УДК 517.9

**В. І. Скрипник** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ПРО ГОЛОМОРФНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ РУХУ ДАРВІНА ТОЧКОВИХ ЗАРЯДІВ

The existence of holomorphic (in time) solutions of the nonrelativistic Darwin equations of motion of point charges is proved with the help of the Cauchy theorem.

На основании теоремы Коши доказано существование голоморфных по времени решений нерелятивистских уравнений Дарвина движения точечных зарядов.

Будемо розглядати лагранжеву нерелятивістську динаміку Дарвіна

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t)}{\partial v_j} = \frac{\partial L(t)}{\partial x_j}, \quad j \in (n) = (1, \ldots, n),$$

$n$ нерелятивістських точкових зарядів, що характеризуються координатами $x_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3) \in \in \mathbb{R}^3$, швидкостями $\frac{dx_j}{dt} = \dot{x}_j = v_j = (v_j^1, v_j^2, v_j^3) \in \mathbb{R}^3$, залежними від часу $t$, та лагранжіаном $L(t)$, залежним від $x_{(n)}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$:

$$L(t) = L^1(t) - U(x_{(n)}),$$

$$U(x_{(n)}) = \frac{1}{2}\sum_{j \neq k = 1}^{n} e_k e_j |x_k(t) - x_j(t)|^{-1},$$

$$L^1(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{2}|v_j(t)|^2 + \sum_{j \neq k=1}^{n} e_k e_j (2c)^{-2}[(v_j(t), v_k(t))|x_k(t) - x_j(t)|^{-1} +$$

$$+ |x_k(t) - x_j(t)|^{-3}(v_j(t), x_k(t) - x_j(t))(v_k(t), x_k(t) - x_j(t))],$$

де $(x_k, x_k) = |x_k|^2 = (x_k^1)^2 + (x_k^2)^2 + (x_k^3)^2$ та $m_j$, $e_j$, — відповідно маси та заряди точкових зарядів (заряджених частинок). Енергія зарядів $H = L^1(t) + U(x_{(n)})$ зберігається у часі (див. розділ 41 в [1]).

Очевидно, що

$$L^1(t) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\sum_{\alpha,\beta}^{3} K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) v_j^{\alpha} v_k^{\beta},$$

де

$$K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) = m_j \delta_{j,k}\delta_{\alpha,\beta} + (1 - \delta_{j,k})(2c^2)^{-1} e_j e_k [\delta_{\alpha,\beta}|x_k(t) - x_j(t)|^{-1} +$$

$$+ |x_k(t) - x_j(t)|^{-3}(x_j^{\alpha}(t) - x_k^{\alpha}(t))(x_k^{\beta}(t) - x_j^{\beta}(t))], \quad x_j^{\alpha}, v_j^{\alpha} \in \mathbb{R},$$

та $\delta_{a,b}$ — символ Кронекера.

Рівняння нерелятивістської динаміки Дарвіна, як і у випадку релятивістської динаміки, виводяться формально [2] з лагранжіана для електромагнітних потенціалів та швидкостей точкових зарядів фундаментальної моделі Максвелла – Лоренца з допомогою розкладу електромагнітних потенціалів за степенями оберненої швидкості світла, яка є малим параметром. Цей лагранжіан так само розкладається за степенями оберненої швидкості світла. Його нульове наближення збігається з кулонівським лагранжіаном. Доданок з першим степенем $c^{-1}$ збігається з часовою похідною повного заряду системи і є нулем. Доданок з $c^{-2}$ збігається з лагранжіаном Дарвіна, що породжує сили, залежні від швидкостей, і є аналогом гравітаційного лагражіана, наведеного в [3]. Ці сили ускладнюють рівняння руху та асоційований гамільтоніан для зарядів:

$$-\frac{\partial L(t)}{\partial x_j^\alpha}+\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t)}{\partial v_j^\alpha}=\sum_{\beta=1}^{3}\sum_{k=1}^{n}K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)})\dot{v}_k^\beta-G_{j,\alpha}(x_{(n)};v_{(n)})=0,\quad j\in(n), \tag{1}$$

$$G_{j,\alpha}(x_{(n)};v_{(n)})=\frac{\partial L(t)}{\partial x_j^\alpha}-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t)}{\partial v_j^\alpha}\right)(x_{(n)};v_{(n)}),\quad x_{(n)}=(x_1,\ldots,x_n). \tag{1'}$$

Слід зазначити, що другий доданок у правій частині останньої рівності не містить прискорення зарядів. Нехтуючи доданками, що залежать від вищих степенів $c^{-1}$, у співвідношенні між імпульсами та швидкостями частинок, тобто використовуючи їх звичайне співвідношення, отримуємо наближений (апроксимований) гамільтоніан Дарвіна, наведений у [2]. Зауважимо, що математично строгий вивід наближення Дарвіна з перенормованими масами зарядів, запропонований у [4], справджується на довгому проміжку часу, на якому немає зіткнень між зарядами. При цьому використовується процедура регуляризації рівнянь руху (початкові відстані між зарядами повинні бути великими).

У статті автора [5] доведено існування голоморфних за часом розв'язків рівнянь руху, породжених апроксимованим гамільтоніаном Дарвіна. У даній статті ми отримаємо подібний результат для рівнянь Дарвіна (1). Радіус круга голоморфності отриманих розв'язків швидко зменшується зі збільшенням числа зарядів, і водночас початкові відстані між зарядами можуть бути малими (масштаб визначається швидкістю світла), але такими, що не допускають зіткнення між ними.

При доведенні будемо використовувати комплексні координати, швидкості зарядів та позначення

$$[n]=n,\quad \left[n\frac{k}{l}\right]=n+1,\quad k<l,\quad n+1,k,l\in\mathbb{Z}^+,\quad m_+=\max_j m_j,\quad \bar{e}=\max_j e_j,$$

$$D_n(r;\xi)=\{x_j\colon |x_j-\xi_j|_0\le r,\ x_j,\xi_j\in\mathbb{C},\ j=1,\ldots,n\},\quad (x,y)=\sum_{j=1}^{n}xy_j^*,$$

$$|x|^2=(x,x),\quad (x,y)_*=(x,y^*),\quad |x|_*^2=(x,x^*),$$

де зірочка у верхньому індексі означає комплексне спряження. Якщо змінні мають верхній індекс, то скалярний добуток буде містити додаткову суму по ньому та $|x_j|_0=\max_s|x_j^s|$.

Основним результатом статті є теореми 1, 3.

**Теорема 1.** *Нехай* $\{a_l, b_l \in \mathbb{R}^3 \colon |a_j - a_l| \geq r_1, j, l = 1, \ldots, n\}$, $|b_j|_0 \leq r_2$ *та*

$$R_*(c^2 r_1) = \prod_{l=1}^{n} m_l^3 - \sum_{s=0}^{3n-2} \sum_{j_k \neq j_l} \prod_{l=1}^{s} m_{[\frac{j_l}{3}]}((3n-s)!) r'^{3n-s} > 0,$$

*де підсумовування у другій сумі проводиться за індексами* $j_k \in (3n)$, $k = 1, \ldots, s$, $r' = (c^2 r_1)^{-1} \kappa_* \bar{e}^2$, $\kappa_* = \sqrt{\kappa_2}(1 + \kappa_0 \kappa_2)$, $\kappa_2^{-1} = (1 - 2\sqrt{3}\kappa)^2 - 24\kappa^2 > 0$, $\kappa_0 = 2\kappa + 1$. *Тоді існує розв'язок* $(x_j(t); v_j(t)) \in \mathbb{R}^{6n}$ *рівняння Дарвіна* (1) *для початкових даних* $(x_j(t_0) = a_j, v_j(t_0) = b_j, t_0 \geq 0)$ *такий, що*

$$(x_j(t); v_j(t)) \in D_{3n}(r; a) \times D_{3n}(r; b) = D_{6n}(r; a, b), \quad r = \kappa r_1, \tag{2}$$

*та* $x_j(t), v_j(t)$ *є голоморфними функціями* $t$ *в диску* $|t - t_0| < T = r((6n+1)M)^{-1}$, $M = \max(M' M'' n (3n)!, \kappa r_1 + r_2)$,

$$M' = (\max(m_+, r')^{3n-1} R_*^{-1}(c^2 r_1), \quad M'' = \bar{e}^2 r_1^{-2}[\eta_0 + c^{-2}\eta_1(\kappa r_1 + r_2)^2],$$

*де* $\eta_j$ — *додатні поліноми* $\sqrt{\kappa_2}$, $\kappa$, *що не залежать від* $c$.

***Зауваження* 1.** Для розв'язків (1) виконується нерівність

$$|x_j(t) - x_l(t)|_0 \geq |a_j - a_l|_0 - |x_j(t) - a_j|_0 - |x_l(t) - a_l|_0 \geq (1 - 2\kappa) r_1.$$

Це означає, що зіткнень між частинками немає при $\kappa < \dfrac{1}{2}$. Умова обмеженості $\kappa_2$ є більш сильною: $\kappa < \dfrac{1}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}$.

Ця теорема випливає з теореми Коші [6] про існування голоморфних розв'язків $n$-вимірних звичайних диференціальних рівнянь з голоморфним векторним полем після редукції рівнянь Дарвіна (1) до системи звичайних диференціальних рівнянь. Теорема Коші формулюється таким чином.

**Теорема 2.** *Нехай система* $n$*-вимірних звичайних диференціальних рівнянь*

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x_{(n)}), \quad j = 1, \ldots, n, \quad x_{(n)} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq t_0, \tag{3}$$

*визначається функціями* $f_j$, *які є голоморфними функціями змінних* $x_j$ *в* $D_n(r; \xi)$ *та рівномірно обмежені*: $|f_j| \leq M$. *Тоді розв'язок* $x_j(t)$ (3) *для початкових даних* $\xi_j = x_j(t_0)$ *є голоморфною функцією* $t$ *у диску* $|t - t_0| < T = r((n+1)M)^{-1}$ *та належить* $D_n(r; \xi)$.

***Зауваження* 2.** Ця теорема справджується, якщо $f_j$ в (3) є голоморфними функціями $t, x_{(n)}$ [7]. Можна сподіватись на ослаблення залежності $T$ від $n$ в теоремі 2, використавши більш сильний варіант теореми Коші з [8], в якому залежність $T$ від $n$ виражається тільки через залежність евклідівської норми $f_{(n)}$ від $n$.

Сформулюємо теорему — аналог об'єднання теорем 3.1 та 3.3 з [5], яка є наслідком теореми 1 і в якій ми накладемо умови на початкові значення координат та імпульсів $a_k, b_k$ з допомогою умов на потенціальні енергії в початковий момент $U^+, U^-$ відповідно зарядів одного та різних знаків ($U = U^+ - U^-$), а також зафіксуємо значення енергії $H$. При цьому ми виразимо $r_1$, $r_2$ через сталі $C, |h|$ такі, що

$$\max\left(U^+(a_{(n)}), U^-(a_{(n)})\right) \le C, \quad H = h \in \mathbb{R}. \tag{$3'$}$$

Теорема 3 є аналогом твердження, доведеного в розділі 5 монографії [6].

**Теорема 3.** *Нехай* $e_- = \min e_s, m_- = \min m_s$ *і виконується та ж умова на* $R_*$, *що і в теоремі* 1.

I. *Якщо виконується перша умова* $(3')$ *і* $r_1 = \dfrac{e_-^2}{C}$, *то висновок теореми* 1 *є справедливим.*

II. *Якщо виконуються обидві умови в* $(3')$ *та* $\dfrac{1}{2m_-} > \dfrac{n\bar{e}^2 C}{2c^2 e_-^2}$, *то висновок теореми* 1 *є справедливим при* $r_1 = \dfrac{e_-^2}{C}$, $r_2 = \sqrt{R_+}$, $R_+ = (|h| + C)\left(\dfrac{1}{2m_-} - \dfrac{n\bar{e}^2 C}{2c^2 e_-^2}\right)^{-1}$.

Доведення цієї теореми легко випливає з міркувань розділу 3 в [5]. Ми наведемо його в кінці статті.

Застосування теореми Коші до рівнянь Дарвіна вимагає перенумерування змінних з допомогою відображення $(n) \times (3) \to (3n)$: $(j, \alpha) \to 3(j-1) + \alpha$. Тоді в лагранжіані та рівнянні руху необхідно виконати заміни

$$e_j \to e'_j = e_{[\frac{j}{3}]}, \quad m_j \to m'_j = m_{[\frac{j}{3}]}, \quad x_j \to x'_j = x_{[\frac{j}{3}]}^{[j]_3}, \quad v_j \to v'_j = v_{[\frac{j}{3}]}^{[j]_3},$$

де

$$[j]_l = l\left(\frac{j}{l} - \left[\frac{j}{l}\right] + 1\right), \quad [nl + k]_l = k, \quad k \le l.$$

Таким чином, рівняння (1) перетворюється у рівняння

$$\sum_{k=1}^{3n} K_{j,k}(x'_{(3n)})\dot{v'}_k = G_j(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}), \quad j \in (3n), \tag{4}$$

$$\dot{x'}_j = v'_j, \quad \dot{v'}_j = \sum_{k=1}^{3n} K_{j,k}^{(-1)}(x'_{(3n)}) G_k(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}) = V_j(x'_{(3n)}; v'_{(3n)}), \tag{5}$$

де матриця $K_{j,k}^{(-1)}$ є оберненою до матриці $K_{j,k}$. При цьому нескладно ототожнити рівняння (3) та (5). Очевидно, що

$$K_{j,k}(x'_{(3n)}) = m'_j \delta_{j,k} + (1 - \delta_{[\frac{j}{3}],[\frac{k}{3}]}) K'_{j,k}(x'_{(3n)}).$$

Для застосування теореми Коші необхідно довести, що $K_{j,k}^{(-1)}$ є голоморфною функцією $(x', v')_{(3n)}$ в області $D_{6n}(r; a, b)$, визначеною в теоремі 1. Це ми зробимо з допомогою леми 1, для формулювання якої необхідно ввести наступні норми:

$$|G|_D = \max_{j,\alpha} \sup_{(x,v)_{(n)} \in D_{6n}(r;a,b)} |G_{j,\alpha}(x_{(n)}; v_{(n)})| = \max_j \sup_{(x',v')_{(3n)} \in D_{6n}(r;a,b)} |G_j(x'_{(3n)}; v'_{(3n)})|,$$

$$|K|_D = \max_{j,\alpha;k,\beta} \sup_{x_{(n)} \in D_{3n}(r;a)} |K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)})| = \max_{j,k} \sup_{x'_{(3n)} \in D_{3n}(r;a)} |K_{j,k}(x'_{(3n)})|,$$

$$|K'|_D = \max_{j\neq k} \sup_{x'_{(n)}\in D_{3n}(r;a)} |K_{j,k}(x'_{(3n)})| = \max_{j,\alpha;k,\beta;j\neq k} \sup_{x_{(n)}\in D_{3n}(r;a)} |K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)})|.$$

Легко бачити, що

$$|K|_D = \max(m_+, |K'|_D), \quad |V|_D \le 3n|G|_D|K^{(-1)}|_D, \tag{6}$$

де $|K^{-1}|_D$, $|V|_D$ визначаються так само, як $|K|_D$.

**Лема 1.** *Нехай* $(x_j; v_j) \in D_{6n}(r; a, b)$ *та для* $a$, $b$ *виконуються умови теореми* 1, *тоді*

$$|K^{-1}|_D \le (3n-1)!M', \quad |G|_D \le nM''.$$

$K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)})$, $G_{j,\alpha}(x_{(n)}; v_{(n)})$ є голоморфними функціями в $D_{6n}(r; a, b)$, тому лема 1 доводить, що $V_j$ в (5) є голоморфними функціями в $D_{6n}(r; a, b)$, якщо $R_*(c^2r_1) > 0$. Нерівність для $V_D$ в (6) та лема 1 доводять теорему 1, оскільки перша частина векторного поля рівняння Дарвіна $\dot{x}_j = v_j$ рівномірно обмежена зверху $r + r_2$.

Для доведення леми 1 необхідно знайти явний вигляд функцій у рівнянні Дарвіна (1):

$$\frac{\partial L(t)}{\partial x_j} = e_j \sum_{k=1,k\neq j}^{n} e_k \left\{ \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|^3}[1 - (2c^2)^{-1}(v_j(t), v_k(t))] - \right.$$

$$-3(2c^2)^{-1}|x_k(t) - x_j(t)|^{-5}(x_j(t) - x_k(t))(v_j(t), x_k(t) - x_j(t))(v_k(t), x_k(t) - x_j(t)) -$$

$$\left. -(2c^2)^{-1}|x_k(t) - x_j(t)|^{-3}[v_j(t)(v_k(t), x_k(t) - x_j(t)) + v_k(t)(v_j(t), x_k(t) - x_j(t))] \right\},$$

$$\frac{\partial L(t)}{\partial v_j} = m_j v_j + (2c^2)^{-1} e_j \sum_{k=1,k\neq j}^{n} e_k \{v_k(t)|x_k(t) - x_j(t)|^{-1} +$$

$$+|x_k(t) - x_j(t)|^{-3}(x_k(t) - x_j(t)(v_k(t), x_k(t) - x_j(t))\},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t)}{\partial v_j} = m_j \dot{v}_j + (2c^2)^{-1} e_j \sum_{k=1,k\neq j}^{n} e_k \{\dot{v}_k(t)|x_k(t) - x_j(t)|^{-1} +$$

$$+v_k(t)|x_k(t) - x_j(t)|^{-3}(v_j(t) - v_k(t), x_k(t) - x_j(t)) +$$

$$+|x_k(t) - x_j(t)|^{-3}[(x_k(t) - x_j(t))(\dot{v}_k(t), x_k(t) - x_j(t)) +$$

$$+(v_k(t) - v_j(t))(v_k(t), x_k(t) - x_j(t)) + (x_k(t) - x_j(t))(v_k(t), v_k(t) - v_j(t))] +$$

$$+3|x_k(t) - x_j(t)|^{-5}(x_j(t) - x_k(t))(v_j(t) - v_k(t), x_j(t) - x_k(t))(v_k(t), x_k(t) - x_j(t))\}.$$

***Доведення леми* 1.** Відомо [9], що

$$K^{(-1)}_{j,k}(x'_{(3n)}) = (-1)^{j+k}(\mathrm{Det}\, K)^{-1}(\mathrm{Det}\, K^-_{j,k})(x'_{(3n)}),$$

де $K^-_{j,k}$ — матриця $K$ з викресленими $j$-м стовпчиком та $k$-м рядком. Крім того,

$$\operatorname{Det} K = \sum_{\sigma\in\pi^0_{(3n)}} (-1)^{|\sigma|}\prod_{j=1}^{3n} K_{j,\sigma j} = \sum_{s=0}^{3n-2}\sum_{j_k\neq j_l}\prod_{l=1}^{s} m'_{j_l}\sum_{\sigma\in\pi'_{(3n)\setminus j_{(s)}}}(-1)^{|\sigma|}\prod_{j'=1}^{3n-s}K_{j',\sigma j'}.$$

Тут $\pi^0_{(3n)}$ — множина перестановок множини $(3n)$, $\pi'_{(3n)\setminus j_{(s)}} = \pi'_{(3n)\setminus(j_1,\ldots,j_s)}$ — множина перестановок, яка змінює всі елементи множини $(3n)\setminus j_{(s)}$, та $|\sigma|$ — парність перестановки (кількість інверсій), тобто кількість пар, у яких на першому місці розташовані елементи $\sigma j$, а на другому — $j', j, j' \in (n)$ та $\sigma j > j'$ . Очевидно, що виконуються нерівності

$$\operatorname{Det} K \geq \prod_{l=1}^{3n} m'_l - \sum_{s=0}^{3n-2}\sum_{j_k\neq j_l}\prod_{l=1}^{s} m'_{j_l}((3n-s)!)|K'|_D^{3n-s}, \tag{6'}$$

$$\operatorname{Det} K \leq (3n)!|K|_D^{3n}, \tag{7}$$

$$|\operatorname{Det} K^-_{j,k}(x'_{(3n)})| \leq (3n-1)!|K|_D^{3n-1}. \tag{8}$$

У комплексних змінних маємо

$$K_{j,\alpha;k,\beta}(x_{(n)}) = (2c^2)^{-1}e_je_k[\delta_{\alpha,\beta}|x_k(t)-x_j(t)|_*^{-1}+$$

$$+|x_k(t)-x_j(t)|_*^{-3}(x_j^\alpha(t)-x_k^\alpha(t))(x_k^\beta(t)-x_j^\beta(t))], \quad j\neq k, \quad x_j^\alpha\in\mathbb{C}.$$

Виконуються наступні нерівності:

$$|x_k-x_l|_0 \leq |x_k-a_k|_0+|x_l-a_l|_0+|a_k-a_l| \leq 2\kappa r_1+|a_k-a_l| \leq \kappa_0|a_k-a_l|, \quad \kappa_0 = 2\kappa+1, \tag{9}$$

$$|x_k-x_l| \leq \sqrt{3}|x_k-x_l|_0 \leq \kappa_1|a_k-a_l|, \quad \kappa_1 = \sqrt{3}(2\kappa+1). \tag{10}$$

Покладемо $x_k - a_k + a_l - x_l = x_{k,l}$. Тоді, беручи до уваги рівність $|x|^2 = |x^2|$, $x\in\mathbb{C}$, легко бачити, що

$$\frac{1}{2}|x_{k,l}|^2 \leq |x_k-a_k|^2+|x_l-a_l|^2 \leq$$

$$\leq 3|x_k-a_k|_0^2+3|x_l-a_l|_0^2 \leq 6\kappa^2r_1^2 \leq 6\kappa^2|a_k-a_l|^2.$$

Таким чином, ми отримуємо уточнену нерівність у формулі (16) із розділу 5.I в [8] (незначна відмінність у виразі для $\kappa_2$ в [5] пояснюється відсутністю коефіцієнта $\frac{1}{2}$ перед $|x_{k,l}|^2$ в останній нерівності):

$$||x_k-x_l|_*^2| \geq |a_k-a_l|^2-2|a_k-a_l||x_{k,l}|-|x_{k,l}|^2 \geq \kappa_2^{-1}|a_k-a_l|^2. \tag{11}$$

Нерівності (9)–(11) відіграють важливу роль у доведенні леми 1.

Враховуючи, що $||x_j-x_k|_*^3| = |(|x_j-x_k|_*^2)^{\frac{3}{2}}| = ||x_j-x_k|_*^2|^{\frac{3}{2}}$, отримуємо

$$\frac{|x_j-x_k|_0^2}{||x_j-x_k|_*^3|} \leq \kappa_0^2\kappa_2^{\frac{3}{2}}|a_k-a_j|^{-1} \leq \kappa_0\kappa_2^{\frac{3}{2}}r_1^{-1}.$$

Далі, враховуючи рівності $||x_j - x_k|_*| = |(|x_j - x_k|_*^2)^{\frac{1}{2}}| = ||x_j - x_k|_*^2|^{\frac{1}{2}}$, одержуємо

$$\frac{1}{||x_j - x_k|_*|} \leq \kappa_2^{\frac{1}{2}} |a_k - a_j|^{-1} \leq \kappa_2^{\frac{1}{2}} r_1^{-1}. \tag{12}$$

Отже,

$$|K'|_D \leq (2c^2)^{-1} \bar{e}^2 \sqrt{\kappa_2}(1 + \kappa_0 \kappa_2) r_1^{-1} = (2c^2 r_1)^{-1} \kappa_* \bar{e}^2. \tag{13}$$

В комплексних змінних маємо

$$\frac{\partial L(t)}{\partial x_j} = e_j \sum_{k=1, k\neq j}^{n} e_k \left\{ \frac{x_j - x_k}{|x_j - x_k|_*^3} [1 - (2c^2)^{-1}(v_j(t), v_k(t))_*] - \right.$$

$$-(2c^2)^{-1} 3 |x_k(t) - x_j(t)|_*^{-5} (x_j(t) - x_k(t))(v_j(t), x_k(t) - x_j(t))_* (v_k(t), x_k(t) - x_j(t))_* -$$

$$\left. -(2c^2)^{-1} |x_k(t) - x_j(t)|_*^{-3} [v_j(t)(v_k(t), x_k(t) - x_j(t))_* + v_k(t)(v_j(t), x_k(t) - x_j(t))_*] \right\}.$$

Для оцінювання другого та третього доданків у правій частині останньої рівності застосуємо оцінки з урахуванням умов теореми 1 для $b$:

$$|v_k|_0 \leq r + r_2, \quad |(v_j, v_k)_*| \leq |v_j||v_k| = |v_j - b_j + b_j||v_k - b_k + b_k| \leq 3(r + r_2)^2,$$
$$|(v_k, x_j - x_k)_*| \leq |v_k||x_j - x_k| \leq \sqrt{3}\kappa_1 (r + r_2)|a_j - a_k|. \tag{14}$$

Враховуючи (9), (11) та $||x_j - x_k|_*^l| = |(|x_j - x_k|_*^2)^{\frac{l}{2}}| = ||x_j - x_k|_*^2|^{\frac{l}{2}}$, $l = 3, 5$, отримуємо

$$\frac{1}{||x_j - x_k|_*^3|} \leq \kappa_2^{\frac{3}{2}} |a_k - a_j|^{-3},$$

$$\frac{|x_j - x_k|_0}{||x_j - x_k|_*^3|} \leq \kappa_0 \kappa_2^{\frac{3}{2}} |a_k - a_j|^{-2} \leq \kappa_0 \kappa_2^{\frac{3}{2}} r_1^{-2}, \tag{15}$$

$$\frac{|x_j - x_k|_0}{||x_j - x_k|_*^5|} \leq \kappa_0 \kappa_2^{\frac{5}{2}} |a_k - a_j|^{-4}. \tag{16}$$

З чотирьох останніх нерівностей та умов теореми 1 для $a$ дістаємо

$$\left| \frac{\partial L(t)}{\partial x_j} \right|_0 \leq n \bar{e}^2 \kappa_0 \kappa_2^{\frac{3}{2}} r_1^{-2} [2 + (2c^2)^{-1}(9\kappa_1\kappa_2 + 3 + 2\sqrt{3}\kappa_1\kappa_0^{-1})(\kappa r_1 + r_2)^2]. \tag{17}$$

Далі

$$\left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L(t)}{\partial v_j} \right) (x_{(n)}; v_{(n)}) =$$

$$= (2c^2)^{-1} e_j \sum_{k=1, k\neq j}^{n} e_k \{ |x_k(t) - x_j(t)|_*^{-3} [v_k(t)(v_j(t) - v_k(t), x_k(t) - x_j(t))_* +$$

$$+ (v_k(t) - v_j(t))(v_k(t), x_k(t) - x_j(t))_* + (x_k(t) - x_j(t))(v_k(t), v_k(t) - v_j(t))_*] +$$

$$+3|x_k(t)-x_j(t)|^{-5}(x_j(t)-x_k(t))(v_j(t)-v_k(t),x_j(t)-x_k(t))_*(v_k(t),x_k(t)-x_j(t))_*\}.$$

З нерівностей (9), (11) та умов теореми 1 для $b$ випливають нерівності

$$|(v_j(t)-v_k(t),x_k(t)-x_j(t))_*|\le 2\sqrt{3}\kappa_1(r+r_2)|a_j-a_k|,\qquad \frac{1}{||x_j-x_k|_*^{\frac{3}{2}}|}\le \kappa_2^{\frac{3}{2}}|a_k-a_j|^{-3},$$

$$|v_k|_0\le r+r_2,\quad |v_j(t)-v_k(t)|_0\le 2(r+r_2),$$

$$|(v_k(t),v_k(t)-v_j(t))_*|\le (|(v_k,v_k)_*|+|(v_k,v_j)_*|\le 6(r+r_2)^2.$$

Отже, з них, (14)–(16) та умов теореми 1 для $a$ виводимо нерівність

$$\left|\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L(t)}{\partial v_j}\right)(x_{(n)};v_{(n)})\right|_0\le nc^{-2}\bar{e}^2(\kappa r_1+r_2)^2r_1^{-2}\kappa_2^{\frac{3}{2}}[\sqrt{3}\kappa_1+\kappa_0+3\kappa_0\kappa_1^2\kappa_2]. \tag{18}$$

Додаючи (17) та (18), отримуємо

$$|G|_D\le n\bar{e}^2r_1^{-2}[\eta_0+c^{-2}\eta_1(\kappa r_1+r_2)^2], \tag{19}$$

$$\eta_0=2\kappa_0\kappa_2^{\frac{3}{2}},\quad \eta_1=\kappa_0\kappa_2^{\frac{3}{2}}(5+4\sqrt{3}\kappa_1+9\kappa_1\kappa_2+6\kappa_0\kappa_1^2\kappa_2).$$

Нерівність (19) доводить другу нерівність леми 1; ($6'$) та (13) доводять, що $\operatorname{Det}K\ge R_*(cr_1)$, а перша формула в (6) та (8) доводять першу нерівність леми 1.

***Доведення теореми* 3.** Пункт I виводиться з простої нерівності. Дійсно, нехай $\rho = \min_{1\le j<k\le n}|a_j-a_k|$. Тоді для пари, для якої цей мінімум досягається, виконується нерівність

$$\frac{e_-^2}{\rho}\le\frac{|e_je_k|}{|a_j-a_k|}\le \max(U^+,U^-)\le C.$$

Це означає, що $r_1=\dfrac{e_-^e}{C}$.

Доведемо тепер пункт II. З нерівності Шварца випливає, що другий доданок у квадратних дужках у виразі для $L^1$ не перевищує

$$|x_k-x_j|^{-3}|v_j||v_k|||x_k-x_j|^2\le|x_k-x_j|^{-1}|v_j||v_k|.$$

Така ж нерівність виконується і для першого доданка. Отже, з рівності $H=L^1+U=h$, ($3'$) та нерівності для $a_k$ отримуємо

$$|h|\ge\frac{1}{2m_-}\sum_{j=1}^n|b_j|^2-C-\frac{\bar{e}^2C}{2c^2e_-^2}\left(\sum_{j=1}^n|b_j|\right)^2.$$

Застосовуючи нерівність Шварца до другої суми, маємо

$$|h|+C\ge\left(\frac{1}{2m_-}-\frac{n\bar{e}^2C}{2c^2e_-^2}\right)\sum_{j=1}^n|b_j|^2.$$

Отже,

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \leq R_+,$$

а це і доводить нерівність $|b_j|_0 \leq |b_j| \leq \sqrt{R_+}$ і теорему.

Теорема 3 дає надію, що можна довести те ж саме твердження, що і твердження 3.1 з [5]: *Нехай* $T < t_1$, *де число* $T$ *визначене в теоремі* 1 *і при* $t = t_1$ *хоча б одна компонента розв'язку рівняння руху Дарвіна є неголоморфною, а при* $t < t_1$ *— голоморфною. Тоді*

$$\lim_{t \to t_1} \min_{1 \leq j < k \leq n} |x_j(t) - x_k(t)| = 0.$$

Доведення цього твердження з [5] є недостатнім для динаміки Дарвіна через наявність умови $R_* > 0$.


1. *Wittaker E. T.* A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. – Cambridge: Univ. Press, 1927 (рос. переклад: *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. – М.; Л.: 1937. – 500 с.).
2. *Ландау Л., Лифшиц Е.* Теория поля. – М., 1967. – 460 с.
3. *Treder H.-J.* Die relativitat der Tragheit. – Berlin: Acad. Verlag, 1972.
4. *Kunze M., Spohn H.* Slow motion of charges interacting through the Maxwell field // arXiv: math-phys/0001002v1, 3 January.
5. *Скрипник В. І.* Про голоморфні розв'язки гамільтонових рівнянь руху точкових зарядів // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 2. – С. 270 – 280.
6. *Зігель К., Мозер Ю.* Лекции по небесной механике. – М.; Ижевск, 2001. – 384 с. (англ. переклад: *Siegel C., Moser J.* Lectures on celestial mechanics. – Berlin etc.: Springer, 1971).
7. *Голубев В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М., 1950. – 436 с.
8. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., 1958. – 474 с.
9. *Фадеев Д. К.* Лекции по алгебре. – М.: Наука, 1984. – 416 с.


Одержано 06.03.12