УДК 513.88

Т. Я. Азизов, М. Я. Шлякман

Об эффекте Кюне — Иохвидова — Штрауса

В [1] впервые исследовались не вполне непрерывные ограниченные J-положительные («индефинитную» терминологию и символику см., например, в [2]) операторы A, степень которых вполне непрерывна ($A^n \in \mathfrak{S}_\infty$). Однако вопрос существования таких операторов оставался открытым. Затем в [3] был построен пример такого J-положительного непрерывного оператора $A \notin \mathfrak{S}_\infty$, что $A^2 \in \mathfrak{S}_\infty$. В [4] эти исследования завершаются доказательствами того, что если A — J-неотрицательный ограниченный оператор и при некотором натуральном n оператор A^n вполне непрерывен, то и $A^2 \in \mathfrak{S}_\infty$. Эту серию несколько неожиданных результатов мы и называем эффектом Кюне—Иохвидова—Штрауса.

В общем же случае, если отказаться от J-неотрицательности оператора A, нетрудно убедиться, что аналогичный результат не может быть получен. Однако для некоторых классов операторов, а именно для операторов класса $\mathcal{K}(H)$ и дефинизируемых операторов справедливы в этом плане определенные закономерности. Об этом и пойдет речь в настоящей заметке.

1. Напомним и модернизируем некоторые определения.

Определение 1. *Максимальное семидефинитное подпространство $\mathfrak{L}_0$ будем называть инвариантным относительно J-самосопряженного оператора A с областью определения $\mathfrak{D}(A)$, если $A(\mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{L}_0) \subset \mathfrak{L}_0$ и существует пара невещественных регулярных точек оператора $A|\mathfrak{L}_0$ $(\xi, \bar{\xi} \in \rho(A|\mathfrak{L}_0))$.*

Определение 2. *J-самосопряженный оператор A с $\rho(A) \neq \varnothing$ назовем оператором класса (H), если у него существует хотя бы одно максимальное семидефинитное инвариантное подпространство и любое из таких подпространств разлагается в сумму равномерно дефинитного и конечномерного нейтрального.*

Определение 3. *Скажем, что J-самосопряженный оператор A с $\rho(A) \neq \varnothing$ принадлежит классу $\mathcal{K}(H)$ $(A \in \mathcal{K}(H))$, если существует такой J-самосопряженный оператор $B \in (H)$, что резольвенты операторов A и B коммутируют.*

Определение 4. *Будем говорить, что оператор $A \in \tilde{\mathfrak{S}}_\infty$, если $\mathbf{C} \setminus \{0\} \subset \tilde{\rho}(A)$, где через $\tilde{\rho}(A)$ обозначено множество нормальных точек оператора A, т. е. если $\lambda_0 \in \tilde{\rho}(A)$, то либо $\lambda_0 \in \rho(A)$, либо λ_0 — нормально отщепляющееся конечнократное собственное значение оператора A.*

2. Прежде всего сформулируем такой результат.

Теорема 1. *J-самосопряженный оператор A принадлежит классу $\mathcal{K}(H)$ тогда и только тогда, когда у него существует максимальное неотрицательное инвариантное подпространство, представимое в виде прямой суммы конечномерного нейтрального и равномерного положительного подпространств.*

Следствие 1. *Если $A \in \mathcal{K}(H)$, то существуют такие непрерывный равномерно положительный оператор W, самосопряженный оператор A_1 и конечномерный оператор A_2, что $A = W^{-1}A_1W + A_2$.*

Это следствие позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если $A \in \mathcal{K}(H)$ и при некотором натуральном n оператор A^n вполне непрерывен, то и $A \in \tilde{\mathfrak{S}}_\infty$.*

В частности, этот результат справедлив для всех J-самосопряженных операторов A, действующих в пространстве Понтрягина $\Pi_\varkappa$, так как такие A принадлежат классу (H) и, тем более, классу $\mathscr{K}(H)$.

3. Обратимся к дефинизируемым J-самосопряженным операторам.

Теорема 3. *Пусть A $(\in \tilde{\mathfrak{S}}_\infty)$ — непрерывный дефинизируемый самосопряженный оператор, F_A — множество дефинизирующих его функций. Тогда $f(A)A \in \mathfrak{S}_\infty$ при всех $f \in F_A$.*

Теорема 4. *В условиях теоремы 3 оператор $A^{n(0)+1}$ вполне непрерывен, где $n(0) = \min\{n_p : n_p$ — кратность нуля как корня многочлена $p \in F_A\}$.*

Следствие 2. *Если $A(\in \tilde{\mathfrak{S}}_\infty)$ — непрерывный J-неотрицательный оператор, то $A^2 \in \mathfrak{S}_\infty$.*

4. В этом пункте укажем схему построения ограниченных J-неотрицательных операторов таких, что $A \notin \mathfrak{S}_\infty$, но при этом $A^2 \in \mathfrak{S}_\infty$. Заметим, что пример из [3] укладывается в эту схему.

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ — бесконечномерные сепарабельные гильбертовы пространства, W — изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1$, A_i — ограниченный неотрицательный оператор в $\mathfrak{H}_i$, $i = 1, 2$, причем $A_1 W A_2 \in \mathfrak{S}_\infty$, но хотя бы один из операторов A_1 и A_2 не вполне непрерывен. Тогда оператор A, определенный следующим образом: $A \mid \mathfrak{H}_1 = W^* A_1$, $A \mid \mathfrak{H}_2 = W A_2$, J-неотрицателен, где $J : J \mid \mathfrak{H}_1 = W^*$, $J \mid \mathfrak{H}_2 = W$. При этом $A \notin \mathfrak{S}_\infty$, но $A^2 \in \mathfrak{S}_\infty$.

1. *Kühne R.*— Über eine Klasse J-selbstadjungierter Operatoren.— Math. Ann., 1964, 154, N 1, S. 56—69.
2. *Азизов Т. Я.*, *Иохвидов И. С.* Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения.— Мат. анализ. Итоги науки и техники, 1979, 17, с. 115—207.
3. *Иохвидов И. С.* Об операторах с вполне непрерывными итерациями.— Док. АН СССР, 1963, 153, № 2, с. 258—261.
4. *Штраус В. А.* О спектральном разложении Q-неотрицательных операторов в правильных ($\mathfrak{B}$, Q)-пространствах.— Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат., 1972, 21, № 4, с. 360—363

Воронежский
государственный университет

Поступила в редакцию
03.01.82