УДК 517.94

М. Н. Елисеенко, В. Н. Лаптинский

К вопросу о построении периодических решений квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \ (\dot{}) = d/dt, \tag{1}$$

где $x \in R^n$, $A(t)$ — непрерывная ω-периодическая $n \times n$-матрица; ω-периодическая по t вектор-функция $f(t, x)$ определена и непрерывна по совокупности переменных $t, x \in R \times R^n$, удовлетворяет относительно x условию Липшица с постоянной L, причем $f(t, 0) \not\equiv 0$, $\omega > 0$.

Введем необходимые обозначения

$$B(t) = \int_0^t A(\tau)\,d\tau, \quad C(t) = \int_0^t B(\tau)A(\tau)\,d\tau, \quad |A(t)| \leqslant \alpha,$$

$$|C^{-1}(\omega)| \leqslant \beta, \quad |f(t, 0)| \leqslant M_0, \ \alpha, \ \beta, \ M_0 = \text{const}, \quad t \in [0, \omega]$$

Здесь и всюду ниже через $|\cdot|$ обозначена любая (согласованная) норма в R^n; $\|x\| = \max_t |x(t)|$.

В [1, 2] предложена примыкающая к [3—5] методика исследования вопросов существования и вывода алгоритмов построения периодических решений дифференциальных уравнений.

В этой работе продолжены исследования, начатые в [1].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* $B(\omega) = 0$, $\det C(\omega) \neq 0$,

$$q = \frac{1}{6}\beta\alpha^3\omega^3 + \frac{1}{6}\beta\alpha^2\omega^3 L + \frac{1}{2}\beta\alpha\omega^2 L + \beta\omega L < 1 \tag{2}$$

Тогда ω-периодическое решение уравнения (1) *существует и единственно.*

Доказательство. Следуя методике, предложенной в [1], построим последовательность периодических приближений к искомому решению следующим образом:

$$x_0 = \text{const}, \quad x_1(t) = x_1(0) + B(t)x_0, \tag{3}$$

$$x_k(t) = x_k(0) + \int_0^t A(\tau)x_{k-1}(\tau)\,d\tau + \int_0^t f(\tau, x_{k-2}(\tau))\,d\tau, \quad k = 2, 3, \ldots. \tag{4}$$

Будем находить x_0, $x_1(t)$, $x_k(t)$, следуя подходу, предложенному в [2].

Из условия ω-периодичности $x_2(t)$ следует равенство

$$\int_0^\omega A(\tau)x_1(\tau)\,d\tau + \int_0^\omega f(\tau, x_0)\,d\tau = 0,$$

которое после интегрирования по частям выражения $A(\tau)x_1(\tau)\,d\tau$ преобразуется с учетом (3) к виду

$$\int_0^\omega B(\tau)A(\tau)\,d\tau \cdot x_0 = \int_0^\omega f(\tau, x_0)\,d\tau.$$

Отсюда для нахождения постоянного вектора x_0 получим уравнение

$$c = C^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau, c)\,d\tau. \tag{5}$$

Согласно принципу сжатых отображений (см. например, [6, с. 563]) уравнение (5) имеет единственное решение x_0.

Затем из условия ω-периодичности $x_3(t)$ аналогичным образом с учетом (4) получим

$$\int_0^\omega B(\tau)A(\tau)x_1(\tau)\,d\tau+\int_0^\omega B(\tau)f(\tau,\ x_0)\,d\tau-\int_0^\omega f(\tau,\ x_1(\tau))\,d\tau=0. \tag{6}$$

Поскольку $x_1(\tau)=x_1(t)-\int_\tau^t A(\sigma)\,d\sigma\cdot x_0$, то из (6) найдем

$$x_1(t)=C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)A(\tau)\,d\tau\int_\tau^t A(\sigma)\,d\sigma x_0-C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)f(\tau,x_0)\,d\tau+$$
$$+C^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau,\ x_1(\tau))\,d\tau. \tag{7}$$

Аналогичным образом, исходя из условия ω-периодичности $x_{k+2}(t)$, в общем случае получим

$$x_k(t)=C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)A(\tau)\,d\tau\int_\tau^t A(\sigma)x_{k-1}(\sigma)\,d\sigma+$$
$$+C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)A(\tau)\,d\tau\int_\tau^t f(\sigma,\ x_{k-2}(\sigma))\,d\sigma-C^{-1}(\omega)\times$$
$$\times\int_0^\omega B(\tau)f(\tau,\ x_{k-1}(\tau))\,d\tau+C^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau,\ x_k(\tau))\,d\tau. \tag{8}$$

Как видим, искомые последовательные приближения следует находить по алгоритму с неявной итерационной схемой. Следует отметить, что для нахождения $x_1(t)$, $x_k(t)$ нам достаточно найти постоянные векторы $x_1(0)$ и $x_k(0)$ соответственно из уравнений

$$x_1(0)=-C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)A(\tau)B(\tau)\,d\tau x_0-C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)f(\tau,\ x_0)\,d\tau+$$
$$+C^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau,\ x_1(0)+B(\tau)x_0)\,d\tau,$$

$$x_k(0)=-C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)A(\tau)\,d\tau\int_0^\tau A(\sigma)x_{k-1}(\sigma)\,d\sigma-$$
$$-C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)f(\tau,\ x_{k-1}(\tau))\,d\tau-C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)A(\tau)\,d\tau\times$$
$$\times\int_0^\tau f(\sigma,\ x_{k-2}(\sigma))\,d\sigma+C^{-1}(\omega)\int_0^\omega f\left(\tau,\ x_k(0)+\int_0^\tau A(\sigma)x_{k-1}(\sigma)\,d\sigma+\right.$$
$$\left.+\int_0^\tau f(\sigma,\ x_{k-2}(\sigma))\,d\sigma\right)d\tau$$

и воспользоваться формулами (3) и (4).

Докажем равномерную относительно $t\in[0,\ \omega]$ сходимость построенной последовательности $\{x_k(t)\}$.

Из (8) следует оценка

$$\| x_{k+1}(t) - x_k(t) \| \leqslant \frac{1}{1-\beta\omega L}\left(\frac{1}{6}\beta\alpha^3\omega^3 + \frac{1}{2}\beta\alpha\omega^2 L\right)\| x_k(t) - x_{k-1}(t) \| +$$

$$+ \frac{\beta\alpha^2\omega^3 L}{6(1-\beta\omega L)}\| x_{k-1}(t) - x_{k-2}(t) \|. \tag{9}$$

Далее, с учетом условия (2) нетрудно доказать равномерную по t сходимость последовательности $\{x_k(t)\}$ к функции $x^*(t)$, являющейся ω-периодическим решением уравнения

$$x(t) = C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau) A(\tau)\, d\tau \int_\tau^t A(\sigma) x(\sigma)\, d\sigma + C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau) A(\tau)\, d\tau \times$$

$$\times \int_\tau^t f(\sigma, x(\sigma))\, d\sigma - C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau) f(\tau, x(\tau))\, d\tau + C^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau, x(\tau))\, d\tau, \tag{10}$$

эквивалентного задаче об ω-периодических решениях уравнения (1); при этом имеет место оценка

$$\| x^*(t) \| \leqslant \frac{6 - 6\beta\omega L - \beta\alpha^3\omega^3 - 3\beta\alpha\omega^2 L}{6(1-q)}\| x_1(t) - x_0 \| +$$

$$+ \frac{1-\beta\omega L}{1-q}\| x_2(t) - x_1(t) \|.$$

Поскольку

$$\| x_0 \| \leqslant \frac{\beta\omega M_0}{1-\beta\omega L}, \quad \| x_1(t) - x_0 \| \leqslant \frac{(3+\beta\alpha^2\omega^2)\beta\alpha\omega^2 M_0}{6(1-\beta\omega L)^2},$$

$$\| x_2(t) - x_1(t) \| \leqslant \frac{\beta\alpha^2\omega^3 M_0}{36(1-\beta\omega L)^3}(\beta^2\alpha^4\omega^4 + 3\beta^2\alpha^2\omega^3 L + 3\beta\alpha^2\omega^2 + 3\beta\omega L + 6),$$

то окончательно получим

$$\| x^*(t) \| \leqslant \frac{\beta\omega M_0}{6(1-q)}(\alpha^2\omega^2 + 3\alpha\omega + 6). \tag{11}$$

Единственность решения $x^*(t)$ нетрудно получить методом от противного, исходя из уравнения (10).

Модифицируем рассмотренный выше алгоритм так, чтобы новый алгоритм имел явную итерационную схему. Для этого ω-периодические последовательные приближения построим следующим образом:

$$x_{-1} = 0,$$

$$x_0 = \text{const},$$

$$x_1(t) = x_1(0) + B(t)x_0,$$

$$x_k(t) = x_k(0) + \int_0^t A(\tau) x_{k-1}(\tau)\, d\tau + \int_0^t f(\tau, x_{k-3}(\tau))\, d\tau.$$

Тогда по предложенной выше схеме (см. вывод формул (5), (7), (8)), получим

$$x_0 = C^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau, 0)\, d\tau, \quad x_1(t) = C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau) A(\tau)\, d\tau \int_\tau^t A(\sigma)\, d\sigma x_0 -$$

$$- C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau) f(\tau, 0)\, d\tau + C^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau, x_0)\, d\tau,$$

$$x_k(t) = C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)A(\tau)\,d\tau\int_\tau^t A(\sigma)x_{k-1}(\sigma)\,d\sigma + C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)A(\tau)\,d\tau\times$$

$$\times\int_\tau^t f(\sigma, x_{k-3}(\sigma))\,d\sigma - C^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)f(\tau, x_{k-2}(\tau))\,d\tau +$$

$$+ C^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau, x_{k-1}(\tau))\,d\tau.$$

Очевидно, этот алгоритм, в отличие от приведенного выше, практически более удобен.

Обоснование равномерной сходимости последовательности $\{x_k(t)\}$ к ω-периодическому решению $x^*(t)$ уравнения (1) проводится так же, как и в первом случае.

Вместо оценки (9) получим

$$\|x_{k+1}(t) - x_k(t)\| \leqslant \left(\frac{1}{6}\beta\alpha^3\omega^3 + \beta\omega L\right)\|x_k(t) - x_{k-1}(t)\| + \frac{1}{2}\beta\alpha\omega^2 L\times$$

$$\times\|x_{k-1}(t) - x_{k-2}(t)\| + \frac{1}{6}\beta\alpha^2\omega^3 L\|x_{k-2}(t) - x_{k-3}(t)\|.$$

Оценка периодического решения $x^*(t)$ уравнения (1) в этом случае имеет вид (11).

Предположим, что $f(t, x)$ определена по совокупности переменных в области $D = \{t, x : t \in R, |x| \leqslant \rho\}$ и удовлетворяет в этой области условию Липшица (по x) с постоянной L. Тогда условия существования и единственности в области D ω-периодического решения уравнения (1) выражает теорема.

Т е о р е м а 2. *Если* $B(\omega) = 0$, $\det C(\omega) \neq 0$, $q < 1$ *и*

$$(\alpha^2\omega^2 + 3\alpha\omega + 6)\beta\omega M_0 \leqslant 6\rho(1 - q), \tag{12}$$

то в области D существует единственное ω-периодическое решение уравнения (1).

В самом деле, используя (12), нетрудно показать, что последовательные приближения к решению уравнения (1), построенные с помощью явной итерационной схемы, принадлежат области D. Тогда и предельная функция будет принадлежать этой области.

З а м е ч а н и е. Если $B(\omega) = 0$ и $C(\omega) = 0$, то ω-периодические последовательные приближения будем искать следующим образом:

$$x_{-1} = 0,$$

$$x_0 = \text{const},$$

$$x_1(t) = x_1(0) + B(t)x_0,$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t A(\tau)x_1(\tau)\,d\tau,$$

$$x_k(t) = x_k(0) + \int_0^t A(\tau)x_{k-1}(\tau)\,d\tau + \int_0^t f(\tau, x_{k-4}(\tau))\,d\tau, \quad k = 3, 4, \ldots.$$

Здесь мы приводим только модифицированный алгоритм, поскольку основной практически менее удобен.

Проделав соответствующие выкладки, получим

$$x_0 = H^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau, 0)\,d\tau, \quad x_1(t) = H^{-1}(\omega)\int_0^\omega C(\tau)A(\tau)\,d\tau\int_\tau^t A(\sigma)\,d\sigma x_0 +$$

$$+ H^{-1}(\omega)\int_0^\omega B(\tau)f(\tau, 0)\,d\tau - H^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau, x_0)\,d\tau,$$

$$x_2(t)=H^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega C(\tau)A(\tau)\,d\tau\int\limits_\tau^t A(\sigma)x_1(\sigma)\,d\sigma+H^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega B(\tau)f(\tau,x_0)\,d\tau-$$

$$-H^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega f(\tau,x_1(\tau))\,d\tau-H^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega C(\tau)f(\tau,0)\,d\tau,$$

$$x_k(t)=H^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega C(\tau)A(\tau)\,d\tau\int\limits_\tau^t A(\sigma)x_{k-1}(\sigma)\,d\sigma+H^{-1}(\omega)\times$$

$$\times\int\limits_0^\omega C(\tau)A(\tau)\,d\tau\int\limits_\tau^t f(\sigma,x_{k-4}(\sigma))\,d\sigma-H^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega C(\tau)f(\tau,x_{k-3}(\tau))\,d\tau+$$

$$+H^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega B(\tau)f(\tau,x_{k-2}(\tau))\,d\tau-H^{-1}(\omega)\int\limits_0^\omega f(\tau,x_{k-1}(\tau))\,d\tau,$$

где $H(\omega)=\int\limits_0^\omega C(t)A(t)\,dt$.

Нетрудно видеть, что таким же образом можно получить алгоритмы нахождения ω-периодических решений уравнения (1) и в других аналогичных ситуациях.

1. *Лаптинский В. Н.* Об одном методе регуляризации периодической краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.— Минск: Институт физики АН БССР, 1979.— 15 с.
2. *Лаптинский В. Н.* Об одном итерационном методе в теории нелинейных колебаний.— Весці АН БССР. Сер. фіз-мат. навук, 1980, № 2, с. 6—12.
3. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I.— Укр. мат. журн., 1965, 17, № 4, с. 82—93.
4. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II.— Укр. мат. журн., 1966, 18, № 2, с. 50—59.
5. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. Киев : Вища школа, 1976.— 180 с.
6. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959.— 684 с.

Белорусская сельскохозяйственная академия
Могилевское отделение Института физики АН БССР

Поступила в редакцию 25.02.81