УДК 515.163, 515.164, 515.14

Ю. В. Муранов (Гроднен. гос. ун-т им. Янки Купалы, Беларусь),
Р. Хименес (Ин-т математики UNAM, отд-ние Оахака, Мексика)

ГРУППЫ ПРЕПЯТСТВИЙ К РАСЩЕПЛЕНИЮ ВДОЛЬ ОДНОСТОРОННИХ ПОДМНОГООБРАЗИЙ *

We construct new commutative diagrams of exact sequences which relate surgery and splitting obstruction groups for manifold pairs. We compute splitting obstruction groups and surgery obstruction groups for manifold pairs for various geometric diagrams of groups which correspond to the problem of splitting along a one-sided submanifold of codimension 1.

Побудовано нові комутативні діаграми точних послідовностей, що пов'язують групи перешкод до перебудов і розщеплень для пари многовидів. Обчислено групи перешкод до розщеплення і перебудов по парі многовидів для ряду геометричних діаграм груп, що відповідають задачі розщеплення вздовж однобічного підмноговиду корозмірності 1.

1. Введение. Пусть $Y^{n-q} \subset X^n$ — пара многообразий, $n = \dim\ X$, $n - q = \dim Y$. Простая гомотопическая эквивалентность n-мерных многообразий $f\colon M^n \to X^n$ расщепляется вдоль подмногообразия Y, если она гомотопна трансверсальному к Y отображению g с $N = g^{-1}(Y)$, которое является простой гомотопической эквивалентностью на подмногообразии N и его дополнении. Препятствие к расщеплению лежит в группе $LS_{n-q}(F)$ (определение приведено в пункте 1) препятствий к расщеплению. Группы LS_* определены в классической монографии Уолла [20]. Группы препятствий к расщеплению тесно связаны с группами препятствий к перестройкам и являются эффективным инструментом исследования отображений в точной последовательности теории перестроек Браудера – Новикова – Сулливана – Уолла (см. [17, 20]). Первая коммутативная диаграмма, связывающая группы препятствий к расщеплению и различные группы препятствий к перестройкам для пары многообразий, построена Уоллом (см. [20, с. 264]), который обратил внимание на ее эффективность при вычислениях групп препятствий. В книге [17] (§ 7) построены коммутативные диаграммы точных последовательностей, связывающие группы препятствий к расщеплению с другими группами препятствий и структурными множествами. Ряд других аналогичных коммутативных диаграмм получен в работах [2, 7, 9, 14, 15].

В данной работе построены новые коммутативные диаграммы точных последовательностей, связывающие группы препятствий к перестройкам и расщеплениям для пары многообразий, и вычислены группы препятствий к расщеплению и перестройкам по паре многообразий для ряда геометрических диаграмм групп (см. [1]), соответствующих задаче расщепления вдоль одностороннего подмногообразия коразмерности 1. Аналогичные результаты для односторонних подмногообразий получены в работах [2, 11, 13, 18].

2. Группы $LS_*(\Phi)$ и $LP_*(\Phi)$ для пары многообразий. В данной работе рассматриваются гладкие (кусочно-линейные) многообразия и соответствующая категория расслоений (см. [20]). Фундаментальная группа $\pi_1(X)$ многообразия X всегда снабжена гомоморфизмом ориентации $\pi_1(X) \to \{\pm 1\}$, задаваемым первым классом Штифеля – Уитни.

Пусть Y^{n-q} — подмногообразие коразмерности q многообразия X^n, U — трубчатая окрестность подмногообразия Y в X, ∂U — граница U. Рассмотрим универсально-отталкивающий квадрат

* Выполнена при поддержке Conacyt Grant 98697 и Conacyt Grant 98697-151338.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \xrightarrow{\alpha} & \pi_1(X \setminus Y) \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ \pi_1(U) & \xrightarrow{\beta} & \pi_1(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \xrightarrow{\alpha} & C \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ B & \xrightarrow{\beta} & D \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

фундаментальных групп с ориентацией. Гомоморфизм ориентации на группе $\pi_1(Y)$ может отличаться от гомоморфизма ориентации на изоморфной ей группе $\pi_1(U)$ (см. [17, с. 564]). Например, он будет всегда отличаться в случае одностороннего подмногообразия (коразмерности 1). Простая гомотопическая эквивалентность $f\colon M^n \to X^n$ многообразий размерности n расщепляется вдоль подмногообразия $Y \subset X$, если в гомотопическом классе отображения f существует такое отображение g, трансверсальное Y с $N = g^{-1}(Y)$, что ограничения

$$\begin{gathered} g|_N\colon N \to Y, \\ g|_{M\setminus N}\colon M \setminus N \to X \setminus Y \end{gathered} \tag{2.2}$$

являются простыми гомотопическими эквивалентностями (см. [17, 20]). Препятствие к расщеплению лежит в группе $LS_{n-q}(\Phi)$, функториально зависящей от квадрата Φ фундаментальных групп с ориентацией и размерностью $n-q \pmod 4$. Задача расщепления и перестроек пары многообразий определена также для многообразий с границей, при этом предполагается, что простая гомотопическая эквивалентность (нормальное отображение) уже расщеплена на границе (см. [3, 17, 20]).

Пусть $f\colon M^n \to X^n$ — нормальное отображение степени 1. Тогда препятствие к существованию нормально кобордантного ему отображения g со свойствами (2.2) лежит в группе $LP_{n-q}(\Phi)$, также функториально зависящей от Φ и $n-q \pmod 4$ (см. [17, 20]).

Рассмотрим ассоциированную пару многообразий $Y^{n-q} \subset U$ (см. [17, с. 567]), для которой квадрат фундаментальных групп в задаче расщепления имеет вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} \pi_1(\partial U) & \longrightarrow & \pi_1(\partial U) \\ \downarrow i & & \downarrow j \\ \pi_1(U) & \longrightarrow & \pi_1(U) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

В этом случае горизонтальные отображения в квадрате Ψ являются изоморфизмами и определена относительная точная последовательность

$$\to L_*\big(\pi_1(Y)\big) \xrightarrow{i^!} L_{*+q-1}\big(\pi_1(\partial U)\big) \to L_*(i^!) \to L_{*-1}\big(\pi_1(Y)\big) \to, \tag{2.4}$$

в которой $i^!$ — отображение трансфера. Группа $LS_*(\Psi)$ обозначается через $LN_*\big(\pi_1(\partial U) \to \to \pi_1(U)\big)$, и имеет место изоморфизм $LP_*(\Psi) \cong L_{*+1}(i^!)$. В случае одностороннего подмногообразия коразмерности 1 группы LN_* называются группами Браудера – Ливси (см. [5, 6]). Точная последовательность (2.4) является гомотопической длинной точной последовательностью корасслоения Ω-спектров (см. [3, 4, 10, 16])

$$\mathbb{L}\big(\pi_1(Y)\big) \xrightarrow{i^\sharp} \Omega^{q-1}\mathbb{L}\big(\pi_1(\partial U)\big) \longrightarrow \mathbb{L}(i^!), \tag{2.5}$$

где

$$\pi_n(\mathbb{L}(\pi_1(Y))) = L_n(\pi_1(Y)), \qquad \pi_n\Big(\mathbb{L}\big(\pi_1(\partial U)\big)\Big) = L_n\big(\pi_1(\partial U)\big),$$

$$\pi_n\big(\mathbb{L}(i^!)\big) = L_n(i^!), \qquad \pi_n\big(\Omega\mathbb{L}(i^!)\big) = LP_n(\Psi).$$

Отображение индуцирования, как и трансфер, реализуется на уровне спектров. Для любого гомоморфизма групп $\pi \to G$, сохраняющего ориентацию, имеет место корасслоение спектров

$$\mathbb{L}(\pi) \to \mathbb{L}(G) \to \mathbb{L}(\pi \to G), \tag{2.6}$$

где

$$\pi_n\big(\mathbb{L}(\pi)\big) = L_n(\pi), \qquad \pi_n\big(\mathbb{L}(G)\big) = L_n(G), \qquad \pi_n\big(\mathbb{L}(\pi \to G)\big) = L_n(\pi \to G).$$

Гомотопическая длинная точная последовательность корасслоения (2.6) дает относительную точную последовательность L-групп

$$\to L_*(\pi) \to L_*(G) \to L_*(\pi \to G) \to L_{*-1}(\pi) \to . \tag{2.7}$$

Вложение подмногообразия $Y \to U$ индуцирует отображения трансфера $i^!$ и $i^!_{\mathrm{rel}}$, входящие в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} L_*(\pi_1(Y)) \arrow[r, "i^!_{\mathrm{rel}}"] \arrow[dr, "i^!"'] & L_{*+q}(\pi_1(\partial U) \to \pi_1(U)) \arrow[d] \\ & L_{*+q-1}(\pi_1(\partial U)), \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

в которой правое вертикальное отображение является граничным гомоморфизмом из относительной точной последовательности, аналогичной (2.7), для вложения $\pi_1(\partial U) \to \pi_1(U)$. Диаграмма (2.8) также реализуется на уровне спектров (см. [3, 4, 10, 16]), и мы получаем гомотопически коммутативную диаграмму спектров

$$\begin{tikzcd} \mathbb{L}(\pi_1(Y)) \arrow[r, "i^\sharp_{\mathrm{rel}}"] \arrow[d, equal] & \Omega^q\mathbb{L}(\pi(\partial U) \longrightarrow \pi_1(U)) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}\mathbb{LN}(\pi_1(\partial U) \longrightarrow \pi_1(U))) \arrow[d] \\ \mathbb{L}(\pi_1(Y)) \arrow[r, "i^\sharp"] & \Omega^{q-1}\mathbb{L}(\pi_1(\partial U)) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}\mathbb{LP}(\Psi) \arrow[d] \\ & \Omega^{q-1}\mathbb{L}(\pi_1(U)) \arrow[r, equal] & \Omega^{q-1}\mathbb{L}(\pi_1(U)), \end{tikzcd} \tag{2.9}$$

в которой две верхние строки и два правых столбца являются корасслоениями. Отображения в квадрате Φ индуцируют гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{L}(\pi_1(\partial U)) \arrow[r, "\alpha_\sharp"] \arrow[d, "i_\sharp"'] & \mathbb{L}(\pi_1(X \setminus Y)) \arrow[r] \arrow[d, "j_\sharp"'] & \mathbb{L}(\alpha) \arrow[d] \\ \mathbb{L}(\pi_1(U)) \arrow[r, "\beta_\sharp"] \arrow[d] & \mathbb{L}(\pi_1(X)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{L}(\beta) \arrow[d] \\ \mathbb{L}(i) \arrow[r] & \mathbb{L}(j) \arrow[r] & \mathbb{L}(\Phi), \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

строки и столбцы которой являются корасслоениями. Диаграмма (2.10) может быть продолжена в горизонтальном и вертикальном направлениях бесконечными корасслоенными последовательностями (см. [3, 10, 12]). Группы $LP_*(\Phi)$ и $LS_*(\Phi)$ реализуются спектрами $\mathbb{LP}(\Phi)$ и $\mathbb{LS}(\Phi)$ соответственно. Связь между различными спектрами в задаче расщепления описана в следующем предложении (см. [7, 12]).

Предложение 1. *Имеют место следующие гомотопически коммутативные диаграммы спектров, строки и столбцы которых являются корасслоениями*:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{L}(\pi_1(Y)) \arrow[r, "i^\sharp"] \arrow[d, equal] & \Omega^q\mathbb{L}(i) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}\mathbb{LS}(\Psi) \arrow[d] \\
\mathbb{L}(\pi_1(Y)) \arrow[r] & \Omega^q\mathbb{L}(j) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}\mathbb{LS}(\Phi) \arrow[d] \\
& \Omega^q\mathbb{L}(\Phi) \arrow[r, equal] & \Omega^q\mathbb{L}(\Phi),
\end{tikzcd} \tag{2.11}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{L}(\pi_1(Y)) \arrow[r, "i^\sharp"] \arrow[d, equal] & \Omega^{q-1}\mathbb{L}(\pi_1(\partial U)) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_\sharp"'] & \Omega^{-1}\mathbb{LP}(\Psi) \arrow[d] \\
\mathbb{L}(\pi_1(Y)) \arrow[r] & \Omega^{q-1}\mathbb{L}(\pi_1(X\setminus Y)) \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}\mathbb{LP}(\Phi) \arrow[d] \\
& \Omega^{q-1}\mathbb{L}(\alpha) \arrow[r, equal] & \Omega^{q-1}\mathbb{L}(\alpha),
\end{tikzcd} \tag{2.12}$$

где $\mathbb{L}(\alpha) = \mathbb{L}\big(\pi_1(\partial U) \to \pi_1(X\setminus Y)\big)$, $\mathbb{LS}(\Psi) = \mathbb{LN}\big(\pi_1(\partial U) \to \pi_1(U)\big)$, $\mathbb{LP}(\Psi) = \Omega\mathbb{L}(i^!)$, $\mathbb{L}(\beta) = \mathbb{L}\big(\pi_1(U) \to \pi_1(X)\big)$.

Рассмотрим квадрат (2.1) ориентированных групп. Пусть B^w обозначает ориентированную группу $\pi_1(Y)$. Группа B^w изоморфна группе B, но может иметь другую ориентацию (см. [17, с. 564; 20, с. 133]). Следующий результат получен в [20, с. 264] (см. также [3, 14–16]).

Теорема 1. *Имеет место коса точных последовательностей*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\to & & L_{n+1}(C) & & \longrightarrow & & L_{n+1}(D) & & \longrightarrow & & LS_{n-1}(\Phi) \\
& \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
L_{n+2}(j) & & & & LP_n(\Phi) & & & & L_{n+1}(j) & & \\
& \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
\to & & LS_n(\Phi) & & \longrightarrow & & L_n(B^w) & & \longrightarrow & & L_n(C),
\end{array} \tag{2.13}$$

которая функториальна по отношению к отображениям квадратов фундаментальных групп, сохраняющих ориентацию. Диаграмма (2.13) *реализуется на уровне спектров.*

Гомотопические длинные точные последовательности корасслоений диаграмм (2.11) и (2.12) дают коммутативные косы точных последовательностей (см. также [16, с. 566; 20, с. 146]):

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\to & & L_{n+1}(B^w) & & \longrightarrow & & L_{n+q+1}(j) & & \longrightarrow & & L_{n+q+1}(\Phi)\to \\
& \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
LS_{n+1}(\Phi) & & & & L_{n+q+1}(i) & & & & LS_n(\Phi) & & \\
& \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
\to & & L_{n+q+2}(\Phi) & & \longrightarrow & & LS_n(\Psi) & & \longrightarrow & & L_n(B^w)\to
\end{array}
\tag{2.14}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\to & & L_{n+1}(B^w) & & \longrightarrow & & L_{n+q}(C) & & \longrightarrow & & L_{n+q}(\alpha)\to \\
& \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
LP_{n+1}(\Phi) & & & & L_{n+q}(A) & & & & LP_n(\Phi) & & \\
& \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
\to & & L_{n+q+1}(\alpha) & & \longrightarrow & & LP_n(\Psi) & & \longrightarrow & & L_n(B^w)\to .
\end{array}
\tag{2.15}
$$

Обозначим через $\mathbb{L}^{\mathrm{rel}}(\Phi)$ гомотопический кослой отображения $\mathbb{L}\big(\pi_1(X)\big) \longrightarrow \mathbb{L}(\Phi)$, являющегося композицией отображений из диаграммы (2.10), и пусть $L_n^{\mathrm{rel}}(\Phi) = \pi_n\big(\mathbb{L}^{\mathrm{rel}}(\Phi)\big)$. Следующий технический результат потребуется для вычисления групп препятствий.

Предложение 2. *Имеют место точные последовательности L-групп*

$$
\begin{gathered}
\longrightarrow L_n(D) \longrightarrow L_n(\Phi) \longrightarrow L_n^{\mathrm{rel}}(\Phi) \longrightarrow, \\
\longrightarrow L_n(\alpha) \longrightarrow L_{n-1}(B) \longrightarrow L_n^{\mathrm{rel}}(\Phi) \longrightarrow, \\
\longrightarrow L_n(i) \longrightarrow L_{n-1}(C) \longrightarrow L_n^{\mathrm{rel}}(\Phi) \longrightarrow,
\end{gathered}
\tag{2.16}
$$

которые реализуются корасслоениями спектров.

Доказательство следует из леммы 2 работы [12].

Теорема 2. *Имеют место гомотопически коммутативные диаграммы спектров, строки и столбцы которых являются корасслоениями*:

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{i^{\sharp}_{\mathrm{rel}}} & \Omega^q\mathbb{L}(i) & \longrightarrow & \Omega^{-1}\mathbb{LS}(\Psi) \\
\| & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \longrightarrow & \Omega^{q-1}\mathbb{L}(\pi_1(X\setminus Y)) & \longrightarrow & \Omega^{-1}\mathbb{LP}(\Phi) \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
& & \Omega^q\mathbb{L}^{\mathrm{rel}}(\Phi) & = & \Omega^q\mathbb{L}^{\mathrm{rel}}(\Phi),
\end{array}
\tag{2.17}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
\Omega^{q+2}\mathbb{L}(\Phi) & \longrightarrow & \mathbb{LS}(\Psi) & \longrightarrow & \mathbb{LS}(\Phi) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega^{q+1}\mathbb{L}(\alpha) & \longrightarrow & \mathbb{LP}(\Psi) & \longrightarrow & \mathbb{LP}(\Phi) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\Omega^{q+1}\mathbb{L}(\beta) & \longrightarrow & \Omega^q\mathbb{L}(\pi_1(U)) & \longrightarrow & \Omega^q\mathbb{L}(\pi_1(X)).
\end{array}
\tag{2.18}
$$

Гомотопические длинные точные последовательности отображений диаграмм (2.17) *и* (2.18) *дают коммутативные диаграммы точных последовательностей*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\to & & L_{n+1}(B^w) & & \longrightarrow & & L_{n+q}(C) & & \longrightarrow & & L^{\mathrm{rel}}_{n+q+1}(\Phi)\to \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
LP_{n+1}(\Phi) & & & & L_{n+q+1}(i) & & & & LP_n(\Phi) & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
\to & & L^{\mathrm{rel}}_{n+q+2}(\Phi) & & \longrightarrow & & LS_n(\Psi) & & \longrightarrow & & L_n(B^w)\to,
\end{array} \tag{2.19}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\longrightarrow & & L_{n+q+2}(\Phi) & \longrightarrow & LS_n(\Psi) & \longrightarrow & LS_n(\Phi) & \longrightarrow & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\longrightarrow & & L_{n+q+1}(\alpha) & \longrightarrow & LP_n(\Psi) & \longrightarrow & LP_n(\Phi) & \longrightarrow & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\longrightarrow & & L_{n+q+1}(\beta) & \longrightarrow & L_{n+q}(B) & \longrightarrow & L_{n+q}(D) & \longrightarrow & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & .
\end{array} \tag{2.20}$$

Доказательство. Левый квадрат из (2.9) и левый квадрат из (2.10) дают гомотопически коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{i^\sharp_{\mathrm{rel}}} & \Omega^q\mathbb{L}(\pi(\partial U)\longrightarrow\pi_1(U)) & \longrightarrow & \Omega^q\mathbb{L}(\pi_1(X\setminus Y)\longrightarrow\pi_1(X))) \\
\Big\| & & \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\
\mathbb{L}(\pi_1(Y)) & \xrightarrow{i^\sharp} & \Omega^{q-1}\mathbb{L}(\pi_1(\partial U)) & \longrightarrow & \Omega^{q-1}\mathbb{L}(\pi_1(X\setminus Y)),
\end{array}$$

из которой следует левый квадрат в (2.17). Верхнее горизонтальное отображение квадрата входит в (2.11), а нижнее — в (2.12). Таким образом мы получили две верхние строки в (2.17). Правый квадрат в (2.17) универсален, а среднее вертикальное отображение описано в предложении 2. Таким образом, получаем диаграмму (2.17).

Естественное отображение квадратов $\Psi\to\Phi$ и теорема 1 индуцируют правый верхний квадрат в (2.18). Теперь диаграмма (2.18) следует из (2.11) и (2.12).

Теорема 2 доказана.

3. Группы LS_* и LP_* геометрических диаграмм групп. В этом пункте мы вычислим группы LS_*, LP_* и естественные отображения между различными группами препятствий для широкого класса геометрических диаграмм групп. Рассмотрим следующие коммутативные диаграммы групп, возникающие в задаче расщепления вдоль одностороннего подмногообразия:

$$
\Phi_r^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}^+ & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z}/2^{r+} \\ \downarrow i_+ & & \downarrow j_+ \\ \mathbb{Z}^+ & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z}/2^{r+1+} \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{s,r}^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/2^{s+} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z}/2^{r+} \\ \downarrow i_+ & & \downarrow j_+ \\ \mathbb{Z}/2^{s+1+} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z}/2^{r+1+} \end{pmatrix},
$$

$$
\Phi_r^- = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}^+ & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z}/2^{r+} \\ \downarrow i_- & & \downarrow j_- \\ \mathbb{Z}^- & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z}/2^{r+1-} \end{pmatrix}, \qquad \Phi_{s,r}^- = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/2^{s+} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z}/2^{r+} \\ \downarrow i_- & & \downarrow j_- \\ \mathbb{Z}/2^{s+1-} & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{Z}/2^{r+1-} \end{pmatrix}. \tag{3.1}
$$

В диаграммах (3.1) отображения $i_\pm$, $j_\pm$ являются стандартными вложениями индекса 2 циклических групп, а отображения α, β — стандартными проекциями. Ориентация левой нижней группы в этих диаграммах соответствует ориентации фундаментальной группы трубчатой окрестности U подмногообразия Y, как в диаграмме (2.3). Ориентация фундаментальной группы подмногообразия Y получается посредством изменения этой ориентации на противоположную на образующей циклической группы. Для квадратов из (3.1) можно построить ассоциированные квадраты в задаче расщепления, переход от квадрата Φ к квадрату Ψ, как описано в пункте 2 (см. [20]). Мы получим следующие коммутативные квадраты:

$$
\Psi^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}^+ & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}^+ \\ \downarrow i_+ & & \downarrow i_+ \\ \mathbb{Z}^+ & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}^+ \end{pmatrix}, \quad \Psi_s^+ = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/2^{s+} & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}/2^{s+} \\ \downarrow i_+ & & \downarrow i_+ \\ \mathbb{Z}/2^{s+1+} & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}/2^{s+1+} \end{pmatrix},
$$

$$
\Psi^- = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}^+ & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}^+ \\ \downarrow i_- & & \downarrow i_- \\ \mathbb{Z}^- & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}^- \end{pmatrix}, \quad \Psi_s^- = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}/2^{s+} & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}/2^{s+} \\ \downarrow i_- & & \downarrow i_- \\ \mathbb{Z}/2^{s+1-} & \xrightarrow{=} & \mathbb{Z}/2^{s+1-} \end{pmatrix}, \tag{3.2}
$$

горизонтальные отображения в которых являются изоморфизмами.

Группы Уолла всех групп из квадратов в (3.1) и $L_*(1)$ известны (см. [19, 20]):

$$
\begin{array}{ccccccc}
n & = & 0 & 1 & 2 & 3 & \\
L_n(1) & = & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \\
L_n(\mathbb{Z}/2^+) & = & \mathbb{Z}^2 & 0 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}/2 & \\
L_n(\mathbb{Z}/2^-) & = & \mathbb{Z}_2 & 0 & \mathbb{Z}_2 & 0 & \\
L_n(\mathbb{Z}^+) & = & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \\
L_n(\mathbb{Z}^-) & = & \mathbb{Z}_2 & 0 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \\
L_n(\mathbb{Z}/2^{r+}) & = & \mathbb{Z}^2 \oplus \Sigma_r & 0 & \Sigma_r \oplus \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & (r \geq 2) \\
L_n(\mathbb{Z}/2^{r-}) & = & 0 & 0 & \mathbb{Z}_2 & (\mathbb{Z}_2)^2 & (r \geq 2),
\end{array} \tag{3.3}
$$

где Σ_r — свободная абелева группа ранга $2^{r-1}-1$. Группы препятствий к расщеплению (являющиеся группами Браудера – Ливси) для квадратов из (3.2) также известны (см. [2, 6, 13]). Имеют место изоморфизмы

$$LN_n(1\to\mathbb{Z}/2^+) = L_{n+2}(1), \qquad LN_n(1\to\mathbb{Z}/2^-) = L_n(1), \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} LN_n(\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^\pm) &= 0 \qquad \forall\, n=0,1,2,3(\mathrm{mod} 4),\\ LN_n(\mathbb{Z}/2^{s+}\to\mathbb{Z}/2^{s+1^\pm}) &= \begin{cases} 0, & n=2k+1, s\geq 1,\\ \mathbb{Z}^{2^{s-1}}, & n=2k, s\geq 1. \end{cases} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Предложение 3. *Пусть* $s\geq 1$, $s\in\mathbb{N}$. *Имеют место следующие изоморфизмы*:

	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$
$LP_n(\Psi^+)=$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
$LP_n(\Psi^-)=$	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$LP_n(\Psi_0^+)=$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
$LP_n(\Psi_0^-)=$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
$LP_n(\Psi_s^+)=$	0	$\Sigma_s\oplus\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\Sigma_s\oplus\mathbb{Z}^2$
$LP_n(\Psi_s^-)=$	$\Sigma_s\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\Sigma_s\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2$	$0.$

Доказательство. Согласно (3.5) (см. [2]) $LS_n(\Psi^\pm)=0$ $\forall n$. В этом случае из коммутативной диаграммы (2.20) для случая $\Phi=\Psi^\pm$ следует, что имеет место изоморфизм $LP_n(\Psi^\pm)=L_{n+1}(B^\pm)$. Для квадратов $\Psi_0^\pm$ группы LP_* известны (см., например, [8, 18]). Напомним только, что имеет место изоморфизм $LP_n(\Psi_0^-)=LP_{n-1}(\Psi_0^+)$. Для вычисления группы $LP_*(\Psi_s^+)$, $s\geq 1$, рассмотрим строки диаграммы (2.13) для случая $\Phi=\Psi_s^+$, отображения в которой вычислены в работе [13]. Запишем эту диаграмму полностью, поскольку она понадобится нам в дальнейшем. Пусть $\pi=\mathbb{Z}/2^{s+}$, $G^\pm=\mathbb{Z}/2^{s+1^\pm}$, $s\geq 1$. Тогда получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] & (\mathbb{Z}_2)^2 \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, equal] & \\
{} \arrow[r] & L_1(\pi) \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & L_1(G^+) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & LN_3 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & L_3(G^-) \arrow[r, "\mathrm{epi}"] \arrow[d, "\mathbb{Z}_2"'] & L_3(\pi) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & {} \\
{} \arrow[r] & LN_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & L_0(G^-) \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & L_0(\pi) \arrow[r, "\mathrm{mono}"] \arrow[d, equal] & L_0(G^+) \arrow[r, "\mathrm{epi}"] \arrow[d, equal] & LN_2 \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & {} \\
 & \mathbb{Z}^{2^{s-1}} & 0 & \mathbb{Z}^{2^{s-1}+1} & \mathbb{Z}^{2^s+1} & \mathbb{Z}^{2^{s-1}} &
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] & \\
{} \arrow[r, "0"] & L_3(G^+) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\mathbb{Z}_2"'] & LN_1 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & L_1(G^-) \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & {} \\
{} \arrow[r, "0"] & L_2(G^-) \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & L_2(\pi) \arrow[r, "\mathrm{mono}"] \arrow[d, equal] & L_2(G^+) \arrow[r, "\mathrm{epi}"] \arrow[d, equal] & {} \\
 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}^{2^{s-1}-1} \oplus \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}^{2^s-1} \oplus \mathbb{Z}_2, &
\end{tikzcd}
$$

строки которой являются цепными комплексами с изоморфными гомологиями (см. [13]), указанными на диаграмме между строками. Теперь диаграммный поиск в (2.13) и (3.6) дает группы $LP_*(\Psi_s^+)$. Диаграмма, аналогичная (3.6), для квадрата Ψ_s^-, $s \geq 1$, имеет вид

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, equal] & \mathbb{Z}_2 \arrow[d, equal] & \\
\to L_1(\pi) \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & L_1(G^-) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & LN_3 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & L_3(G^+) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "0"'] & L_3(\pi) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & {} \\
\to LN_0 \arrow[r, "\mathrm{mono}"] \arrow[d, equal] & L_0(G^+) \arrow[r, "\mathrm{epi}"] \arrow[d, equal] & L_0(\pi) \arrow[r] \arrow[d, equal] & L_0(G^-) \arrow[r] \arrow[d, equal] & LN_2 \arrow[r, "\mathrm{mono}"] \arrow[d, equal] & {} \\
\mathbb{Z}^{2^{s-1}} & \mathbb{Z}^{2^s+1} & \mathbb{Z}^{2^{s-1}+1} & 0 & \mathbb{Z}^{2^{s-1}} &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathbb{Z}_2)^2 \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] & 0 \arrow[d, equal] & \\
{} \arrow[r, "0"] & L_3(G^-) \arrow[r, "0"] \arrow[d, "(\mathbb{Z}_2)^2"'] & LN_1 \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & L_1(G^+) \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & {} \\
{} \arrow[r, "\mathrm{mono}"] & L_2(G^+) \arrow[r] \arrow[d, equal] & L_2(\pi) \arrow[r, "\mathrm{epi}"] \arrow[d, equal] & L_2(G^-) \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & {} \\
 & \mathbb{Z}^{2^s-1} \oplus \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}^{2^{s-1}-1} \oplus \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2. &
\end{tikzcd}
\qquad (3.7)
$$

Теперь диаграммный поиск в (2.13) и (3.6) дает группы $LP_*(\Psi_s^-)$.

Предложение доказано.

Для удобства ссылок сформулируем результаты об отображениях групп Уолла, индуцированных отображениями α и β в квадратах в (3.1).

Предложение 4. 1. *Индуцированное отображением* $\alpha\colon \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}/2^{r+}$, $r \geq 1$, *отображение групп Уолла* $\alpha_*\colon L_n(\mathbb{Z}^+) \to L_n(\mathbb{Z}/2^{r+})$ *задается следующим образом*:

$$\begin{array}{lll}
n = 0, & \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2 \oplus \Sigma_r & \text{— мономорфизм на прямое слагаемое,} \\
n = 1, & \mathbb{Z} \to 0 & \text{— тривиально,} \\
n = 2, & \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \Sigma_r & \text{— мономорфизм,} \\
n = 3, & \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 & \text{— изоморфизм.}
\end{array}$$

2. *Индуцированное отображением* $\beta\colon \mathbb{Z}^- \to \mathbb{Z}/2^{r-}$, $r \geq 2$, *отображение групп Уолла* $\beta_*\colon L_n(\mathbb{Z}^-) \to L_n(\mathbb{Z}/2^{r-})$ *задается следующим образом*:

$$\begin{array}{lll}
n = 0, & \mathbb{Z}_2 \to 0 & \text{— тривиально,} \\
n = 1, & 0 \to 0 & \text{— тривиально,} \\
n = 2, & \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 & \text{— изоморфизм,} \\
n = 3, & \mathbb{Z}_2 \to (\mathbb{Z}_2)^2 & \text{— мономорфизм.}
\end{array}$$

3. *Индуцированное отображением* $\beta\colon \mathbb{Z}/2^{s+1-} \to \mathbb{Z}/2^{r+1-}$, $s \geq r \geq 1$, *отображение групп Уолла является изоморфизмом во всех размерностях.*

4. *Индуцированное отображением* $\alpha\colon \mathbb{Z}/2^{s+} \to \mathbb{Z}/2^{r+}$, $s \geq r \geq 1$, *отображение групп Уолла является эпиморфизмом во всех размерностях. В частности, имеют место изоморфизмы*

$$L_{2k}(\alpha) = 0, \qquad L_{2k+1}(\alpha) = \Sigma_s/\Sigma_r.$$

Доказательство. 1. Для $n = 0, 2$ результат следует из функториальности, так как $L_0(1) = \mathbb{Z}$, $L_2(1) = \mathbb{Z}_2$, и имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
L_{2k}(1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & L_{2k}(\mathbb{Z}^+) \arrow[d, "\alpha_*"] \\
L_{2k}(1) & L_{2k}(\mathbb{Z}/2^{r+}). \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Для $n = 3$ результат следует из рассмотрения композиции отображений

$$\mathbb{Z}_2 = L_3(\mathbb{Z}^+) \to L_3(\mathbb{Z}/2^{r+}) \to L_3(\mathbb{Z}_2^+) = \mathbb{Z}_2,$$

индуцированных естественными проекциями. Эта композиция является изоморфизмом согласно предложению 13A.9 работы [20].

2. В размерности 2 результат следует из сохранения Арф-инварианта. В размерности 3 рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}_2 = L_3(\mathbb{Z}^-) \arrow[r, "i^!"] \arrow[d, "\beta_*"] & L_3(\mathbb{Z}^+) = \mathbb{Z}_2 \arrow[d, "\alpha_*"] \\
(\mathbb{Z}_2)^2 = L_3(\mathbb{Z}/2^{r-}) \arrow[r, "j^!"] & L_3(\mathbb{Z}/2^{r-1+}) = \mathbb{Z}_2,
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

в которой горизонтальные отображения являются трансферами для вложений индекса 2 из (3.1)

$$\mathbb{Z}^+ \xrightarrow{i} \mathbb{Z}^-, \qquad \mathbb{Z}/2^{r-1+} \xrightarrow{j} \mathbb{Z}/2^{r-}.$$

Верхнее горизонтальное отображение в (3.8) является изоморфизмом согласно [2], а правое вертикальное отображение — изоморфизмом согласно [20], как уже упоминалось выше.

3. В размерностях 0 и 1 утверждение тривиально. В размерности 2 результат следует из пункта 2 и сохранения Арф-инварианта. В размерности 3 группа

$$L_3(\mathbb{Z}/2^{s+1-}) = L_3(\mathbb{Z}\pi) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$$

задается расширением (см. [19])

$$0 \longrightarrow L_0^Y(\mathbb{Z}\pi \to \hat{\mathbb{Z}}_2\pi) \longrightarrow L_3(\mathbb{Z}\pi) \longrightarrow L_3^Y(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi)/\{\mathbb{Z}_2\} \longrightarrow 0,$$

которое функториально при рассматриваемом отображении L-групп, индуцированном β. Группа $L_0^Y(\mathbb{Z}\pi \to \hat{\mathbb{Z}}_2\pi)$ изоморфна группе $L_0^Y\big(\mathbb{Z}[i] \to \hat{\mathbb{Z}}_2[i]\big) = \mathbb{Z}_2$. Этот изоморфизм согласован с проекцией (образующая группы π отображается в i), согласно предложению 3.4.1 [19]. Пусть T — образующая группы π. Группа $L_3^Y(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi)/\{\mathbb{Z}_2\} \cong \mathbb{Z}_2$ является эпиморфным образом группы когомологий Тейта

$$H^0\left(K_1(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi)/Y\right) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2,$$

образующая которой $1 - T + T^{-1}$ переходит в образующую $L_3^Y(\hat{\mathbb{Z}}_2\pi)/\{\mathbb{Z}_2\}$ (см. § 3.2 [19]). Таким образом, правая группа в расширении также отображается изоморфно при отображении, индуцированном β.

4. В размерности 1 утверждение тривиально. В размерности 3 результат следует из пункта 1. В размерности 2 прямое слагаемое $\mathbb{Z}_2$ задается Арф-инвариантом. Прямое слагаемое $\Sigma_r \in$ $\in L_{2k}(\mathbb{Z}/2^{s+})$ $\big($соответственно $\Sigma_s \in L_{2k}(\mathbb{Z}/2^{r+})\big)$ задается группой сигнатур (см. [13] и [19], § 2.2, 3.3), которая отображается эпиморфно при проекции α. Для группы π (равной $\mathbb{Z}/2^s$ либо $\mathbb{Z}/2^r$) прямые слагаемые $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset L_0(\pi)$ лежат в ядре гомоморфизма (см. [19], § 1.4, 3.3)

$$\begin{array}{ccc}
L_0^s(\mathbb{R}\pi) & \longrightarrow & CL_0^s(\mathbb{Q}\pi) \\
{\scriptstyle\text{epi}}\big\downarrow & & {\scriptstyle\text{epi}}\big\downarrow \\
L_0^s(\mathbb{R}) \oplus L_0^s(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{epi}} & CL_0^s(\mathbb{Q}) \oplus CL_0^s(\mathbb{Q}) \\
\Big\| & & \Big\| \\
4\mathbb{Z} \oplus 4\mathbb{Z} & \xrightarrow{(\text{mod } 2, \text{mod } 2)} & \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.
\end{array} \tag{3.9}$$

Верхние вертикальные отображения в (3.9) задаются в рассматриваемом случае отображениями $T \to \pm 1$, где T — образующая π. Поскольку проекция α согласуется с этими отображениями, получаем, что прямое слагаемое $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset L_0(\mathbb{Z}/2^{s+})$ отображается изоморфно на прямое слагаемое $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset L_0(\mathbb{Z}/2^{r+})$.

Предложение доказано.

Нам потребуется результат, который следует непосредственно из следствия 1 работы [2].

Лемма 1. 1. *Относительная точная последовательность для вложения* $i_+ \colon \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^+$ *индекса* 2 *имеет вид*

$$L_0(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{\cong} L_0(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{0} L_0(i_+) \xrightarrow{\cong} L_3(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{0} L_3(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{\cong} L_3(i_+) \xrightarrow{0}$$
$$\xrightarrow{0} L_2(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{\cong} L_2(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{0} L_2(i_+) \xrightarrow{0} L_1(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{\times 2} L_1(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{\text{epi}} L_1(i_+) \xrightarrow{0} .$$

В частности, группа $L_n(i_+)$ *изоморфна* $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2, 0, \mathbb{Z}_2$ *для* $n = 0, 1, 2, 3$ *соответственно.*

2. *Относительная точная последовательность для вложения* $i_- \colon \mathbb{Z}^+ \longrightarrow \mathbb{Z}^-$ *индекса* 2 *имеет вид*

$$L_0(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{\text{epi}} L_0(\mathbb{Z}^-) \xrightarrow{0} L_0(i_-) \xrightarrow{\cong} L_3(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{0} L_3(\mathbb{Z}^-) \xrightarrow{\cong} L_3(i_-) \xrightarrow{0}$$
$$\xrightarrow{0} L_2(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{\cong} L_2(\mathbb{Z}^-) \xrightarrow{0} L_2(i_-) \xrightarrow{\cong} L_1(\mathbb{Z}^+) \xrightarrow{0} L_1(\mathbb{Z}^-) \xrightarrow{0} L_1(i_-) \xrightarrow{\times 2} .$$

В частности, группа $L_n(i_-)$ *изоморфна* $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ *для* $n = 0, 1, 2, 3$ *соответственно.*

Лемма 2. 1. *Нижняя точная последовательность в* (2.16) *для квадрата* Φ_r^+, $r \geq 1$, *имеет вид*

$$L_0(i_+) \xrightarrow{\cong} L_3(\mathbb{Z}/2^{r+}) \xrightarrow{0} L_0^{\text{rel}}(\Phi_r^+) \xrightarrow{\cong} L_3(i_+) \xrightarrow{0} L_2(\mathbb{Z}/2^{r+}) \xrightarrow{\cong} L_3^{\text{rel}}(\Phi_r^+) \xrightarrow{0}$$
$$\xrightarrow{0} L_2(i_+) \xrightarrow{0} L_1(\mathbb{Z}/2^{r+}) \xrightarrow{0} L_2^{\text{rel}}(\Phi_r^+) \xrightarrow{\cong} L_1(i_+) \xrightarrow{0} L_0(\mathbb{Z}/2^{r+}) \xrightarrow{\cong} L_1^{\text{rel}}(\Phi_r^+) \xrightarrow{0} .$$

Группа $L_n^{\text{rel}}(\Phi_r^+)$, $r \geq 1$, *изоморфна* $\mathbb{Z}_2, \Sigma_r \oplus \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}_2, \Sigma_r \oplus \mathbb{Z}_2$ *для* $n = 0, 1, 2, 3$ *соответственно.*

2. *Нижняя точная последовательность в* (2.16) *для квадрата* Φ_r^-, $r \geq 1$, *имеет вид*

$$L_0(i_-) \xrightarrow{\cong} L_3(\mathbb{Z}/2^{r+}) \xrightarrow{0} L_0^{\text{rel}}(\Phi_r^-) \xrightarrow{\cong} L_3(i_-) \xrightarrow{0}$$
$$\xrightarrow{0} L_2(\mathbb{Z}/2^{r+}) \xrightarrow{\text{mono}} L_3^{\text{rel}}(\Phi_r^-) \xrightarrow{\text{epi}} L_2(i_-) \xrightarrow{0}$$
$$\xrightarrow{0} L_1(\mathbb{Z}/2^{r+}) \xrightarrow{0} L_2^{\text{rel}}(\Phi_r^-) \xrightarrow{0} L_1(i_-) \xrightarrow{\text{Coker}=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2\oplus\Sigma_r} L_0(\mathbb{Z}/2^{r+}) \xrightarrow{\text{epi}} L_1^{\text{rel}}(\Phi_r^-) \xrightarrow{0} .$$

Группа $L_n^{\text{rel}}(\Phi_r^-)$, $r \geq 1$, *изоморфна* $\mathbb{Z}_2, \Sigma_r \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \Sigma_r \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ *для* $n = 0, 1, 2, 3$ *соответственно.*

Доказательство. Для квадрата (2.1) отображение $L_n(i) \to L_{n-1}(C)$ в нижней точной последовательности в (2.16) является композицией отображений

$$L_n(i) \longrightarrow L_{n-1}(A) \longrightarrow L_{n-1}(C),$$

где первое отображение из относительной точной последовательности для вложений i описано в лемме 1, а второе отображение, индуцированное α, — в предложении 4.

Теорема 3. *Пусть* $s \geq r \geq 1$, $s, r \in \mathbb{N}$. *Имеют место следующие изоморфизмы*:

$$\begin{array}{lcccc}
 & n=0 & n=1 & n=2 & n=3 \\
LP_n(\Phi_r^+) = & \mathbb{Z}_2 & \Sigma_r \oplus \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \Sigma_r \oplus \mathbb{Z}^2 \\
LP_n(\Phi_r^-) = & \mathbb{Z} & \Sigma_r \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \Sigma_r \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \\
LP_n(\Phi_{s,r}^+) = & 0 & \Sigma_r \oplus \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 & \Sigma_r \oplus \mathbb{Z}^2 \\
LP_n(\Phi_{s,r}^-) = & H & \mathbb{Z}_2 & H \oplus \mathbb{Z}_2 & 0,
\end{array}$$

где $H \cong (\Sigma_s \oplus \Sigma_s/\Sigma_r) \oplus \mathbb{Z}$ — *свободная абелева группа ранга* $2^s - 2^{r-1}$.

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму (2.19) для случая $\Phi = \Phi_r^{\pm}$. В этом случае $\Psi = \Psi^{\pm}$. Следовательно, все группы $LS_*(\Psi^{\pm})$ тривиальны согласно (3.5) (см. [2]) и имеет место изоморфизм $LP_n(\Phi_r^{\pm}) \cong L_{n+2}^{\mathrm{rel}}(\Phi_r^{\pm})$. Теперь результат для квадратов $\Phi_r^{\pm}$ следует из леммы 2. Для квадрата $\Phi_{s,r}^{+}$ рассмотрим естественное отображение квадратов

$$\Phi_{s,r}^{+} \to \Psi_r^{+}, \tag{3.10}$$

индуцирующее коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
L_{n+1}(\mathbb{Z}/2^{r+}) & \longrightarrow & LP_n(\Phi_{s,r}^{+}) & \longrightarrow & L_n(\mathbb{Z}/2^{s+1^-}) & \longrightarrow & L_{n+1}(\mathbb{Z}/2^{r+}) \\
\| & & \downarrow & & {\scriptstyle\beta_*}\downarrow & & \| \\
L_{n+1}(\mathbb{Z}/2^{r+}) & \longrightarrow & LP_n(\Psi_r^{+}) & \longrightarrow & L_n(\mathbb{Z}/2^{r+1^-}) & \longrightarrow & L_{n+1}(\mathbb{Z}/2^{r+}),
\end{array} \tag{3.11}$$

строки которой являются точными последовательностями (см. также [14]). Согласно предложению 4 отображение β_* в (3.11) является изоморфизмом во всех размерностях, следовательно, во всех размерностях имеет место изоморфизм $L_n(\Phi_{s,r}^{+}) \to L_n(\Psi_r^{+})$, индуцированный отображением квадратов (3.10).

Рассмотрим точную последовательность

$$\to L_{n+2}(\alpha) \to LP_n(\Psi_s^{-}) \to LP_n(\Phi_{s,r}^{-}) \to$$

из диаграммы (2.20) для квадрата $\Phi_{s,r}^{-}$. Она имеет вид

$$\begin{gathered}
L_2(\alpha)[=0] \longrightarrow LP_0(\Psi_s^{-})\,[=\Sigma_s \oplus \mathbb{Z}] \xrightarrow{\text{mono}} LP_0(\Phi_{s,r}^{-}) \xrightarrow{\text{epi}} L_1(\alpha)\,[=\Sigma_s/\Sigma_r] \xrightarrow{0} \\
\xrightarrow{0} LP_3(\Psi_s^{-})\,[=0] \longrightarrow LP_3(\Phi_{s,r}^{-}) \longrightarrow L_0(\alpha)[=0] \longrightarrow LP_2(\Psi_s^{-})\,[=\Sigma_s \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2] \xrightarrow{\text{mono}} \\
\xrightarrow{\text{mono}} LP_2(\Phi_{s,r}^{-}) \to L_3(\alpha)\,[=\Sigma_s/\Sigma_r] \xrightarrow{?} LP_1(\Psi_s^{-})\,[=\mathbb{Z}_2] \xrightarrow{\text{epi}} LP_1(\Phi_{s,r}^{-}) \xrightarrow{0}.
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Для завершения доказательства достаточно убедиться, что группа $LP_1(\Phi_{s,r}^{-})$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$, следовательно, отображение, обозначаемое знаком ?, тривиально. Рассмотрим вторую точную последовательность из (2.16). Мы получаем

$$\begin{array}{ccccccc}
\Sigma_s/\Sigma_r & & \mathbb{Z}_2 & & ? & & 0 \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
L_3(\alpha) & \longrightarrow & L_2(\mathbb{Z}/2^{s+1^-}) & \longrightarrow & L_3^{\mathrm{rel}}(\Phi_{s,r}^{-}) & \longrightarrow & L_2(\alpha).
\end{array} \tag{3.13}$$

Группа Σ_s/Σ_r в (3.13) естественно отождествляется с подгруппой группы сигнатур Σ_s, как следует из предложения 4. А эта группа сигнатур при отображении, индуцированном i, тривиально отображается в $\mathbb{Z}_2 \in L_2(\mathbb{Z}/2^{s+1^-})$, задаваемое Арф-инвариантом. Таким образом, левое горизонтальное отображение в (3.13) тривиально и $L_3^{\mathrm{rel}}(\Phi_{s,r}^{-}) = \mathbb{Z}_2$. Теперь рассмотрим точную последовательность, входящую в (2.19):

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & ? & & \mathbb{Z}_2 & & \Sigma_s \oplus \mathbb{Z} \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
LS_1(\Psi_s^-) & \longrightarrow & LP_1(\Phi_{s,r}^-) & \longrightarrow & L_3^{\mathrm{rel}}(\Phi_{s,r}^-) & \longrightarrow & LS_0(\Psi_s^-).
\end{array} \tag{3.14}$$

Поскольку правая группа в (3.14) свободна, $LP_1(\Phi_{s,r}^-)$ изоморфна $\mathbb{Z}_2$.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть* $s \geq r \geq 1$, $s, r \in \mathbb{N}$. *Имеют место следующие изоморфизмы*:

$$\begin{array}{lcccc}
 & n=0 & n=1 & n=2 & n=3 \\
LS_n(\Phi_r^+) = & \Sigma_{r+1}/\Sigma_r & 0 & (\Sigma_{r+1}/\Sigma_r) \oplus \mathbb{Z}_2 & 0 \\
LS_n(\Phi_r^-) = & 0 & \Sigma_r \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 & 0 & \Sigma_r \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \\
LS_n(\Phi_{s,r}^+) = & \Sigma_{r+1}/\Sigma_r & 0 & \Sigma_{r+1}/\Sigma_r & 0 \\
LS_n(\Phi_{s,r}^-) = & H & 0 & H & 0,
\end{array}$$

где $H \cong (\Sigma_s \oplus \Sigma_s/\Sigma_r) \oplus \mathbb{Z}$ — *свободная абелева группа ранга* $2^s - 2^{r-1}$.

Доказательство. Для квадрата $\Phi = \Phi_r^+$ рассмотрим точную последовательность

$$\to L_{n+1}(\Phi) \to L_n(i_+) \xrightarrow{\phi_n^+} L_n(j_+) \to . \tag{3.15}$$

Группы $L_n(i_+)$ даны в лемме 1. Из диаграммы (3.6) получаем, что имеют место изоморфизмы

$$L_n(j_+) = (\Sigma_{r+1}/\Sigma_r) \oplus (\mathbb{Z}_2)^2, \quad 0, \quad \Sigma_{r+1}/\Sigma_r, \mathbb{Z}_2$$

для $n = 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ соответственно. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
L_0(i_+) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\phi_0^+"'] & L_3(\mathbb{Z}^+) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\cong"', "\alpha_*"] & \mathbb{Z}_2 \\
L_0(j_+) \arrow[r, "\mathrm{epi}"] & L_3(\mathbb{Z}/2^{r+}) \arrow[r, equal] & \mathbb{Z}_2,
\end{tikzcd}$$

в которой верхнее отображение является изоморфизмом по лемме 1, а правое вертикальное отображение — изоморфизмом по предложению 4. Следовательно, ϕ_0^+— мономорфизм. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
L_3(\mathbb{Z}^+) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cong"', "\beta_*"] & L_3(i_+) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\phi_3^+"'] & \mathbb{Z}_2 \\
L_3(\mathbb{Z}/2^{r+1^+}) \arrow[r, "\cong"] & L_3(j_+) \arrow[r, equal] & \mathbb{Z}_2,
\end{tikzcd}$$

в которой верхнее отображение является изоморфизмом по лемме 1, левое вертикальное отображение — изоморфизмом по предложению 4, а нижнее горизонтальное отображение следует из предложения 3. Следовательно, ϕ_3^+— изоморфизм. Отображения ϕ_2^+ и ϕ_1^+, очевидно, будут тривиальны, так как одна из групп тривиальна. Теперь из точной последовательности (3.15) получаем изоморфизмы

$$L_{2k+1}(\Phi_r^+) = 0, \quad L_0(\Phi_r^+) = \mathbb{Z}^{2^{r-1}} \oplus \mathbb{Z}_2$$

и расширение

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \Sigma_{r+1}/\Sigma_r & & ? & & \mathbb{Z}_2 & & \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & L_2(j_+) & \longrightarrow & L_2(\Phi_r^+) & \longrightarrow & L_1(i_+) & \longrightarrow & 0. \end{array} \tag{3.16}$$

Рассмотрим часть точной последовательности для квадрата $\Phi = \Phi_r^+$

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & ? & & \Sigma_s/\Sigma_r \\ \| & & \| & & \| \\ L_0(\beta) & \longrightarrow & L_2(\Phi_r^+) & \xrightarrow{\text{mono}} & L_1(\alpha), \end{array}$$

относительные группы в которой получены в предложении 4. Следовательно, $L_2(\Phi_r^+)$ является подгруппой свободной абелевой группы, и из (3.16) следует, что $L_2(\Phi_r^+) \cong \Sigma_{r+1}/\Sigma_r$. В частности, последовательность (3.16) не расщепляется. Поскольку группы $LS_n(\Psi^\pm)$ тривиальны для любого n, из диаграммы (2.16) получаем изоморфизм

$$LS_n(\Phi_r^+) \cong L_{n+2}(\Phi_r^+).$$

Для квадрата $\Phi = \Phi_r^-$ рассмотрим точную последовательность, аналогичную (3.15). Пусть

$$\phi_n^- \colon L_n(i_-) \longrightarrow L_n(j_-) \tag{3.17}$$

— отображение относительных групп из этой последовательности. Группы $L_n(i_-)$ даны в лемме 1. Из диаграммы (3.7) получаем, что имеют место изоморфизмы

$$L_n(j_-) = \mathbb{Z}_2, \quad \Sigma_r \oplus \mathbb{Z}^2, \quad 0, \quad \Sigma_r \oplus (\mathbb{Z}_2)^2$$

для $n = 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ соответственно. Аналогично предыдущему случаю получаем, что отображение в (3.17) является изоморфизмом при $n = 0$, мономорфизмом при $n = 3$, тривиально при $n = 2$, является мономорфизмом с коядром $\Sigma_r \oplus \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Следовательно,

$$L_{2k}(\Phi_r^-) = 0, \qquad L_{2k+1}(\Phi_r^-) = \Sigma_r \oplus \mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Далее, как и выше, имеет место изоморфизм

$$LS_n(\Phi_r^-) \cong L_{n+2}(\Phi_r^-).$$

Для квадрата $\Phi = \Phi_{s,r}^+$ рассмотрим точную последовательность

$$\to L_n(B^w) \xrightarrow{\psi_n^+} L_{n+1}(j_+) \to LS_{n-2}(\Phi) \to \tag{3.18}$$

из диаграммы (2.13). Группы $L_n(B^w) = L_n(\mathbb{Z}/2^{s+1^-})$ даны в (3.3), а группы $L_*(j_+)$ описаны выше в доказательстве. Отсюда непосредственно следует, что отображение ψ_n^+ тривиально при $n = 0, 1$. При $n = 2$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{CD} L_2(\mathbb{Z}/2^{s+1^-}) @>{i^\sharp_-}>{\cong}> L_3(i_+) @<{\cong}<< L_2(\mathbb{Z}/2^{s+1^+}) = \mathbb{Z}_2 \\ @| @VVV @V{\cong}V{\beta_*}V \\ L_2(\mathbb{Z}/2^{s+1^-}) @>{\psi_2^+}>> L_3(j_+) @<{\cong}<< L_2(\mathbb{Z}/2^{r+1^+}) = \mathbb{Z}_2. \end{CD} \tag{3.19}$$

Верхнее левое горизонтальное отображение в (3.19) — трансфер, который является изоморфизмом согласно диаграмме (3.7). Среднее и правое вертикальные отображения индуцированы горизонтальными отображениями квадрата $\Psi^+_{s,r}$. Правое вертикальное отображение является изоморфизмом, так как сохраняет Арф-инвариант. Следовательно, отображение ψ_2^+ — изоморфизм. Теперь из (3.18) следует, что

$$LS_0(\Phi^+_{s,r}) = \Sigma_{r+1}/\Sigma_r, \qquad LS_1(\Phi^+_{s,r}) = 0$$

и имеет место точная последовательность

$$0 \to LS_3(\Phi^+_{s,r}) \to L_3(\mathbb{Z}/2^{s+1^-})[= (\mathbb{Z}_2)^2] \to L_0(j_+) \to LS_2(\Phi^+_{s,r}) \to 0. \tag{3.20}$$

При $n = 3$ естественное отображение квадратов $\Phi^+_{s,r} \to \Psi^+_r$ индуцирует коммутативную диаграмму

$$\begin{CD} \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \\ @| \\ L_3(\mathbb{Z}/2^{s+1^-}) @>{i^\sharp_-}>{\text{mono}}> L_0(i_+) \\ @V{\cong}VV @VVV \\ L_3(\mathbb{Z}/2^{r+1^-}) @>{j^\sharp_-}>{\text{mono}}> L_0(j_+), \end{CD} \tag{3.21}$$

диагональное отображение в которой есть ψ_3^+. Горизонтальные отображения в (3.21) являются мономорфизмами, как следует из (3.6). Левое вертикальное отображение в (3.21) индуцировано проекцией и является изоморфизмом по предложению 4. Следовательно, ψ_3^+ — мономорфизм. Теперь из (3.20) получаем

$$LS_3(\Phi^+_{s,r}) = 0, \qquad LS_2(\Phi^+_{s,r}) = \Sigma_{r+1}/\Sigma_r.$$

Для квадрата $\Phi = \Phi^-_{s,r}$ рассмотрим точную последовательность

$$\to LP_n(\Phi) \xrightarrow{\xi_n} L_{n+1}(D) \to LS_{n-1}(\Phi) \to \tag{3.22}$$

из диаграммы (2.13), где $D = \mathbb{Z}/2^{r+1^-}$. Группы $LP_n(\Phi^-_{s,r})$ получены в теореме 3, а группы $L_*(\mathbb{Z}/2^{r+1^-})$ даны в (3.3). Отсюда непосредственно следует, что отображение ξ_n тривиально при $n = 0, 3$. При $n = 1$ имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{CD} LP_1(\Psi^-_s) @>{\cong}>> L_2(\mathbb{Z}/2^{s+1^-}) = \mathbb{Z}_2 \\ @V{\cong}VV @V{\cong}V{\beta_*}V \\ LP_1(\Phi^-_{s,r}) @>{\xi_1}>> L_2(\mathbb{Z}/2^{r+1^-}) = \mathbb{Z}_2, \end{CD} \tag{3.23}$$

в которой вертикальные отображения индуцированы отображением квадратов $\Psi_s^- \to \Phi_{s,r}^+$. Все отображения в (3.23), кроме ξ_1, описаны выше. Следовательно, ξ_1 — изоморфизм. Диаграмма, аналогичная (3.23), в размерности $n = 2$ дает, что ξ_2 является эпиморфизмом и кручение отображается мономорфно. Теперь из (3.22) получаем

$$LS_{2k+1}(\Phi_{s,r}^-) = 0, \qquad LS_{2k}(\Phi_{s,r}^-) = H,$$

где $H \cong (\Sigma_s \oplus \Sigma_s/\Sigma_r) \oplus \mathbb{Z}$ — свободная абелева группа ранга $2^s - 2^{r-1}$.

Теорема доказана.

1. *Ахметьев П. М.* Расщепления гомотопических эквивалентностей вдоль одностороннего подмногообразия коразмерности 1 // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1987. – **51**. – С. 211 – 241.
2. *Ахметьев П. М., Муранов Ю. В.* Препятствия к расщеплению многообразий с бесконечной фундаментальной группой // Мат. заметки. – 1996. – **60**, вып. 2. – С. 163 – 175.
3. *Bak A., Muranov Yu. V.* Splitting along submanifolds, and $\mathbb{L}$-spectra // Sovrem. Mat. Prilozh. Topol., Anal. Smezh. Vopr. – 2003. – № 1. – S. 3 – 18.
4. *Bak A., Muranov Yu. V.* Normal invariants of manifold pairs and assembly maps // Mat. Sb. – 2006. – **197**, № 6. – S. 3 – 24.
5. *Browder W., Livesay G. R.* Fixed point free involutions on homotopy spheres // Bull. Amer. Math. Soc. – 1967. – **73**. – P. 242 – 245.
6. *Cappell S. E., Shaneson J. L.* Pseudo-free actions. I // Lect. Notes Math. – 1979. – **763**. – P. 395 – 447.
7. *Cavicchioli A., Muranov Yu. V., Spaggiari F.* Relative groups in surgery theory // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. – 2005. – **12**, № 12. – P. 109 – 113.
8. *Cavicchioli A., Muranov Yu. V., Spaggiari F.* Surgery on pairs of closed manifolds // Czechoslovak Math. J. – 2009. – **59**, № 134. – P. 551 – 571.
9. *Cencelj M., Muranov Yu. V., Repovs D.* On structure sets of manifold pairs // Homology, Homotopy and Appl. – 2009. – **11**. – P. 195 – 222.
10. *Hambleton I., Ranicki A., Taylor L.* Round L-theory // J. Pure and Appl. Algebra. – 1987. – **47**. – P. 131 – 154.
11. *Hegenbarth F., Muranov Yu. V., Repovš D.* Browder – Livesay invariants and the example of Cappell and Shaneson // Milan J. Math. – 2012. – **80**.
12. *Muranov Yu. V.* Obstruction groups to splitting and quadratic extensions of antistructures // Izv. RAN. Ser. mat. – 1995. – **59**. – S. 107 – 132.
13. *Муранов Ю. В., Харшиладзе А. Ф.* Группы Браудера – Ливси абелевых 2-групп // Мат. сб. – 1990. – **181**, № 8. – С. 1061 – 1098.
14. *Muranov Yu. V., Repovš D.* Obstruction groups for surgeries and splitting for a pair of manifolds // Mat. Sb. – 1997. – **188**, № 3. – S. 127 – 142.
15. *Muranov Yu. V., Repovš D.* LS-groups and morphisms of quadratic extensions // Mat. Zametki. – 2001. – **70**. – S. 419 – 424.
16. *Ranicki A. A.* The total surgery obstruction // Lect. Notes Math. – 1979. – **763**. – P. 275 – 316.
17. *Ranicki A. A.* Exact sequences in the algebraic theory of surgery // Math. Notes. – Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1981. – **26**.
18. *Ruini B., Spaggiari F.* On the computation of L-groups and natural maps // Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg. – 2002. – **72**. – P. 297 – 308.
19. *Wall C.T.C.* Classification of Hermitian forms. VI. Group rings // Ann. Math. – 1976. – **103**. – P. 1 – 80.
20. *Wall C.T.C.* Surgery on compact manifolds. – Second ed. – Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1999.

Получено 27.11.12