УДК 517.947.5.37

Я. Ф. Виннишин, М. Л. Горбачук

Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторных уравнений

Рассмотрим уравнение вида

$$dy(t)/dt + Ay(t) = 0, \quad t \in [0, \infty), \tag{1}$$

где A — самосопряженный положительный оператор в гильбертовом пространстве H, $(Af, f) \geqslant 0$, $\forall f \in \mathfrak{D}(A)$, $(.,.)$ — скалярное произведение в H. Вектор-функцию $y(t)$ со значениями в H назовем решением уравнения (1), если: а) $y(t)$ сильно непрерывна на $[0, \infty)$ и непрерывно дифференцируема в $(0, \infty)$; б) $y(t) \in \mathfrak{D}(A)$ при $t \in (0, \infty)$ ($\mathfrak{D}(A)$ — область определения оператора A); в) $y(t)$ удовлетворяет (1).

Нетрудно показать, что вектор-функция $y(t)$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда она представляется в виде

$$y(t) = \exp(-tA)f, \quad f \in H. \tag{2}$$

Это представление однозначно, при этом $f = y(0)$.

В случае, когда 0 принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, т. е. A положительно определен, любое решение $y(t)$ рассматриваемого уравнения стремится к нулю на ∞ экспоненциальным образом, т. е. $\|y(t)\| \leqslant c\exp(-\delta t)$, где $\delta = \inf\limits_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda$, $\sigma(A)$ — спектр оператора A, $c = \mathrm{const}$. Если же 0 принадлежит непрерывному спектру $\sigma_c(A)$ оператора A, то $y(t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0$ не обязательно экспоненциально.

В этой работе показывается, что порядок стремления $y(t)$ к нулю в последнем случае определяется степенью гладкости элемента $y(0)$ относительно оператора A^{-1}. В дальнейшем будем считать, что $0 \in \sigma_c(A)$, т. е. оператор A^{-1} существует положителен и самосопряжен.

Пусть $G(\lambda) > c$, $0 < c = \mathrm{const}$, — непрерывная на $[0, \infty)$ функция. На $\mathfrak{D}(G(A^{-1}))$ введем скалярное произведение $(f, g)_G = (G(A^{-1}) f, G(A^{-1}) g)$. При этом $\mathfrak{D}(G(A^{-1}))$ превращается в гильбертово пространство, которое обозначим $H_G = H_G(A^{-1})$.

Вектор $f \in H$ назовем бесконечно дифференцируемым относительно A^{-1}, если $f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}(A^{-n})$. Множество $H_\infty = H_\infty(A^{-1})$ всех таких векторов линейно и всюду плотно в H. Оно превращается в линейное локально выпуклое топологическое пространство, если в нем ввести топологию проективного предела гильбертовых пространств $H_n = H_{\lambda^{n+1}}$ [1, 2]: $H_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{pr.}\, H_n$.

Будем говорить, что вектор $f \in H_\infty$ принадлежит классу Жевре порядка β, $0 < \beta < \infty$, относительно оператора A^{-1}, если существуют положительные постоянные c, α такие, что

$$\| A^{-n} f \| \leqslant c\alpha^n n^{n\beta}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{3}$$

Множество всех векторов класса Жевре порядка β обозначим $G_{\{\beta\}} = G_{\{\beta\}}(A^{-1})$. При $\beta = 1$ оно совпадает с множеством аналитических векторов оператора A^{-1} [3]. Если через $G_\beta^\alpha = G_\beta^\alpha(A^{-1})$ обозначить совокупность всех $f \in H_\infty$, для которых выполнено (3) при фиксированном α, то $G_{\{\beta\}} = \bigcup\limits_\alpha G_\beta^\alpha$. Естественно снабдить его топологией индуктивного предела банаховых пространств G_β^α с нормой $\| f \|_{G_\beta^\alpha} = \sup\limits_n \dfrac{\| A^{-n} f \|}{\alpha^n n^{n\beta}}$, т. е. $G_{\{\beta\}} = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \mathrm{ind}\, G_\beta^\alpha$. Как показано в [2], $G_{\{\beta\}} = \lim\limits_{\alpha\to 0} \mathrm{ind}\, H_{\exp(\alpha\lambda^{1/\beta})}$.

Пусть функция $\gamma(t) \in C([0, \infty))$ такова, что $\gamma(t) \geqslant 0$, $\gamma(t) \underset{t\to\infty}{\to} \infty$ и $\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon : \gamma(t) \leqslant c_\varepsilon \exp(\varepsilon t)$. Положим

$$\tilde{\gamma}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\lambda t} \gamma(t)\, dt, \quad G(\lambda) = \left[\tilde{\gamma}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + 1\right]^{1/2}. \tag{4}$$

Очевидно, что $G(\lambda) \in C([0, \infty))$ и $G(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$.

Рассмотрим все те решения $y(t)$ уравнения (1), для которых $\int_0^\infty \| y(t) \|^2 \gamma(t)\, dt < \infty$. Их совокупность Y_γ образует гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(y, z)_\gamma = \int_0^\infty (y(t), z(t))\, \gamma(t)\, dt + (y(0), z(0)).$$

Ясно, что Y_γ содержит в себе все вектор-функции вида (2) с $f = E_\Delta$, $h \in H$, где E_λ — разложение единицы оператора A, Δ — произвольный интервал, размещенный на положительной полуоси на положительном расстоянии от нуля.

Лемма 1. *Решение $y(t)$ уравнения* (1) *принадлежит пространству Y_γ тогда и только тогда, когда $y(0) \in H_G(A^{-1})$, где функция $G(\lambda)$ выражается через $\gamma(t)$ по формуле* (4). *При этом отображение $Y_\gamma \ni y(t) \to y(0) \in H_G(A^{-1})$ — изометрический изоморфизм.*

Доказательство. В силу (2) и основной спектральной теоремы для самосопряженных операторов

$$\int_0^\infty \| y(t) \|^2 \gamma(t)\, dt = \int_0^\infty \| e^{-tA} f \|^2 \gamma(t)\, dt = \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-2\lambda t} d(E_\lambda f, f) \right\} \gamma(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \tilde{\gamma}(\lambda)\, d(E_\lambda f, f) = \int_0^\infty \tilde{\gamma}\left(\frac{1}{\mu}\right) d(F_\mu f, f),$$

где $F_\mu = E - E_{1/\mu}$, E — тождественный оператор. Очевидно, что F_μ — разложение единицы оператора A^{-1}. Поэтому

$$\| y \|_\gamma^2 = \int_0^\infty \| y(t) \|^2 \gamma(t)\, dt + \| f \|^2 = \int_0^\infty G^2(\lambda)\, d(F_\lambda f, f) = \| y(0) \|_G^2, \tag{5}$$

что и доказывает лемму.

Теорема 1. *Для того чтобы решение $y(t)$ уравнения (1) обладало свойством $\forall \alpha > 0\ \exists c_\alpha > 0 : \| y(t) \| \leqslant c_\alpha (1+t)^{-\alpha}$, необходимо и достаточно, чтобы $y(0) \in H_\infty(A^{-1})$.*

Доказательство. Положим $\gamma(t) = t^\alpha$, $\alpha > 0$. Нетрудно подсчитать, что в этом случае $G^2(\lambda) = \Gamma(\alpha+1)\lambda^{\alpha+1}/2^{\alpha+1} + 1$. Из леммы 1 следует, что для решения $y(t) = \exp(-tA) f$ уравнения (1)

$$H_{\frac{\alpha+1}{2}} = H_{\lambda^{(\alpha+1)/2}+1} = \mathfrak{D}(A^{-\frac{\alpha+1}{2}}) \Leftrightarrow \left\{ f : \int_0^\infty \| e^{-tA} f \|^2 t^\alpha dt < \infty \right\}.$$

Покажем, что $f \in \bigcap_{\alpha>0} H_\alpha$ тогда и только тогда, когда для всякого $\alpha > 0$ существует $c_\alpha = \mathrm{const} > 0$ такое, что

$$\| \exp(-tA) f \| \leqslant c_\alpha t^{-\alpha}, \quad t > 0. \tag{6}$$

Ясно, что неравенство (6) при любом α влечет включение $f \in \bigcap_{\alpha>0} H_\alpha$.

Обратно, пусть $f \in \bigcap_{\alpha>0} H_\alpha$.

Так как при $s \in \left[\frac{t}{2}, t\right]$ и произвольном $\alpha > \frac{1}{2}$ $s^{2\alpha-1} \| \exp(-sA) f \|^2 \geqslant (t/2)^{2\alpha-1} \| \exp(-tA) f \|^2$, то

$$\left(\frac{t}{2}\right)^{2\alpha} \| e^{-tA} f \|^2 \leqslant \int_{t/2}^{t} s^{2\alpha-1} \| e^{-sA} f \|^2 ds \leqslant \int_0^\infty s^{2\alpha-1} \| e^{-sA} f \|^2 ds < c'_\alpha < \infty.$$

Отсюда вытекает, что при $t > 0$ $\| \exp(-tA) f \| \leqslant c_\alpha t^{-\alpha}$, где $c_\alpha = 2^\alpha \sqrt{c'_\alpha}$. Поскольку $H_\infty(A^{-1}) = \bigcap_{\alpha>0} H_\alpha$, то теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что пространство H_∞ бесконечно дифференцируемых векторов оператора A^{-1} совпадает с множеством тех начальных данных задачи Коши для уравнения (1), для которых решения на ∞ убывают быстрее любой степени. Оказывается, что начальные данные задачи Коши, обеспечивающие более быстрое, чем степенное, убывание на ∞ являются более гладкими по сравнению с векторами из H_∞. Именно, имеет место теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы решение $y(t)$ уравнения (1) обладало свойством*

$$\exists c > 0,\ \exists \alpha > 0 : \| y(t) \| \leqslant c \exp(-\alpha t^p), \quad 0 < p < 1, \tag{7}$$

необходимо и достаточно, чтобы $y(0) \in G_{\{\beta\}}(A^{-1})$, где $\beta = (1-p)/p$.

Доказательство. Положим $\gamma_\alpha(t) = \exp(\alpha t^p)$, $\alpha > 0$, $0 < p < 1$. Тогда после замены $t = z\lambda^{-1/(1-p)}$ получим

$$\tilde{\gamma}_\alpha(\lambda) = \int_0^\infty e^{-2\lambda t} e^{\alpha t^p} dt = \lambda^{-1/(1-p)} \int_0^\infty \exp(\lambda^{-p/(1-p)}(\alpha z^p - 2z))\, dz.$$

Рассмотрим функцию $h_\alpha(z)=\alpha z^p-2z$, $\alpha>0$, $0<p<1$, и обозначим через $z_{0,\alpha}=(\alpha p/2)^{1/(1-p)}$ ее точку максимума. Так как для всех $z\in(0,\infty)$ $h''_\alpha(z)\leqslant 0$, то $h_\alpha(z)$ выпукла вверх. Поэтому при $z\in[0,z_{0,\alpha}]$ $h_\alpha(z)\geqslant h_\alpha(z_{0,\alpha})\,z/z_{0,\alpha}$. Отсюда следует, что

$$\tilde\gamma_\alpha(\lambda)=\lambda^{-1/(1-p)}\int_0^\infty \exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z))\,dz\geqslant\lambda^{-1/(1-p)}\int_0^{z_{0,\alpha}}\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z))\,dz\geqslant$$

$$\geqslant\lambda^{-1/(1-p)}\int_0^{z_{0,\alpha}}\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha})\,z/z_{0,\alpha})\,dz=$$

$$=\lambda^{-1/(1-p)}z_{0,\alpha}(\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha}))-1)/\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha})=$$

$$=z_{0,\alpha}/h(z_{0,\alpha})\,(\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha}))-1)/\lambda.$$

Из этой оценки следует, что для любого $0<\varepsilon<1$ существует константа $c_{\alpha,\varepsilon}>0$ такая, что

$$\tilde\gamma_\alpha(\lambda)\geqslant c_{\alpha,\varepsilon}\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha})(1-\varepsilon)) \tag{8}$$

при $\lambda\in[0,b]$, где b — любое конечное число.

Пусть $z_{1,\alpha}=(\alpha/2)^{1/(1-p)}$, $h_\alpha(z_{1,\alpha})=0$. Для $z\in[0,z_{1,\alpha}]$ $h_\alpha(z)\leqslant h_\alpha(z_{0,\alpha})$, а для $z\in[z_{1,\alpha},\infty]$ $h_\alpha(z)\leqslant h'_\alpha(z_{1,\alpha})(z-z_{1,\alpha})$, $h'_\alpha(z_{1,\alpha})<0$. Поэтому

$$\tilde\gamma_\alpha(\lambda)=\lambda^{-1/(1-p)}\int_0^\infty\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z))\,dz\leqslant\lambda^{-1/(1-p)}\int_0^{z_{1,\alpha}}\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha}))\,dz+$$

$$+\lambda^{-1/(1-p)}\int_{z_{1,\alpha}}^\infty\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h'_\alpha(z_{1,\alpha})(z-z_{1,\alpha}))\,dz=$$

$$=\lambda^{-1/(1-p)}z_{1,\alpha}\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha}))+1/\lambda\,(-h'_\alpha(z_{1,\alpha})).$$

Отсюда вытекает, что для любых $\alpha>0$, $\varepsilon>0$, существует постоянная $K_{\alpha,\varepsilon}>0$ такая, что

$$\tilde\gamma_\alpha(\lambda)\leqslant K_{\alpha,\varepsilon}\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha})(1+\varepsilon)). \tag{9}$$

Учитывая тот факт, что функции $\tilde\gamma_\alpha(\lambda)$ и $\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha})(1\pm\varepsilon))-1$ стремятся к нулю при $\lambda\to\infty$, из (8) и (9) приходим к оценке

$$\forall\alpha>0,\ \forall\varepsilon\in(0,1)\ \exists K^1_{\alpha,\varepsilon}>0,\ \exists K^2_{\alpha,\varepsilon}>0: K^1_{\alpha,\varepsilon}\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha})\times$$

$$\times(1-\varepsilon))\leqslant\tilde\gamma(\lambda)+1\leqslant K^2_{\alpha,\varepsilon}\exp(\lambda^{-p/(1-p)}h_\alpha(z_{0,\alpha})(1+\varepsilon)).$$

Из этой оценки и того, что $h_\alpha(z_{0,\alpha})\to 0$ при $\alpha\to 0$, следует, что

$$G_{\{\beta\}}(A^{-1})=\liminf_{\alpha\to 0}\operatorname{ind} H_{\exp(\alpha\lambda^{1/\beta})}(A^{-1})=\lim_{\alpha\to 0}\operatorname{ind} H_{G_\alpha}(A^{-1}),$$

где $G_\alpha(\lambda)=(\tilde\gamma_\alpha(1/\lambda)+1)^{1/2}$, $\beta=p/(1-p)$.

По лемме $(y(0)\in H_{G_\alpha}(A^{-1}))\Leftrightarrow\left(\int_0^\infty\|y(t)\|^2\exp(\alpha t^p)\,dt<\infty\right)$, а потому

$$(y(0)\in G_{\{\beta\}}(A^{-1}))\Leftrightarrow\left(\exists\alpha>0,\ \exists c_\alpha>0:\int_0^\infty\|y(t)\|^2\exp(\alpha t^p)\,dt\leqslant c_\alpha\right). \tag{10}$$

Последнее эквивалентно поточечной оценке

$$\| y(t) \| \leqslant c \exp(-\alpha' t^p). \tag{11}$$

В самом деле, если для $y(t)$ выполняется (11), то непосредственно можно проверить, что имеет место и правая часть соотношения (10). Обратно, пусть для решения $y(t) = \exp(-tA) f$ уравнения (1) выполняется (10). Учитывая, что для $s \in [t/2, t]$

$$\| \exp(-sA) f \|^2 \exp(\alpha s^p) \geqslant \| \exp(-tA) f \|^2 \exp(\alpha (t/2)^p),$$

получаем неравенства

$$t/2 \| \exp(-tA) f \|^2 \exp \alpha (t/2)^p \leqslant \int_{t/2}^{t} \| \exp(-sA) f \|^2 \exp(\alpha s^p)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \| \exp(-sA) f \|^2 \exp(\alpha s^p)\, ds \leqslant c,$$

т. е.

$$\| \exp(-tA) f \| \leqslant \sqrt{2ct^{-1}} \exp(-\alpha t^p / 2^{p+1}).$$

Теорема доказана.

Следствие. *Вектор f аналитический для оператора A^{-1} тогда и только тогда, когда* $\| \exp(-tA) f \| \leqslant c \exp(-\alpha t^{1/2})$.

Пример. Пусть $H = L^2(-\infty, \infty)$, A — замыкание в $L^2(-\infty, \infty)$ оператора $f \to -d^2 f/dx^2$ с финитных бесконечно дифференцируемых функций. Тогда уравнение (1) будет иметь вид

$$\partial u(x, t)/\partial t = \partial^2 u(x, t)/\partial x^2, \ t > 0, \ x \in (-\infty, \infty). \tag{12}$$

Из теорем 1,2 следует, что решение $u(x, t)$ задачи Коши $u(x, 0) = f(x) \in \in L^2(-\infty, \infty)$ для уравнения (12) ведет себя на ∞ как $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2\, dx = = o(t^{-k})$ $\forall k = 1, 2, \ldots$, тогда и только тогда, когда существуют интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 \lambda^{2n} d\lambda$ при любом натуральном n; здесь $\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Фурье функции f. Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx \leqslant c \exp(-\alpha t^p), \ 0 < p < 1, \ \alpha = \mathrm{const} > 0, \ c = \mathrm{const} > 0,$$

тогда и только тогда, когда существует α' такое, что

$$\sup_n \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\lambda)|^2 \lambda^{-4n} d\lambda / (\alpha')^n n^{\beta n} < \infty, \quad \beta = (1-p)/p.$$

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах.— М.: Физматгиз, 1959.— 684 с.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные значения решений некоторых классов дифференциальных уравнений.— Мат. сб., 1977, 102, № 1, с. 124—150.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики.— М.: Мир, 1978.— Т. 2. 395 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
10.08.82