}(\lambda_k, \vec{t}\,)}{\Delta(\lambda_k, \vec{t}\,)} \times$$

$$\times u_{k,q,r_q}(t) u_{k,l(k),n_l(k)}(t_m - \tau), \quad m \in \{1,\ldots,n\}. \tag{28}$$

При $\tau = t_j$, $j \in \{0,1,\ldots,n\}$, доозначуємо функцію $G(t,\tau;\lambda_k)$ за неперервністю по τ справа, а при $\tau = T$ — за неперервністю зліва.

На основі формул (7), (26) формальний розв'язок задачі (1)–(3) зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{|k'|\ge 0} \sum_{k_p=1}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{l(k)} \sum_{r_q=1}^{n_q(k)} \sum_{j=1}^{n} \frac{\Delta_{j,q,r_q}(\lambda_k, \vec{t}\,)}{\Delta(\lambda_k, \vec{t}\,)} \varphi_{jk} u_{k,q,r_q}(t) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^T G(t,\tau;\lambda_k) f_k(\tau)\,d\tau \right) \exp(ik', x') j_\nu\left(\sqrt{\lambda_{k_p}} x_p\right). \tag{29}$$

Збіжність ряду (29), взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки величина $|\Delta(\lambda_k, \vec{t}\,)|$, будучи відмінною від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості $\lambda_k \in \mathcal{W}$.

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (25) *та існують сталі* $\omega \in \mathbb{R}$ *і* $\theta > 0$ *такі, що для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\lambda_k \in \mathcal{W}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(\lambda_k, \vec{t}\,)| \geq (1 + \|\lambda_k\|^{2\vec{b}})^{-\omega} \exp\left(-\theta \|\lambda_k\|^{2\vec{b}}\right). \tag{30}$$

Якщо $f \in C\left([0,T]; E^{\gamma_1}_{\alpha_0, 2\vec{b}}\right)$, $\varphi_j \in E^{\gamma_2}_{\alpha_0, 2\vec{b}}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *де* $\alpha_0 = \alpha + n + \omega$, $\gamma_1 = \gamma + \gamma_0 T + |\theta - (n-1)\delta t_1|$, $\gamma_2 = \gamma + \theta - (n-1)\delta t_1$, *то існує розв'язок задачі* (1)–(3) *з простору* $C^n\left([0,T]; E^{\gamma}_{\alpha, 2\vec{b}}\right)$, *який зображується рядом* (29) *і неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Доведення. Із формули (26) на підставі елементарної нерівності $(|a_1| + \ldots + |a_n|)^2 \leq n(|a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2)$ одержуємо

$$\left\|u; C^n([0,T]; E^{\gamma}_{\alpha, 2\vec{b}})\right\| = \sum_{s_0=0}^{n} \left(\sum_{|k'| \geq 0} \sum_{k_p=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |u_k^{(s_0)}(t)|^2 w^2_{\lambda_k}(\alpha; \gamma; 2\vec{b}) \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sum_{s_0=0}^{n} \left(\sum_{|k'| \geq 0} \sum_{k_p=1}^{\infty} \left(2n^2 \sum_{q=1}^{l(k)} \sum_{r_q=1}^{n_q(k)} \sum_{j=1}^{n} \frac{|\Delta_{j,q,r_q}(\lambda_k, \vec{t}\,)|^2}{|\Delta(\lambda_k, \vec{t}\,)|^2} |\varphi_{jk}|^2 \max_{0 \leq t \leq T} |u^{(s_0)}_{k,q,r_q}(t)|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. +2 \max_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \int_0^T G(t, \tau; \lambda_k) f_k(\tau) d\tau \right|^2 \right) w^2_{\lambda_k}(\alpha; \gamma; 2\vec{b}) \right)^{1/2}. \tag{31}$$

Оцінимо тепер зверху модулі величин $\Delta_{j,q,r_q}(\lambda_k, \vec{t}\,)$, $u^{(s_0)}_{k,q,r_q}(t)$ і $\dfrac{d^{s_0}}{dt^{s_0}} \displaystyle\int_0^T G(t, \tau; \lambda_k) f_k(\tau) d\tau$, які входять у (31). На підставі (19), (20) отримуємо формули

$$u^{(s_0)}_{k,1,r_1}(t) = \sum_{j=0}^{s_0} C^j_{s_0} \frac{(t^{r_1-1})^{(j)}}{(r_1-1)!} (\mu_1(\lambda_k))^{s_0-j} \exp\left(\mu_1(\lambda_k) t\right), \quad r_1 \in \{1, \ldots, n_1(k)\}, \tag{32}$$

$$u^{(s_0)}_{k,q,r_q}(t) = \int_0^1 \int_0^{\zeta_1} \ldots \int_0^{\zeta_{q-2}} \phi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{q-1}) \sum_{j=0}^{s_0} C^j_{s_0} (t^{\chi_{qr_q}(k)-1})^{(j)} \times$$

$$\times \left(\mu^{s_0-j} \exp\left(\mu t\right)\right)\Big|_{\mu = \mu_1(\lambda_k) + \sum_{j=2}^{q} (\mu_j(\lambda_k) - \mu_{j-1}(\lambda_k))\zeta_{j-1}} d\zeta_{q-1} \ldots d\zeta_1, \quad q \in \{2, \ldots, l(k)\}, \tag{33}$$

в яких $s_0 \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $r_q \in \{1, \ldots, n_q(k)\}$, $t \in [0,T]$. Враховуючи оцінки (13), (14), отримуємо, що для довільної точки $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{q-1})$, $q \in \{2, \ldots, l(k)\}$, симплекса $\mathcal{S}_q$ справджуються нерівності

$$\left| \mu_1(\lambda_k) + \sum_{j=2}^{q} (\mu_j(\lambda_k) - \mu_{j-1}(\lambda_k))\zeta_{j-1} \right| \leq |\mu_1(\lambda_k)|(1 - \zeta_1) + |\mu_2(\lambda_k)|(\zeta_1 - \zeta_2) + \ldots$$

$$\ldots + |\mu_{q-1}(\lambda_k)|(\zeta_{q-2} - \zeta_{q-1}) + |\mu_q(\lambda_k)|\zeta_{q-1} \leq C_3(1 + \|\lambda_k\|^{2\vec{b}}), \quad q \in \{2, \ldots, l(k)\}, \tag{34}$$

$$\operatorname{Re}\mu_1(\lambda_k)+\sum_{j=2}^{q}(\operatorname{Re}\mu_j(\lambda_k)-\operatorname{Re}\mu_{j-1}(\lambda_k))\zeta_{j-1}\le-\delta\|\lambda_k\|^{2\vec{b}},\quad q\in\{2,\ldots,l(k)\}. \tag{35}$$

На підставі формул (21), (33) та оцінок (34), (35) маємо

$$\max_{0\le t\le T}|u^{(s_0)}_{k,q,r_q}(t)|\le(\chi_{qr_q}(k)-1)!C_5\Phi w_{\lambda_k}(n;0;2\vec{b}), \tag{36}$$

де $r_q\in\{1,\ldots,n_q(k)\}$, $q\in\{2,\ldots,l(k)\}$, $s_0\in\{0,1,\ldots,n\}$, $C_5=(2^n-1)\times\times\max_{j\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\{T^j(C_3)^{n-j}\}$, а

$$\Phi=\int_0^1\int_0^{\zeta_1}\ldots\int_0^{\zeta_{q-2}}\phi(\zeta_1,\ldots,\zeta_{q-1})d\zeta_{q-1}\ldots d\zeta_1. \tag{37}$$

Інтегруючи в (37) частинами по кожній змінній, отримуємо

$$\Phi=((\chi_{qr_q}(k)-1)!)^{-1}. \tag{38}$$

Із (36) – (38) одержуємо

$$\max_{0\le t\le T}|u^{(s_0)}_{k,q,r_q}(t)|\le C_5w_{\lambda_k}(n;0;2\vec{b}),\ \ r_q\in\{1,\ldots,n_q(k)\},\ \ q\in\{2,\ldots,l(k)\},\ \ s_0\in\{0,1,\ldots,n\}. \tag{39}$$

Із формул (32) на підставі оцінок (13), (14) знаходимо

$$\max_{0\le t\le T}|u^{(s_0)}_{k,1,r_1}(t)|\le C_6w_{\lambda_k}(n;0;2\vec{b}),\quad r_1\in\{1,\ldots,n_1(k)\},\quad s_0\in\{0,1,\ldots,n\}, \tag{40}$$

де $C_6=(2^n-1)\max_{j\in\{0,1,\ldots,n-1\}}\{(C_3)^{n-j}T^j/j!\}$. Оскільки $\Delta_{j,q,r_q}(\lambda_k,\vec{t}\,)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, $q\in\in\{1,\ldots,l(k)\}$, $r_q\in\{1,\ldots,n_q(k)\}$, є алгебраїчним доповненням елемента $u_{k,q,r_q}(t_j)$ у визначнику $\Delta(\lambda_k,\vec{t}\,)$, то, враховуючи оцінки (39), (40), одержуємо

$$|\Delta_{j,q,r_q}(\lambda_k)|\le C_7w_{\lambda_k}(0;-(n-1)\delta t_1;2\vec{b}), \tag{41}$$

де $j\in\{1,\ldots,n\}$, $q\in\{1,\ldots,l(k)\}$, $r_q\in\{1,\ldots,n_q(k)\}$, $C_7=(n-1)!(C_5)^{n-1}$. Згідно з означенням та властивостями функції Гріна багатоточкової задачі (10), (11) (див. [19]) маємо

$$\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int_0^T G(t,\tau;\lambda_k)f_k(\tau)d\tau=\sum_{j=0}^{n}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{\partial^{s_0}G_j(t,\tau;\lambda_k)}{\partial t^{s_0}}f_k(\tau)d\tau+\delta_{s_0n}f_k(t),\quad s_0\in\{0,1,\ldots,n\}, \tag{42}$$

де δ_{s_0n} — символ Кронекера. Із формул (27), (28), (42) на підставі оцінок (15), (30), (39) – (41) знаходимо

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^{s_0}}{dt^{s_0}}\int_0^T G(t,\tau;\lambda_k)f_k(\tau)d\tau\right|\le C_8\overline{f}_kw_{\lambda_k}(n+\omega;\gamma_0T+|\theta-(n-1)\delta t_1|;2\vec{b}), \tag{43}$$

де $s_0\in\{0,1,\ldots,n\}$, $\overline{f}_k=\max_{0\le t\le T}|f_k(t)|$, $C_8=(n+1)TC_5(1+(C_4)^{-1}C_5C_7)/2+1$. Враховуючи оцінки (30), (39) – (41), (43), із (31) отримуємо

$$\left\|u;C^n([0,T];E^{\gamma}_{\alpha,2\vec{b}})\right\|\le C_9\left(\sum_{|k'|\ge0}\sum_{k_p=1}^{\infty}\overline{f}_k^2w^2_{\lambda_k}(\alpha+n+\omega;\gamma+\gamma_0T+|\theta-(n-1)\delta t_1|;2\vec{b})\right)^{1/2}+$$

$$+C_{10}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{|k'|\geq 0}\sum_{k_p=1}^{\infty}|\varphi_{jk}|^2 w^2_{\lambda_k}(\alpha+n+\omega;\gamma+\theta-(n-1)\delta t_1;2\vec{b})\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_{11}\left(\left\|f;C([0,T];E^{\gamma_1}_{\alpha_0,2\vec{b}})\right\|+\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j;E^{\gamma_2}_{\alpha_0,2\vec{b}})\right\|\right),$$

де $C_9=\sqrt{2}(n+1)C_8$, $C_{10}=\sqrt{2n^3}(n+1)C_5C_7$, $C_{11}=\max\{C_9;C_{10}\}$. Із останньої нерівності випливає доведення теореми.

5. Оцінки знизу малих знаменників. Дослідимо питання про можливість виконання нерівності (30). Для цього нам знадобиться наступна лема, доведена у [12].

Лема 1. *Нехай для квазімногочлена* $y(t)=\sum_{i=1}^{m}p_i(t)\exp(z_it)$, *в якому всі* $z_i\in\mathbb{C}$, $i\in\{1,\ldots,m\}$, *є різними,* $p_i(t)$ — *многочлен з комплексними коефіцієнтами степеня* n_i-1, $n_i\in\mathbb{N}$, $i\in\{1,\ldots,m\}$, *справджується умова*

$$|y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\ldots+a_ny(t)|\geq\delta_1>0\quad\forall t\in[a,c],$$

де a_i, $i\in\{1,\ldots,n\}$, — *деякі комплексні числа. Тоді для довільного* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1=\delta_1/((2n+2)A^n)$, $A=1+\max_{i\in\{1,\ldots,n\}}|a_i|^{1/i}$,

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\{t\in[a,c]\colon|y(t)|<\varepsilon\}\leq C_{12}N(\varepsilon/\delta_1)^{1/n},$$

$$N=1+\max_{i\in\{1,\ldots,m\}}\{|z_i|\},\qquad C_{12}=C_{12}(n,c-a,n_1,\ldots,n_m).$$

Позначимо $\widetilde{b}=\min\limits_{j\in\{1,\ldots,p\}}\{b_j\}$; $m_r(k):=n_1(k)+\ldots+n_r(k)$, $r\in\{1,\ldots,l(k)\}$, $m_0(k):=0$,

$$Z_q(\lambda_k):=1,\quad q\in\{1,\ldots,n_1(k)\},$$

$$Z_q(\lambda_k):=(\mu_j(\lambda_k)-\mu_1(\lambda_k))^{n_1(k)}\ldots(\mu_j(\lambda_k)-\mu_{j-1}(\lambda_k))^{n_{j-1}(k)},\quad q\in\{n_1(k)+1,\ldots,n\},\tag{44}$$

$$g_q(t,\lambda_k):=\exp(\mu_j(\lambda_k)t)t^{q-m_{j-1}(k)-1}/(q-m_{j-1}(k)-1)!,\quad q\in\{1,\ldots,n\},\tag{45}$$

$$P_q(\beta,\lambda_k):=\prod_{s=1}^{j-1}(\beta-\mu_s(\lambda_k))^{n_s(k)}(\beta-\mu_j(\lambda_k))^{q-m_{j-1}(k)},\quad q\in\{1,\ldots,n\}.\tag{46}$$

У рівностях (44)–(46) індекс $j:=j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k)<q\leq m_j(k)$; $H(\lambda_k,\vec{t}\,)=\det\left\|g_r(t_j,\lambda_k)\right\|^{r\in\{1,\ldots,n\}}_{j\in\{1,\ldots,n\}}$, $\vec{\tau}_q=(t_1,\ldots,t_q)$, $q\in\{1,\ldots,n\}$, причому $\vec{\tau}_n=\vec{t}$, $H_q(\lambda_k,\vec{\tau}_q\,)=\det\left\|g_r(t_j,\lambda_k)\right\|^{r\in\{1,\ldots,q\}}_{j\in\{1,\ldots,q\}}$.

Теорема 3. *Для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\vec{t}\in[0,T]^n$ *нерівність* (30) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\lambda_k\in\mathcal{W}$ *при* $\omega>n(n-1)(1+p/\widetilde{b})/2$ *і* $\theta=n\gamma_0T$.

Доведення. Згідно з лемою Бореля–Кантеллі [20, с. 13], для доведення теореми досить показати, що при $\omega=n(n-1)(1+p/(2\widetilde{b}))/2+e$, $e>0$, і $\theta=n\gamma_0T$ ряд

$$\sum_{|k'|\geq 0}\sum_{k_p=1}^{\infty}\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n}W^{\theta}_{\omega}(\lambda_k),\tag{47}$$

де $W^{\theta}_{\omega}(\lambda_k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n \colon |\Delta(\lambda_k, \vec{t}\,)| < (1+\|\lambda_k\|^{2\vec{b}})^{-\omega} \exp(-\theta\|\lambda_k\|^{2\vec{b}})\}$, є збіжним. Розглянемо множини

$$V(\lambda_k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n \colon |H(\lambda_k, \vec{t}\,)| < \rho_n(\lambda_k)\},$$

$$V_q(\lambda_k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n \colon |H_q(\lambda_k, \vec{\tau}_q\,)| < \rho_q(\lambda_k), |H_{q-1}(\lambda_k, \vec{\tau}_{q-1}\,)| \geq \rho_{q-1}(\lambda_k)\}, \quad q \in \{2,\ldots,n\},$$

де

$$\rho_q(\lambda_k) = w_{\lambda_k}(-q(q-1)(1+p/(2\widetilde{b}))/2 - e(q-1)/(n-1); -q\gamma_0 T; 2\vec{b}) \prod_{j=1}^{q} |Z_j(\lambda_k)|, \quad q \in \{1,\ldots,n\}.$$

Із (24), (44) випливає, що $\Delta(\lambda_k, \vec{t}\,) = H(\lambda_k, \vec{t}\,) \prod_{j=1}^{n} Z_j^{-1}(\lambda_k)$, $\lambda_k \in \mathcal{W}$. Тому ряд (47) збігається тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд

$$\sum_{|k'|\geq 0} \sum_{k_p=1}^{\infty} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V(\lambda_k). \tag{48}$$

Встановимо збіжність ряду (48). Зауважимо, що

$$V(\lambda_k) \subset \bigcup_{q=2}^{n} V_q(\lambda_k), \quad \lambda_k \in \mathcal{W}. \tag{49}$$

На підставі (49) та адитивності міри Лебега маємо

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V(\lambda_k) \leq \sum_{q=2}^{n} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V_q(\lambda_k). \tag{50}$$

Згідно з теоремою Фубіні [21, с. 119]

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} V_q(\lambda_k) = \int\limits_{[0,T]^{n-1}} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} V_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) dt_1 \ldots dt_{q-1} dt_{q+1} \ldots dt_n, \tag{51}$$

де $V_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n) = \{t_q \in [0,T] \colon \vec{t} \in V_q(\lambda_k)\}$, $q \in \{2,\ldots,n\}$.

Для оцінки зверху міри Лебега множин $V_q(\lambda_k; t_1, \ldots, t_{q-1}, t_{q+1}, \ldots, t_n)$, $q \in \{2,\ldots,n\}$, $\lambda_k \in$ $\in \mathcal{W}$, застосуємо лему 1. Зауважимо, що функція $H_q(\lambda_k, \vec{\tau}_q)$, $q \in \{2,\ldots,n\}$, як функція змінної t_q (при фіксованих $t_1, \ldots, t_{q-1}$), є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $C_3 T(1 + \|\lambda_k\|^{2\vec{b}})$; крім того, з розвинення визначника $H_q(\lambda_k, \vec{\tau}_q)$, $q \in \{2,\ldots,n\}$, за елементами останнього рядка та (46) випливають рівності

$$P_{q-1}(\partial/\partial t_q, \lambda_k) H_q(\lambda_k, \vec{\tau}_q\,) = \exp(\mu_j(\lambda_k) t_q) H_{q-1}(\lambda_k, \vec{\tau}_{q-1}\,) Z_q(\lambda_k), \quad q \in \{2,\ldots,n\}, \tag{52}$$

де індекс $j := j(q)$ однозначно визначається з умови $m_{j-1}(k) < q \leq m_j(k)$.

Якщо $\vec{t} \in V_q(\lambda_k)$, $q \in \{2,\ldots,n\}$, то з формул (52), на підставі оцінок (15) та означення множин $V_q(\lambda_k)$, отримуємо

$$\left| P_{q-1}(\partial/\partial t_q, \lambda_k) H_q(\lambda_k, \vec{\tau}_q\,) \right| \geq \rho_1(\lambda_k) \rho_{q-1}(\lambda_k) |Z_q(\lambda_k)| \quad \forall t_q \in [0,T], \quad q \in \{2,\ldots,n\}. \tag{53}$$

Очевидно, що для кожного $q \in \{2,\ldots,n\}$ степінь многочлена $P_{q-1}(\beta, \lambda_k)$ за змінною β дорівнює $q-1$, а модуль коефіцієнта при β^{q-j-1}, $j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, в цьому многочлені не перевищує $C_{13}(1+\|\lambda_k\|^{2\vec{b}})^j$, де $C_{13}=C_{13}(n,C_3)$. Тому на підставі леми 1 з оцінок (53) отримуємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}} V_q(\lambda_k;t_1,\ldots,t_{q-1},t_{q+1},\ldots,t_n) \le C_{14}(1+\|\lambda_k\|^{2\vec{b}}) \sqrt[q-1]{\frac{\rho_q(\lambda_k)}{\rho_1(\lambda_k)\rho_{q-1}(\lambda_k)|Z_q(\lambda_k)|}} \le$$

$$\le C_{14}(1+\|\lambda_k\|^{2\vec{b}})^{-p/(2\widetilde{b})-\widetilde{e}}, \quad q\in\{2,\ldots,n\}, \tag{54}$$

де $C_{14}=C_{14}(n,T,\gamma_0)$, $\widetilde{e}=e/(n-1)^2$. На підставі (50), (51) і (54) маємо

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} V(\lambda_k) \le \sum_{q=2}^{n} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} V_q(\lambda_k) \le (n-1)C_{14}T^{n-1}(1+\|\lambda_k\|^{2\vec{b}})^{-p/(2\widetilde{b})-\widetilde{e}}. \tag{55}$$

Оскільки, згідно з оцінками (6), $(1+\|\lambda_k\|^{2\vec{b}})^{-1} \le (C_1)^{-b_p}(1+\|k\|^{2\vec{b}})^{-1} \le C_{15}(1+|k|)^{-2\widetilde{b}}$, де $C_{15}=C_{15}(C_1,p)$, то на підставі (55) одержуємо

$$\sum_{|k'|\ge 0}\sum_{k_p=1}^{\infty} \mathrm{mes}_{\mathbb{R}^n} V(\lambda_k) \le C_{16} \sum_{|k'|\ge 0}\sum_{k_p=1}^{\infty} (1+|k|)^{-(p+2\widetilde{b}\widetilde{e})} < \infty,$$

де $C_{16}=(n-1)C_{14}C_{15}T^{n-1}$.

Теорему доведено.

З теорем 2, 3 випливає таке твердження.

Теорема 4. *Нехай справджується умова* (25), $f \in C\left([0,T];E^{\gamma_1}_{\alpha_0,2\vec{b}}\right)$, $\varphi_j \in E^{\gamma_2}_{\alpha_0,2\vec{b}}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_0 > \alpha+n+n(n-1)(1+p/(2\widetilde{b}))/2$, $\gamma_1=\gamma+(n+1)\gamma_0T-(n-1)\delta t_1$, $\gamma_2=\gamma_1-\gamma_0 T$. *Для майже всіх* (*щодо міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\vec{t}\in[0,T]^n$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *з простору* $C^n\left([0,T];E^{\gamma}_{\alpha,2\vec{b}}\right)$, *який зображується рядом* (29) *і неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(t,x)$, $j\in\{1,\ldots,n\}$.

Зауваження. У деяких випадках нерівність (30) справджується для довільного вектора $\vec{t}\in S_T$. Покажемо це на прикладі задачі з умовами (2), (3) для рівняння

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{r=1}^{p-1}(-1)^{b_r}\frac{\partial^{2b_r}}{\partial x_r^{2b_r}} + (-1)^{b_p}\mathcal{B}_\nu^{b_p}\right)^n u(t,x)=0, \quad (t,x)\in D. \tag{56}$$

У випадку задачі (2), (3), (56) відповідний визначник $\Delta(\lambda_k,\vec{t}\,)$ визначається формулою

$$\Delta(\lambda_k,\vec{t}\,) = \prod_{r=1}^{n-1}(r!)^{-1} \prod_{1\le q<r\le n}(t_r-t_q)\exp\left(-(t_1+\ldots+t_n)\|\lambda_k\|^{2\vec{b}}\right). \tag{57}$$

Легко бачити, що для визначника (57) нерівність (30) справджується для всіх векторів $\lambda_k\in\mathcal{W}$ і довільного $\vec{t}\in S_T$ при $\omega=0$ і $\theta=nT$.

Результати роботи можна поширити на системи B-параболічних рівнянь вигляду (1).

1. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 463 с.
2. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. *Конаков П. К., Веревочкин Т. Е.* Тепломассообмен при получении монокристаллов. – М.: Металлургия, 1971. – 387 с.
4. *Городецький В. В., Ленюк О. М.* Двоточкова задача для одного класу еволюційних рівнянь // Мат. ст. – 2007. – **28**, № 2. – С. 175 – 182.

5. *Mesloub S.* On a singular two dimensional nonlinear evolution equation with nonlocal conditions // Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl. – 2008. – **68**, № 9. – P. 2594 – 2607.
6. *Bouziani A.* On thee-point boundary value problem with a weighted integral condition for a classe of singular parabolic equations // Abstr and Appl. Anal. – 2002. – **7**, № 10. – P. 517 – 530.
7. *Denche M., Marhoune A. L.* A thee-point boundary value problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operators // Appl. Math. Lett. – 2000. – **13**. – P. 85 – 89.
8. *Лавренчук В. П.* Деякі нелокальні задачі для параболічного рівняння другого порядку з оператором Бесселя // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. праць. – Чернівці, 1990. – С. 111 – 119.
9. *Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для $2\vec{B}$-параболічного рівняння // Третя міжн. конф. молодих вчених, присвячена Я. Б. Лопатинському „Диференціальні рівняння та їх застосування” (Львів, 3 – 6 жовтня 2010 р.): Тез. доп. – Донецьк, 2010. – С. 89 – 91.
10. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
11. *Пташник Б. Й., Галун К. С.* Багатоточкова задача для факторизованих гіперболічно-параболічних операторів // Доп. НАН України. – 2009. – № 11. – С. 33 – 38.
12. *Пташник Б.Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241 – 254.
13. *Пташник Б. Й., Тимків І. Р.* Багатоточкова задача для параболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 1. – С. 15 – 26.
14. *Силюга Л. П.* Багатоточкова задача для параболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 42 – 48.
15. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40 – 43.
16. *Левитан Б. М.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – **6**, № 2(42). – С. 102 – 143.
17. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.
18. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
19. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – xiv+308 с.
20. *Спринжук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 143 с.
21. *Дороговцев А. Я.* Элементы общей теории меры и интеграла. – Киев: Вища шк., 1989. – 152 с.

Одержано 06.07.12