УДК 517.9

О. В. Рибак (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЧУТЛИВІСТЬ ЛІ – ЙОРКА ДЛЯ ДІЇ НАПІВГРУПИ

We introduce and study the concept of Li – Yorke sensitivity for semigroup actions (dynamical systems of the form (X, G), where X is a metric space and G is a semigroup of continuous self-mappings of this space). A system (X, G) is called *Li – Yorke sensitive* if there exists a positive ε such that, for any point $x \in X$ and any open neighborhood U of it, there is a point $y \in U$ for which the following conditions are satisfied: 1) $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$ for infinitely many $g \in G$; 2) for any $\delta > 0$, there exists $h \in G$ for which $d(h(x), h(y)) < \delta$. In particular, we prove that a nontrivial topologically weakly mixing system (X, G) with a compact X and an abelian semigroup G is Li – Yorke sensitive.

Рассматривается понятие чувствительности Ли – Йорка для действий полугрупп (динамических систем вида (X, G), где X — метрическое пространство, а G — некоторая полугруппа непрерывных отображений этого пространства в себя). Система (X, G) называется *чувствительной в смысле Ли – Йорка*, если существует такое положительное ε, что для каждой точки $x \in X$ и любой ее открытой окрестности U есть точка $y \in U$, для которой выполнено следующее: 1) $d(g(x), g(y)) > \varepsilon$ для бесконечно многих $g \in G$; 2) для любого $\delta > 0$ существует $h \in G$, удовлетворяющее условию $d(h(x), h(y)) < \delta$. В частности, доказано, что нетривиальная топологически слабо перемешивающая система (X, G) с компактным X и абелевой G чувствительна по Ли – Йорку.

1. Вступ. Зазвичай під *динамічною системою* мається на увазі пара (X, f), де X — простір із певною метрикою $d(x, y)$, а f — відображення простору X у себе, неперервне відносно d. Даний термін використовується у тих випадках, коли вивчається динаміка перетворень простору X при багаторазовому застосуванні функції f. Іншими словами, аналізується поведінка послідовностей вигляду $\big(x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\big)$, де x — довільна точка простору X. Тут і далі $f^n(x)$ означає $\underbrace{f\big(f(\ldots f}_{n \text{ разів}}(x)\ldots)\big)$.

Зазначимо, що функції, які утворюються при повторному застосуванні f, є елементами *напівгрупи* $F = \big\{f^n |\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\big\}$ з операцією композиції: $f^m \circ f^n = f^{m+n}$. Така точка зору підказує наступне узагальнення. Розглянемо довільну напівгрупу G. Кожному $g \in G$ співставимо деяку неперервну функцію $f_g \colon X \to X$. При цьому для будь-яких $g,\ h \in G$ повинна виконуватися рівність $f_{g \circ h} = f_g(f_h)$. А якщо G містить одиничний елемент e, то також має виконуватись умова $f_e(x) = x$. В описаній ситуації можна сказати, що напівгрупа G *діє* на X.

Далі замість $f_g(x)$ писатимемо $g(x)$. Також для довільних $g_1, g_2 \in G$ замість $g_1 \circ g_2$ можемо писати $g_1 g_2$. Відмітимо, що для різних елементів $g,\ h \in G$ їхні дії (тобто відповідні функції f_g та f_h) можуть збігатися.

Описане поняття динамічної системи на випадок дії напівгрупи (групи) є одним із центральних в теорії динамічних систем. Багато тверджень, правильних у випадку звичайної системи, легко перенести на випадок дії довільної напівгрупи або напівгрупи з досить широкого класу.

Наприклад, Е. Конторович і М. Мегрелішвілі у згаданий спосіб узагальнили теорему про те, що з транзитивності системи та щільності множини її періодичних точок випливає чутливість цієї системи [6]. Доведення для випадку звичайної системи вперше було наведене в роботі [2]. Ця теорема привернула до себе велику увагу завдяки тому, що спочатку всі три згадані властивості вважалися незалежними і вимагалися в означенні хаотичної системи [4].

Досить багатостороннє дослідження з питань, присвячених чутливості дії групи, виконав Ф. Поло [7].

У даній статті ми поширимо на випадок дії напівгрупи деякі твердження з [1], що стосуються чутливості систем у сенсі Лі – Йорка, а також чутливості взагалі. В наведених узагальненнях доведеться накласти певні обмеження на діючу напівгрупу G. Наприклад, ми покажемо чутливість слабко змішуючої системи (X, G) за Лі – Йорком у випадку, коли G є комутативною.

У пункті 2 введено певні означення, які є узагальненням відповідних означень на випадок дії напівгрупи. У пункті 3 розглянуто деякі загальні властивості транзитивних та чутливих систем. Нарешті, у пункті 4 отримано основний результат статті — доведено, що слабко змішуюча система з абелевою напівгрупою відображень чутлива за Лі – Йорком. Це є узагальненням результату з [1] щодо чутливості Лі – Йорка слабко змішуючих систем.

2. Основні означення. У цьому пункті ми наведемо деякі означення, що узагальнюють відповідні означення для систем вигляду (X, f). З нижченаведених означень можна отримати класичні, якщо в якості діючої напівгрупи G взяти $F = \{f^n | \, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Для заданого ε пару (x, y) будемо називати *ε-асимптотичною*, якщо існує лише скінченна кількість елементів $g \in G$, для яких $d\big(g(x), g(y)\big) > \varepsilon$. Пара (x, y) називається *асимптотичною*, якщо вона ε-асимптотична для будь-якого $\varepsilon > 0$.

Можна дати й інше означення асимптотичної пари, яке також збігається з класичним у випадку $G = F$. Пара (x, y) називається *секвенціально асимптотичною*, якщо для будь-якої послідовності $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, де всі g_i є елементами напівгрупи G, відмінними від одиничного, $\lim_{n\to\infty} d\big(g_n \ldots g_1(x), g_n \ldots g_1(y)\big) = 0$.

У загальному випадку асимптотична пара не обов'язково є секвенціально асимптотичною. Але за наступних умов таке твердження є правильним.

Твердження 2.1. *Якщо для всіх $g \in G$, всіх $k \in \mathbb{N}$ та всіх неодиничних $h_1, \ldots, h_k \in G$ виконується $h_k \ldots h_1 g \neq g$, то будь-яка асимптотична пара є секвенціально асимптотичною.*

Доведення цього твердження отримується безпосередньо з означень. З нього випливає, що асимптотичні пари є секвенціально асимптотичними у випадку, коли напівгрупа G є вільною або вільною комутативною, зокрема при $G = F$. А у випадку скінченнопороджено комутативної напівгрупи G можна довести й обернене твердження: кожна секвенціально асимптотична пара також є асимптотичною.

Далі ми будемо використовувати перше означення асимптотичної пари, тому що воно зручніше для наших цілей.

Пара (x, y) називається *проксимальною*, якщо для будь-якого $\delta > 0$ існує елемент $g \in G$, для якого $d\big(g(x), g(y)\big) < \delta$. Через $\mathrm{Prox}(x)$ ми позначатимемо множину точок $y \in X$, для яких пара (x, y) є проксимальною.

Пара (x, y) називається *парою Лі – Йорка*, якщо вона проксимальна, але не асимптотична. Для заданого ε пару (x, y) будемо називати *ε-парою Лі – Йорка*, якщо вона проксимальна, але не ε-асимптотична.

Система (X, G) є *транзитивною*, якщо для будь-яких відкритих непорожніх множин U, $V \subset X$ існує $g \in G$, для якого $g(U) \cap V \neq \varnothing$.

Система (X, G) є (*топологічно*) *слабко змішуючою*, якщо для будь-яких відкритих непорожніх множин T, U, $V, W \subset X$ існує $g \in G$, для якого $g(T) \cap V \neq \varnothing$ та $g(U) \cap W \neq \varnothing$. Іншими словами, (X, G) є слабко змішуючою, якщо $(X \times X, G \times G)$ є транзитивною.

Система (X, G) називається *чутливою*, якщо є таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ існує деяке $g \in G$, для якого $\mathrm{diam}(g(U)) > \varepsilon$.

Система (X, G) називається *чутливою у сенсі Лі – Йорка*, якщо є таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ та будь-якого $x \in U$ існує таке $y \in U$, для якого пара (x, y) є ε-парою Лі – Йорка.

3. Деякі загальні аспекти чутливості дії напівгруп. Якщо задано систему (X, G), то для кожного $x \in X$ має місце рівно один із наступних двох варіантів:

1) для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий відкритий окіл U точки x, що для будь-якого $g \in G$ матимемо $\operatorname{diam}\big(g(U)\big) < \varepsilon$;

2) існує таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якого відкритого околу U точки x знайдеться таке $g \in G$, що $\operatorname{diam}\big(g(U)\big) > \varepsilon$.

У першому випадку точка x називається *рівномірно неперервною*, а у другому — *чутливою*. Як випливає з попередніх означень, система чутлива тільки тоді, коли кожна її точка є чутливою.

Будемо казати, що точка x *транзитивна*, якщо її орбіта $\{g(x) |\ x \in G\}$ є щільною в X. Наступне твердження ілюструє зв'язок між транзитивними точками і транзитивними системами.

Твердження 3.1. *Якщо X — компактний простір і (X, G) — транзитивна система, то множина її транзитивних точок щільна в X.*

Доведення. Якщо X — компактний простір, то в ньому є така зліченна сім'я відкритих множин $\{B_n\}$, що будь-яка відкрита непорожня множина $U \subset X$ містить у собі деяку множину B_i. Для кожної множини B_i розглянемо множину $A_i = \bigcup_{g \in G} g^{-1}(B_i)$. Для кожного i множина $X \backslash A_i$ ніде не щільна в X, інакше розглядувана система не була б транзитивною. За теоремою Бера про категорії будь-яка відкрита непорожня підмножина компакта є множиною другої категорії, тобто вона не може бути подана як зліченне об'єднання ніде не щільних множин. Отже, об'єднання всіх $X \backslash A_i$ не містить ніякої відкритої непорожньої підмножини простору X, тоді перетин усіх A_i є щільним у X, а кожна точка з цього перетину — транзитивною.

Твердження 3.1 доведено.

Для заданої системи (X, G) будемо позначати множину рівномірно неперервних точок через $\operatorname{Eq}(G)$, а множину транзитивних точок — через $\operatorname{Trans}(G)$.

У статті [1] доведено, що для транзитивної системи (X, f) може справджуватися лише один із двох наступних випадків: або $\operatorname{Eq} = \varnothing$, або $\operatorname{Eq}(f) = \operatorname{Trans}(f)$. Ми узагальнимо це твердження таким чином. Будемо казати, що напівгрупа має *властивість скінченного зсуву*, якщо для будь-якого $g \in G$ множина $G \backslash \{hg |\ h \in G\}$ є скінченною. Окрім випадку класичної динамічної системи, де $G = \big\{f^n |\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0\big\}$, описану властивість мають напівгрупи наступних типів. По-перше, властивістю скінченного зсуву володіє будь-яка G, що є групою. По-друге, нам підходять напівгрупи вигляду $\mathbb{N} \times H$, де H — довільна скінченна група. Можна побудувати й інші варіанти. Наприклад, для довільного $p \in \mathbb{N}$ у якості G можна взяти напівгрупу $\big\{(n, 0) |\ n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{(1, 1), \ldots, (p, 1)\big\}$ з операцією $(m, x) \circ (n, y) = (m + n, 0)$. Правильним є наступне твердження.

Твердження 3.2. *Якщо система (X, G) транзитивна, X — компактний простір, G має властивість скінченного зсуву та $\operatorname{Eq}(G) \neq \varnothing$, то $\operatorname{Eq}(G) = \operatorname{Trans}(G)$.*

Доведення. Спершу покажемо, що $\operatorname{Eq}(G) \subseteq \operatorname{Trans}(G)$. Нехай $x \notin \operatorname{Trans}(G)$. Тоді існує така відкрита непорожня підмножина V простору X, що $g(x) \notin V$ для всіх $g \in G$. Нехай y — деяка точка множини V. Існує $\varepsilon > 0$, для якого весь ε-окіл точки y належить V. Нехай W — $(\varepsilon/2)$-окіл y. Розглянемо довільний відкритий окіл U точки x. За твердженням 3.1 існує транзитивна точка $z \in U$. Отже, знайдеться $g \in G$, для якого $g(z) \in W$. Тоді $d\big(g(x), g(z)\big) > \varepsilon/2$, тому що $g(x) \notin V$. Таким чином, будь-який окіл точки x під дією деякого $g \in G$ розтягується не менше, ніж на $\varepsilon/2$. Тому x є чутливою, тобто $x \notin \operatorname{Eq}(G)$.

Тепер доведемо, що кожна транзитивна точка є рівномірно неперервною. Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$ та деяку $y \in \mathrm{Eq}(G)$. Існує такий відкритий окіл U точки y, що $\mathrm{diam}\big(h(U)\big) < \varepsilon$ для всіх $h \in G$. Нехай $x \in \mathrm{Trans}(G)$. За вибором x існує $g \in G$, для якого $g(x) \in U$. З неперервності функції g випливає, що є відкритий окіл V точки x, для якого $g(V) \subset U$. Для кожного елемента вигляду hg $(h \in G)$ маємо $\mathrm{diam}\big(hg(V)\big) = \mathrm{diam}\big(h(g(V))\big) \le \mathrm{diam}\big(h(U)\big) < \varepsilon$. За властивістю скінченного зсуву в G існує лише скінченна кількість елементів $g_1, \ldots, g_k$, які не дорівнюють hg для жодного $h \in G$. Нехай V_i, $1 \le i \le k$, — відкриті околи точки x, для яких $\mathrm{diam}\big(g_i(V_i)\big) < \varepsilon$. Тоді $W = V \cap V_1 \cap \ldots \cap V_k$ теж є відкритим околом точки x. За побудовою множини W для будь-якого $h \in G$ виконується нерівність $\mathrm{diam}\big(h(W)\big) < \varepsilon$. Отже, $x \in \mathrm{Eq}(G)$.

Твердження 3.2 доведено.

Якщо напівгрупа G має метрику, яка узгоджена з дією G на X (тобто якщо відображення $f(g, x) = g(x)$, де $g \in G$ та $x \in X$, є неперервним за сукупністю аргументів), то умову скінченності зсуву можна послабити. А саме, її можна замінити умовою передкомпактності зсуву: будь-яка множина вигляду $G \backslash \{hg | h \in G\}$ має міститися в деякому компакті. Дійсно, нехай $G \backslash \{hg|\ h \in G\} \subset C$, де C — компакт у G. А оскільки X — компактний простір, $C \times X$ також компакт. За теоремою про рівномірну неперервність існує таке $\delta > 0$, що для будь-якого $g \in C$ та довільних $x, y \in X$, для яких $d(x, y) < \delta$, виконується нерівність $d\big(g(x), g(y)\big) < \varepsilon/2$. Це означає, що останнє доведення можна поширити на випадок умови передкомпактності зсуву, якщо в якості відповідної W взяти перетин множини V з δ-околом x.

Розглянемо приклад. Нехай функцію $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ задано диференціальним рівнянням $f'(t) = H(f(t))$, де $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — неперервно диференційовне відображення, яке має період 1 за кожною координатою. Нехай $\mathbb{S}$ — півінтервал [0;1) з метрикою $d(x, y) = \min\big\{|x - y|, 1 - |x - y|\big\}$. Простір $\mathbb{S}$ гомеоморфний колу, отже, є компактним. Позначимо через $\mathbb{R}^+$ напівгрупу, елементами якої є невід'ємні дійсні числа, а напівгруповою операцією — додавання. Задамо дію напівгрупи $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{S}^n$. Через $\{\vec{v}\}$ позначатимемо вектор, отриманий з $\vec{v}$ покоординатним узяттям дробової частини. Для кожного $r \in \mathbb{R}^+$ та $s \in \mathbb{S}^n$ покладемо $r(s) = \big\{f(r)\big\}$, де f задано рівнянням $f'(t) = H\big(f(t)\big)$ та початковою умовою $f(0) = \vec{x}$, а $\vec{x}$ — будь-який вектор з властивістю $\{\vec{x}\} = s$. З неперервної диференційовності H випливає, що $f(r)$ визначається однозначно та залежить від сукупності параметрів $(r, \vec{x})$ неперервно. А оскільки $H(\vec{v})$ має період 1, при заданому r значення $f(r)$ залежить лише від $\{\vec{x}\}$. Тому у просторі $\mathbb{S}^n$ дія $\mathbb{R}^+$ теж є заданою однозначно і неперервною за сукупністю параметрів (r, s). Очевидно, що напівгрупа $\mathbb{R}^+$ має властивість передкомпактного зсуву. Тому до системи $(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^+)$ можна застосувати твердження 3.2 у його модифікованому варіанті.

4. Чутливість Лі – Йорка для слабко змішуючих систем. У цьому пункті наводиться основний результат щодо чутливості у сенсі Лі – Йорка для слабко змішуючих систем. Ми будемо використовувати наступну лему.

Лема 4.1. *Нехай (X, G) — слабко змішуюча система, де X — компактний простір та G — абелева напівгрупа (тобто для всіх g, $h \in G\colon gh = hg$). Тоді для кожного $x \in X$ існує $z \in X$ з наступною властивістю: для будь-яких двох відкритих непорожніх U, $V \subset X$ і будь-якого відкритого околу W точки z є елемент $g \in G$, для якого одночасно виконується $g(U) \cap V \neq \varnothing$ та $g(x) \in W$.*

Доведення. Використаємо наступне твердження: якщо $\mathcal{C}$ — сім'я замкнених підмножин компактної множини і кожний скінченний набір множин з $\mathcal{C}$ має спільну точку, то й усі множини у $\mathcal{C}$ мають спільну точку. Це твердження рівносильне теоремі Бореля – Лебега про те, що з будь-якого покриття компакта відкритими множинами можна вибрати скінченне підпокриття.

Будемо позначати через $\mathrm{Orb}_{U,V}(x)$ множину $\{g(x)|\ g \in G, g(U) \cap V \neq \varnothing\}$. Також нехай $\mathcal{O}(X)$ позначає сім'ю всіх відкритих непорожніх підмножин X. Ми покажемо, що всі множини сім'ї $\{\overline{\mathrm{Orb}_{U,V}(x)} \mid U, V \in \mathcal{O}(X)\}$ мають спільну точку.

Основна ідея нашого доведення аналогічна ідеї Х. Фюрстенберга, який у роботі [5] показав, що у випадку змішуючої системи (X, f) для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ система (X^k, f^k) є транзитивною.

Розглянемо декілька відкритих непорожніх множин $U_1, U_2, \ldots, U_k$ та $V_1, V_2, \ldots, V_k$. За означенням слабко змішуючої системи існує $g \in G$, для якого $g(U_1) \cap U_2 \neq \varnothing$ і $g(V_1) \cap V_2 \neq \varnothing$. Нехай $U_{12} = U_1 \cap g^{-1}(U_2)$ та $V_{12} = V_1 \cap g^{-1}(V_2)$. (Відмітимо, що існування елемента g^{-1} у G не є необхідним: через $g^{-1}(S)$ ми позначаємо множину всіх точок x, для яких $g(x) \in S$.) За вибором g множини U_{12} і V_{12} не порожні. Також вони відкриті, бо функція g є неперервною.

Покажемо, що $\mathrm{Orb}_{U_{12},V_{12}}(x)$ міститься у перетині множин $\mathrm{Orb}_{U_1,V_1}(x)$ та $\mathrm{Orb}_{U_2,V_2}(x)$. Дійсно, якщо $h(U_{12}) \cap V_{12} \neq \varnothing$, то $h(U_1) \cap V_1 \neq \varnothing$ та $hg^{-1}(U_2) \cap g^{-1}(V_2) \neq \varnothing$. До останнього співвідношення застосуємо дію елемента g : $ghg^{-1}(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$. Завдяки комутативності G цей вираз можна переписати як $h(U_2) \cap V_2 \neq \varnothing$. Тому $\mathrm{Orb}_{U_1,V_1}(x) \cap \mathrm{Orb}_{U_2,V_2}(x)$ покриває $\mathrm{Orb}_{U_{12},V_{12}}(x)$. Застосовуючи ці міркування ще кілька разів, отримуємо, що $\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Orb}_{U_i,V_i}(x) \supset$ $\supset \mathrm{Orb}_{U_{12\ldots k},V_{12\ldots k}}(x)$ для деяких непорожніх відкритих множинах $U_{12\ldots k}$ та $V_{12\ldots k}$. Звідси випливає, що будь-який скінченний перетин множин вигляду $\mathrm{Orb}_{U,V}(x)$ є непорожнім. Отже, непорожнім буде і скінченний перетин множин вигляду $\overline{\mathrm{Orb}_{U,V}(x)}$. А тому за теоремою Бореля – Лебега усі множини сім'ї $\{\overline{\mathrm{Orb}_{U,V}(x)} \mid U, V \in \mathcal{O}(X)\}$ мають спільну точку.

Очевидно, будь-яка точка z, яка належить усім множинам згаданої сім'ї, задовольняє вимоги, вказані в умові леми.

Лему 4.1 доведено.

З лема 4.1 отримуємо наступний наслідок.

***Наслідок* 4.1.** *Нехай (X, G) — слабко змішуюча система з абелевою напівгрупою G. Тоді для кожного $x \in X$ множина $\mathrm{Prox}(x)$ є щільною в X.*

Доведення. Нехай x — довільна точка, а U — довільна відкрита непорожня підмножина X. Нехай z — така точка, що для будь-яких відкритих непорожніх множин $U, V \subset X$ і будь-якого відкритого околу W точки z існує елемент $g \in G$, для якого $g(U) \cap V \neq \varnothing$ та $g(x) \in W$. За лемою 4.1 згадана точка z існує.

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ розглянемо відкриту кулю $B_{z,1/n}$ з центром у z та радіусом $1/n$. Нехай U_0 — відкрита непорожня множина, замикання якої лежить в U. Ми побудуємо послідовність множин $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ рекурентним чином. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ нехай $g_n \in G$ — це такий елемент, для якого $g_n(x) \in B_{z,1/n}$ та $g_n(U_{n-1}) \cap B_{z,1/n} \neq \varnothing$. Тоді нехай $U_n = U_{n-1} \cap g_n^{-1}(B_{z,1/n})$.

Маємо $U_0 \supset U_1 \supset U_2 \supset \ldots$, тому $\overline{U_0} \supset \overline{U_1} \supset \overline{U_2} \supset \ldots$ є послідовністю вкладених компактів. Отже, всі $\overline{U_n}$ мають деяку спільну точку y. Зазначимо, що за вибором U_0 справджується $y \in U$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо $g_n(x) \in B_{z,1/n}$ та $g_n(y) \in \overline{B_{z,1/n}}$, звідки випливає $d\big(g_n(x), g_n(y)\big) < 2/n$. Звідси отримуємо, що (x, y) — проксимальна пара. Оскільки множина U довільна, $\mathrm{Prox}(x)$ є щільною в X.

Наслідок 4.1 доведено.

Позначимо через $\mathrm{Asym}_\varepsilon(x)$ множину таких точок $y \in X$, що (x, y) є ε-асимптотичною парою. Тепер доведемо проміжний результат у припущенні зліченності G.

Теорема 4.1. *Нехай X — компактний простір, що містить більше однієї точки, G — зліченна та абелева напівгрупа, а (X, G) — слабко змішуюча система. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що для всіх $x \in X$ множина $\mathrm{Prox}(x) \backslash \mathrm{Asym}_\varepsilon(x)$ є щільною в X.*

Доведення. Розглянемо довільну точку $x \in X$. Нехай (x, y) — ε-асимптотична пара. Тоді за означенням такої пари існує скінченна підмножина $F \subset G$ така, що нерівність $d\big(g(x), g(y)\big) \leq \varepsilon$ виконується для всіх $g \in G \backslash F$. Іншими словами, для будь-якого $g \in G \backslash F$ точка y належить $g^{-1}(\overline{B_{g(x),\varepsilon}})$, де $\overline{B_{g(x),\varepsilon}}$ — замкнена куля з центром $g(x)$ та радіусом ε. Отже, y належить множині $\bigcap_{g \in G \backslash F} g^{-1}(\overline{B_{g(x),\varepsilon}})$. Ця множина є замкненою як перетин замкнених множин $g^{-1}(\overline{B_{g(x),\varepsilon}})$. Нарешті, нехай $\mathcal{F}(G)$ позначає сім'ю всіх скінченних підмножин G. Тоді

$$\mathrm{Asym}_\varepsilon(x) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(G)} \left(\bigcap_{g \in G \backslash F} g^{-1}(\overline{B_{g(x),\varepsilon}}) \right).$$

Візьмемо дві різні точки $a, b \in X$. Доведемо, що для $\varepsilon = d(a,b)/4$ множина $\mathrm{Prox}(x) \backslash \mathrm{Asym}_\varepsilon(x)$ є щільною в X для кожного $x \in X$.

Розглянемо відкриті кулі $B_{a,\varepsilon}$ та $B_{b,\varepsilon}$ радіуса ε з центрами a та b відповідно. За властивістю слабкої змішуваності для довільної відкритої непорожньої $U \subset X$ є деяке $g \in G$, для якого одночасно $g(U) \cap B_{x,\varepsilon} \neq \varnothing$ та $g(U) \cap B_{y,\varepsilon} \neq \varnothing$. З цього випливає, що для кожної відкритої непорожньої множини $U \subset X$ існує $g \in G$, для якого $\mathrm{diam}(g(U)) > 2\varepsilon$.

Для довільного $F \in \mathcal{F}(G)$ через $A_{F,\varepsilon}(x)$ позначимо множину $\bigcap_{g \in G \backslash F} g^{-1}(\overline{B_{g(x),\varepsilon}})$. За побудовою $A_{F,\varepsilon}(x)$ вона є замкненою. Доведемо, що кожна така множина є ніде не щільною в X. Припустимо протилежне: нехай деяка $A_{F,\varepsilon}(x)$ щільна в якійсь відкритій непорожній множині $V \subset X$. Але разом з тим фактом, що $A_{F,\varepsilon}(x)$ є замкненою, це давало б $V \subset A_{F,\varepsilon}(x)$. Звідси для будь-якого $g \notin F$ і будь-яких $y, z \in V$ було б

$$d\big(g(y), g(z)\big) \leq d\big(g(x), g(y)\big) + d\big(g(x), g(z)\big) \leq 2\varepsilon.$$

Отже, для всіх $g \notin F$ ми мали б $\mathrm{diam}\big(g(V)\big) \leq 2\varepsilon$. Оскільки F є скінченною, можна було б вибрати відкриту непорожню множину $U \subset V$ таким чином, що б нерівність $\mathrm{diam}\big(g(V)\big) \leq 2\varepsilon$ виконувалася і для всіх $g \in F$. Але це суперечило б раніше доведеному твердженню, згідно з яким для будь-якої відкритої непорожньої множини $U \subset X$ існує таке $g \in G$, що $\mathrm{diam}\big(g(U)\big) > 2\varepsilon$. Тому всі множини вигляду $A_{F,\varepsilon}(x)$ є ніде не щільними в X. І як ми показали вище, $\mathrm{Asym}_\varepsilon(x) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(G)} A_{F,\varepsilon}(x)$.

Аналогічно можна показати, що

$$X \backslash \mathrm{Prox}(x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{g \in G} X \backslash g^{-1}(B_{g(x),1/n}) \right).$$

Нехай $D_{1/n}(x)$ позначає множину $\bigcap_{g \in G} X \backslash g^{-1}(B_{g(x),1/n})$. За побудовою будь-яка множина такого вигляду є замкненою. Також усі такі множини ніде не щільні, інакше одна з таких множин містила б деяку відкриту непорожню множину, з чого випливало б, що $\mathrm{Prox}(x)$ не щільна в X. Але останнє суперечило б наслідку 4.1.

З огляду на викладене вище можна стверджувати, що

$$(X\backslash\mathrm{Prox}(x))\cup\mathrm{Asym}_\varepsilon(x)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{1/n}(x)\right)\cup\left(\bigcup_{F\in\mathcal{F}(G)}A_{F,\varepsilon}(x)\right).$$

Отже, вказана множина є зліченним об'єднанням ніде не щільних множин. Тому за теоремою Бера про категорії множина $(X\backslash\mathrm{Prox}(x))\cup\mathrm{Asym}_\varepsilon(x)$ не може містити ніякої відкритої непорожньої множини. Отже, її доповнення $\mathrm{Prox}(x)\backslash\mathrm{Asym}_\varepsilon(x)$ є щільним в X для кожного $x\in X$.

Теорему 4.1 доведено.

Насамкінець ми можемо довести наступну теорему.

Теорема 4.2. *Нехай X — компактний простір, що містить більше однієї точки, G — абелева напівгрупа, а (X,G) — слабко змішуюча система. Тоді (X,G) є чутливою в сенсі Лі – Йорка.*

Доведення. Скористаємося відомим фактом, що простір неперервних функцій з компакта в компакт є сепарабельним відносно рівномірної метрики. Тобто можна вибрати таку зліченну підмножину $H_0\subset G$, що для довільного $\delta>0$ і будь-якого $g\in G$ існує $h\in H_0$, для якого $\max_{x\in X}d\big(g(x),h(x)\big)<\delta$. Візьмемо підмножину H_0 з описаними властивостями і розглянемо напівгрупу H, породжену всіма елементами з H_0. Напівгрупа H, як і множина H_0, є зліченною. Також очевидно, система (X,H) є слабко змішуючою.

З теореми 4.1 випливає, що (X,H) чутлива за Лі – Йорком. Отже, такою є і (X,G).

Теорему 4.2 доведено.

5. Заключні зауваження. Ми показали чутливість у сенсі Лі – Йорка для не одноточкової слабко змішуючої системи (X,G), припускаючи комутативність G. Насправді нам достатньо лише того факту, що система (X,G) є k-транзитивною для всіх $k\in\mathbb{N}$, тобто для довільного натурального k транзитивною є система (X^k,G^k). Таку властивість мають слабко змішуючі системи з абелевою напівгрупою G. З іншого боку, в роботі [3] показано, що у випадку не абелевої напівгрупи з її слабкої змішуваності не обов'язково випливає k-транзитивність. Оскільки в інших місцях, потрібних для доведення теореми 4.2, ми не використовували комутативність G, цю теорему можна перенести і на випадок довільної напівгрупи, замінивши слабку змішуваність умовою, що для довільного натурального k задана система є k-транзитивною.

Також у [3] наведено результати, з яких випливає, що чутливість Лі – Йорка притаманна широкому класу систем (X,G), де G є групою. Зокрема, розглядаються *тотально транзитивні* системи, тобто такі (X,G), що для будь-якої підгрупи H, яка має скінченний індекс у G, система (X,H) є транзитивною. У згаданій роботі продемонстровано, що система (X,G) є k-транзитивною для всіх k, якщо вона тотально транзитивна (зокрема, якщо вона слабко змішуюча) та має скрізь щільну множину періодичних точок. Тут точка x називається *періодичною*, якщо її орбіта $\{g(x)|g\in G\}$ є скінченною. Таким чином, для тотально транзитивних систем зі скрізь щільною множиною періодичних точок можна довести аналог леми 4.1, не припускаючи абелевості групи G. Тоді має місце наступна теорема.

Теорема 5.1. *Нехай X містить більше однієї точки, G — група, а (X,G) — тотально транзитивна система зі скрізь щільною множиною періодичних точок. Тоді система (X,G) є чутливою в сенсі Лі – Йорка.*

Автор висловлює подяку своєму науковому керівнику – доктору фізико-математичних наук, професору С. Ф. Коляді за постанову задачі та поради по написанню даної статті.

1. *Akin E., Kolyada S.* Li – Yorke sensitivity // Nonlinearity. – 2003. – **16**. – P. 1421 – 1433.
2. *Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G., Stacey P.* On Devaney's definition of chaos // Amer. Math. Mon. – 1992. – **99**, № 4. – P. 332 – 334.
3. *Cairns G., Kolganova A., Nielsen A.* Topological transitivity and mixing notions for group actions // Rocky Mountain J. Math. – 2007. – **37**, № 2. – P. 371 – 397.
4. *Devaney R. L.* An introduction to chaotic dynamical systems. – Second ed. – Reading: Addison-Wesley, 1989.
5. *Furstenberg H.* Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation // Math. Syst. Theory. – 1967. – **1**. – P. 1 – 49.
6. *Kontorovich E., Megrelishvili M.* A note on sensitivity of semigroup actions // Semigroup Forum. – 2008. – **76**, № 1. – P. 133 – 141.
7. *Polo F.* Sensitive dependence on initial conditions and chaotic group actions // Proc. Amer. Math. Soc. – 2010. – **138**, № 8. – P. 2815 – 2826.

Одержано 31.10.12