УДК 517.972.2

В. О. Яндаров

Исследование некоторых классов функциональных $\mathcal{B}$-пространств

В статье построены и исследованы функциональные $\mathcal{B}$-пространства путем обобщения известных обобщенных $\mathcal{B}$-пространств Гельдера (см., например, [1, 3, 5]). В рассматриваемом классе $\mathcal{B}$-пространств установлены критерии слабой сходимости и слабой компактности, сильной сходимости и сильной компактности.

1. Пусть X — сепарабельное $\mathcal{B}$-пространство над полем комплексных или действительных чисел. Введем в рассмотрение две неотрицательные функции $\varphi(\tau, x)$ и $\omega(\tau, x)$, определенные на $(0, 1]\times X$, $\tau\in(0, 1]$, $x\in X$: функция $\omega(\tau, x)$ обладает всеми свойствами модуля непрерывности [1] относительно $\tau\in(0, 1]$; функция $\varphi(\tau, x)$ удовлетворяет условиям:

1) $\varphi(\tau, x)$ — непрерывная функция относительно $\tau\in(0, 1)$;

2) $\varphi(\tau, \lambda x) = |\lambda|\varphi(\tau, x)$, где λ — скаляр;

3) $\varphi(\tau_1+\tau_2, x)\leqslant\varphi(\tau_1, x)+\varphi(\tau_2, x)$; $\forall\tau_1, \tau_2\in(0, 1]$ и $x\in X$;

4) $\varphi(\tau, x_1+x_2)\leqslant\varphi(\tau, x_1)+\varphi(\tau, x_2)$, $x_1, x_2\in X$;

5а) $\|x_n-x\|_X\to 0$ при $n\to\infty$, где $\|\cdot\|_X$ — норма в X, влечет поточечную сходимость $\{\varphi(\tau, x_n)\}$; 5б) для любого $\tau_0\in(0, 1]$ существует положительная постоянная M_{τ_0} такая, что $\sup\{\varphi(\tau, x):\tau\in[\tau_0, 1]\}\leqslant M_{\tau_0}\|x\|_X$ для любых $x\in X$;

6) существует хотя бы один элемент $x\in X$ такой, что $\sup\{\varphi(\tau, x): :\tau\in(0, 1]\}<\infty$, $\lim\limits_{\tau\to 0}\varphi(\tau, x)\neq 0$;

7) если $\varphi(\tau, x)\neq 0$, $\tau\in(0, 1]$, то функция $\omega(\tau, x)/\varphi(\tau, x)$ не зависит от x, а относительно $\tau\in(0, 1]$ не убывает, кроме того $\lim\limits_{\tau\to 0}[\omega(\tau, x)/\varphi(\tau, x)] = 0$;

8) множества $X_\varphi=\{x\in X:\sup\limits_\tau\varphi(\tau, x\}<\infty\}$ и $X_\varphi^0=\{x\in X_\varphi: \lim\limits_{\tau\to 0}\varphi(\tau, x)=0\}$ представляют бесконечномерные линейные нормированные пространства с нормой $\|x\|_\varphi=\|x\|_X+\sup\{\varphi(\tau, x):\tau\in(0, 1]\}$, $x\in X_\varphi^0\,(X_\varphi)$.

Нетрудно доказать, что $X_\varphi^0\,(X_\varphi)$ компактно вложено в X.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *X_φ^0 и X_φ — $\mathcal{B}$-пространства над тем же числовым полем, что и X.*

Доказательство. Докажем сначала полноту пространства X_φ. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность Коши в X_φ. Поскольку X — B-пространство, существует элемент $x_0\in X$ такой, что выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|_X=0. \tag{1}$$

Как известно, последовательность Коши ограничена, т.е. существует постоянная $M>0$ такая, что $\|x_n\|_\varphi\leqslant M$, поэтому выполняется неравенство $\varphi(\tau, x_n)\leqslant M$, $n=1,2,\ldots$. Отсюда в силу свойства 5а) или 5б) и равенства (1) имеет место неравенство $\varphi(\tau, x_0)\leqslant M$. Следовательно, $x_0\in X_\varphi$. Применяя известный принцип продолжения неравенств, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|_\varphi=0. \tag{2}$$

Для доказательства полноты пространства X_φ^0 достаточно доказать, что предельный элемент x_0 последовательности Коши $\{x_n\} \subset X_\varphi^0$ принадлежит X_φ. Последнее следует из равенства (2). В самом деле, на основании свойства 4) функции $\varphi(\tau, x)$ имеет, что $\{\varphi(\tau, x_n)\}$ равномерно сходится в $(0, 1]$ при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\tau, x_n) = \varphi(\tau, x_0) \tag{3}$$

для всех $\tau \in (0, 1]$. Отсюда следует, что $x_0 \in X_\varphi^0$. Теорема доказана.

Определение. *Будем говорить, что последовательность $\{x_n\} \subset X_\varphi$ слабо (*) сходится к $x_0 \in X_\varphi$, если она обладает свойствами: 1) $\{x_n\}$ сходится к x_0 по норме $\|\cdot\|_X$; 2) $\{x_n\}$ ограничена по норме $\|\cdot\|_\varphi$ пространства X_φ. Определенную этой сходимостью топологию назовем топологией (*).*

Теорема 2. *$\mathcal{B}$-пространство X_φ полно в смысле топологии (*).*

Доказательство незначительно отличается от доказательства теоремы 1.

2. Исследуем условия сильной сходимости последовательностей и плотность множеств в X_φ^0 и X_φ.

Лемма 1. *Пусть x_n, $x_0 \in X_\varphi^0 (X_\varphi)$, $n = 1, 2, \ldots$, и удовлетворяются следующие условия: 1) $\|x_n - x_0\|_X \to 0$ при $n \to \infty$; 2) $\varphi(\tau, x_0) \neq 0$; 3) для любых n и $\tau_1, \tau_2 \in (0, 1]$ выполняется неравенство*

$$|\varphi(\tau_1, x_n) - \varphi(\tau_2, x_n)| \leqslant \varphi(|\tau_1 - \tau_2|, x_n). \tag{4}$$

Тогда для всех n будет существовать такая положительная постоянная M, для которой будет выполняться неравенство

$$\|x_n\| \leqslant M \|x_0\|_\varphi. \tag{5}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать неравенство

$$\sup\{\varphi(\tau, x_n) : 0 < \tau \leqslant 1\} \leqslant M \sup\{\varphi(\tau, x_0) : \tau \in (0, 1]\}. \tag{6}$$

Допустим, что неравенство (6) не выполняется. Тогда для любого целого $k > 0$ существует n_k такое, что

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(\tau_k, x_{n_k}) / \varphi(\tau_0, x_0) = \infty. \tag{7}$$

Из последовательности $\{\tau_k\}$ можно извлечь убывающую подпоследовательность $\{\tau_k\}$, сходящуюся к некоторой точке $\tau \in [0, 1]$. Возможны два случая: α) $\tau_0 > 0$; β) $\tau_0 = 0$. Из условия 1) на основании свойства 5а) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\tau, x_n) = \varphi(\tau, x_0) \tag{8}$$

для любого $\tau \in (0, 1]$, при этом равенство (8) выполняется равномерно на любом компактном подмножестве в $(0, 1]$. Следовательно, случай α) невозможен. Рассмотрим случай β). Не умаляя общности, предположим, что $\varphi(\tau_0, x_0) = 1$. Тогда согласно (7) для любого положительного числа M_1 будет существовать $N(M_1)$ такой, что

$$\varphi(\tau_k, x_{n_k}) > M_1 \quad \forall k > N(M_1). \tag{9}$$

Так как $x_0 \in X_\varphi^0$ и для любого $\tau \in (0, 1]$ выполняется равенство (8), то для любого $\varepsilon > 0$ $\left(\varepsilon < \frac{1}{3} M_1\right)$ существуют $\tau_1 > 0$ и $N(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$\varphi(\tau_1, x_{n_k}) \leqslant \varepsilon \quad \forall k \geqslant N(\varepsilon). \tag{10}$$

Положим $m = \max\{N(M_1), N(\varepsilon)\}$. Из условия 3) леммы и неравенств (9) и (10) следует неравенство

$$\varphi(|\tau_k - \tau_1|, x_{n_k}) \geqslant |\varphi(\tau_k, x_{n_k}) - \varphi(\tau_1, x_{n_k})| =$$

$$= \varphi(\tau_k, x_{n_k}) - \varphi(\tau_1, x_{n_k}) \geqslant \frac{2}{3} M_1 \quad \forall k \geqslant m. \tag{11}$$

Неравенство (11) при $k \to \infty$ переходит в

$$\varphi(\tau_1, x_0) \geqslant \frac{2}{3} M_1. \tag{12}$$

В самом деле, на основании свойства 4) функции $\varphi(\tau, x)$ имеем

$$|\varphi(|\tau_k - \tau_1|, x_{n_k}) - \varphi(\tau_1, x_0)| \leqslant \varphi(|\tau_k - \tau_1|, x_{n_k} - x_0) +$$

$$+ |\varphi(|\tau_k - \tau_1|, x_0) - \varphi(\tau_1, x_0)|. \tag{13}$$

Тогда в силу свойства 5б) функции $\varphi(\tau, x)$ можно будет указать целое положительное число k_0 такое, что будет выполняться неравенство

$$\sup\{\varphi(|\tau_k - \tau_1|, x_{n_k} - x_0) : \tau_1 - \tau_{k_0} \leqslant \tau_1 - \tau_k \leqslant \tau_1\} \leqslant$$

$$\leqslant M_{\tau_{k_0}} \| x_{n_k} - x_0 \|_X \quad \forall k \geqslant k_0, \tag{14}$$

где $M_{\tau_{k_0}}$ — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $k \geqslant k_0$. Из условия 1) и неравенства (14) следует равенство

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(|\tau_k - \tau_1|, x_{n_k} - x_0) = 0. \tag{15}$$

В силу свойства 1) функции $\varphi(\tau, x)$ имеем

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(|\tau_k - \tau_1|, x_0) = \varphi(\tau_1, x_0). \tag{16}$$

Из равенств (15), (16) и неравенства (13) при $k \to \infty$ следует неравенство (12). Далее, переходя в неравенстве (10) к пределу при $k \to \infty$, в силу неравенства (8) получим $\varphi(\tau_1, x_0) \leqslant \varepsilon$. Это неравенство противоречит неравенству (12). Противоречие доказывает справедливость неравенства (6), из которого следует (5).

Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть x_n, $x_0 \in X^0_\varphi$, $n = 1, 2, \ldots$, $\varphi(\tau, x_0) \neq 0$ и для любого n и всех $\tau_1, \tau_2 \in (0, 1]$ выполняется неравенство* (4). *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась по норме $\|\cdot\|_\varphi$ к элементу x_0, необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство* (1).

Доказательство. Достаточность. Согласно лемме 1 из (1) следует ограниченность $\{x_n\}$ по норме $\|\cdot\|_\varphi$. Докажем, что из (1) следует равностепенная непрерывность последовательности $\{\varphi(\tau, x_n)\}$ в некоторой окрестности точки $\tau = 0$, принадлежащей $(0, 1]$. Пусть это не так. Тогда будет существовать $\varepsilon > 0$ такое, что для любого k будут существовать τ_k и n_k, для которых выполняется неравенство

$$\varphi(\tau_k, x_{n_k}) > \varepsilon. \tag{17}$$

Из равенства (1) в силу свойства 5а) следует поточечная сходимость последовательности $\{\varphi(\tau, x_n)\}$, т. е. имеет место равенство (8) для любого $\tau \in (0, 1]$. Так как $x_n, x_0 \in X^0_\varphi$, $n = 1, 2, \ldots$, то равенство (8) равносильно тому, что для любого $\varepsilon_1 > 0$ $\left(\varepsilon_1 < \frac{1}{4}\varepsilon\right)$ существуют $\tau_0 \in (0, 1]$ и $N(\varepsilon_1) > 0$ такие, для которых выполняется неравенство

$$\varphi(\tau_0, x_{n_k}) \leqslant \varepsilon_1 \quad \forall k \geqslant N(\varepsilon_1). \tag{18}$$

Из неравенств (4), (17), (18) следует

$$\varphi(|\tau_0 - \tau_k|, x_{n_k}) \geqslant \frac{3}{4}\varepsilon \quad \forall k \geqslant N(\varepsilon_1). \tag{19}$$

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 1, из (19) при $k \to \infty$ получим

$$\varphi(\tau_0, x_0) \geqslant \frac{3}{4}\varepsilon. \tag{20}$$

С другой стороны, переходя в неравенстве (18) к пределу при $k \to \infty$ и используя свойство 5а), имеем

$$\varphi(\tau_0, x_0) \leqslant \varepsilon_1 < \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Последнее неравенство противоречит (20). Следовательно, неравенство (17) неверно и $\{\varphi(\tau, x_n)\}$ — равностепенно непрерывная последовательность в некоторой окрестности точки $\tau = 0$ из $(0, 1]$. Из последнего и равенства (1) на основании теоремы из [8], с. 569—570, следует равенство (2). Теорема доказана.

Теорема 4. *Шар* $B^0_\varphi = \{x \in X^0_\varphi : \|x\|_\varphi \leqslant 1\}$ *всюду плотен в шаре* $B_\varphi = \{x \in X_\varphi : \|x\|_\varphi \leqslant 1\}$ *по норме, индуцированной нормой пространства* X.

Доказательство. Так как пространство непрерывных на $[0, 1]$ функций $C(0, 1)$ универсально в классе сепарабельных B-пространств, поэтому, не умаляя общности, можно положить $X = C(S)$, где S — замыкание ограниченной области в n-мерном евклидовом пространстве E_n. Рассмотрим функцию Стеклова

$$S_{h_n}(x_0)(t) = \frac{1}{V(h_n)} \int\limits_{V(t, h_n)} x_0 dv, \quad x_0 \in B_\varphi, \tag{21}$$

где $V(t, h_n)$ — шар с центром в точке $t \in S$ и радиуса h_n ($h_n \to 0$ при $n \to \infty$), $V(h_n)$ — мера шара. Продолжим функцию $x_0(t)$ линейно и непрерывно вне S [9]. Нетрудно проверить, что последовательность $\{S_{h_n}(x_0)\}$ равномерно сходится к x_0 в S. А вместе с неравенством $\|S_{h_n}(x_0)\|_\varphi \leqslant \|x_0\|_\varphi$ это влечет требуемое утверждение, так как $S_{h_n}(x_0)$ при каждом n непрерывно дифференцируема.

Следствие 1. $X^0_\varphi(X_\varphi)$ *всюду плотно в* X *по норме* $\|\cdot\|_X$.

Теорема 5. *Второе топологическое сопряженное* X^{0**}_φ *к пространству* X^0_φ *изометрически изоморфно пространству* X_φ, *если в* X_φ *ввести норму*

$$\|x\|_\varphi = \max\{\|x\|_X, \ \sup_\tau \varphi(\tau, x)\}, \quad x \in X_\varphi,$$

эквивалентную прежней норме $\|\cdot\|_\varphi$ *в* X_φ (см. п. 1).

Доказательство основано на применении свойств функций Стеклова (21) и общих свойств (*)-слабо сходящихся последовательностей и, кроме того, плотности топологического сопряженного X^* к пространству X в топологическом сопряженном X^{0*}_φ к пространству X^0_φ в топологии, индуцированной нормой $\mathcal{B}$-пространства X^{0*}_φ.

Последний факт устанавливается следующей леммой.

Лемма 2. *$\mathcal{B}$-пространство* X^* *всюду плотно в $\mathcal{B}$-пространстве* X^{0*}_φ *по норме* $\|\cdot\|^*_\varphi$.

Доказательство следует из того, что X^* — тотальное подмножество в X^{0*}_φ и X^* компактно вложено в X^{0*}_φ.

Следствие 2. X^{0*}_φ—сепарабельное *$\mathcal{B}$-пространство*.

Теорема 6. *Пусть для всех элементов множества* $K \subset X^0_\varphi$ *выполняется неравенство* (4). *Тогда следующие условия эквивалентны:* 1) K *отно-*

сительно компактно (компактно в себе) в X_φ^0; 2) *K относительно слабо компактно (слабо компактно в себе) в* X_φ^0.

Доказательство основано на применении теоремы 3.

Теорема 7. *В пространстве* X *можно ввести такую норму* $\|\cdot\|_1$, *эквивалентную прежней норме* $\|\cdot\|_X$, *что последовательность* $\{x_n\}\subset K$, *для которой имеет место* (4), *будет сходиться по норме* $\|\cdot\|_\varphi$ *к элементу* $x_0\in X_\varphi^0$ *тогда и только тогда, когда будут иметь место условия:* 1) $\langle x^*, x_n\rangle$ *сходится при любом* x^* *из некоторого всюду плотного подмножества в* X^*; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n\|_1=\|x_0\|_1$, *где* $x_0\in X_\varphi^0$.

Доказательство. Согласно теореме из [2] и ее обобщения [9] условия 1) и 2) равносильны сходимости последовательности $\{x_n\}$ к $x_0\in X_\varphi^0$ по норме $\|\cdot\|_1$. Так как $\|\cdot\|_1$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_X$, то отсюда следует сходимость по норме $\|\cdot\|_X$. Далее, на основании теоремы 3 заключаем, что $\{x_n\}$ сходится к $x_0\in X_\varphi$. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть для всех элементов множества* $K\subseteq X_\varphi^0$ *выполняется неравенство* (4). *В пространстве* X_φ^0 *можно ввести норму* $\|\cdot\|_1$ *такую, что множество* K *будет компактным в* X_φ^0 *по норме* $\|\cdot\|_\varphi$ *тогда и только тогда, когда из любой последовательности* $\{x_n\}\subset K$ *можно выделить подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$, *для которой имеет место равенство*

$$\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}\|_1=\|x_0\|_1,\quad x_0\in X_\varphi^0.$$

Теорема 8. *Для того чтобы последовательность* $\{x_n\}\subset X_\varphi^0$ *сходилась к элементу* $x_0\in X_\varphi^0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:* 1) $\|x_n-x_0\|\to 0$ *при* $n\to\infty$ *и* $x_0\in X_\varphi^0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\{\varphi(\tau,x_n):\ 0<\tau\leqslant\delta\}=\sup\{\varphi(\tau,x_0):\ 0<\tau\leqslant\delta\}$.

Доказательство следует из того, что для любого n функция $\sup\limits_{\tau\leqslant\delta}\varphi(\tau,x_n)$ удовлетворяет неравенству (4), которое вместе с условием 1), согласно теореме 3, влечет условие 2).

3. Пусть функция $\varphi_i(\tau,x)$, $i=1, 2, 3$, удовлетворяет всем условиям 1) — 8) п. 1 и $\mathscr{B}$-пространство X_{φ_1} компактно вложено в X_{φ_3}, а $\mathscr{B}$-пространство X_{φ_2} промежуточное между X_{φ_1} и X_{φ_3}; X_{φ_1} либо компактно вложено в X_{φ_2}, либо совпадает с ним, а X_{φ_2} либо компактно вложено в X_{φ_3}, либо совпадает с ним. Имеет место следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть линейный оператор* A *действует в* X_{φ_1}, *т. е.* $A: X_{\varphi_1}\to X_{\varphi_1}$, *и является ограниченным линейным оператором в* X_{φ_3}. *Тогда он будет ограниченным линейным оператором в* X_{φ_2}.

Доказательство. Ограниченность оператора $A: X_{\varphi_1}\to X_{\varphi_1}$ следует из его замкнутости: из $x_n\to x$ по норме $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ и $Ax_n\to y$ по норме $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ при $n\to\infty$ следует, в силу ограниченности оператора A в X_{φ_3} и компактности вложения X_{φ_1} в X_{φ_3}, что $x\in X_{\varphi_1}$ и $y=Ax$. Если $X_{\varphi_1}=X_{\varphi_2}$ или $X_{\varphi_2}=X_{\varphi_3}$, тогда теорема доказана. Предположим, что ни одно из последних равенств не выполняется. В силу следствия 2 леммы 2 получаем, что оператор A действует в $X_{\varphi_2}^0$, а из теоремы 4 следует, что $X_{\varphi_2}^0$ всюду плотно в X_{φ_2} в топологии (*). Кроме того, слабо (*) сходящаяся последовательность в X_{φ_2} будет сходящейся в X_{φ_3}. Следовательно, оператор A действует и ограничен в X_{φ_2}. Теорема доказана.

Следствие 4. *Для того чтобы оператор* $\mathbf{A}$, *действующий в* X_φ^0 (X_φ) *был ограничен в* X_φ^0 (X_φ) *достаточно, чтобы он был ограничен в* X_φ^0 (X_φ) *по норме* $\|\cdot\|_X$.

Из теоремы 9, в частности, вытекает один результат статьи [10].

Теорема 10. *Пусть* Y — $\mathscr{B}$*-пространство. Для того чтобы ограниченный линейный оператор* $A: X_\varphi\to Y$ *был компактным, необходимо и достаточно, чтобы* A *переводил слабо* (*) *сходящиеся последовательности в сильно сходящиеся в* Y.

Доказательство. Необходимость. В силу теоремы 5 и компактности оператора A получаем, что оператор $(A\circ j)X_\varphi^{0**}$, где j — изометрический изоморфизм между X_φ^{0**} и X_φ, непрерывен относительно X_φ^{0*}- и Y^*-топологий пространств X_φ^{0**} и Y соответственно. Отсюда следует требуемое утверждение.

Достаточность. Так как пространство X_φ компактно вложено в X, поэтому всякое ограниченное множество B_φ в X_φ будет относительно компактно в X по норме или в топологии (*). Следовательно, множество $A(B_\varphi)$ относительно компактно в Y.

Теорема доказана.

4. Пусть $X = C(L)$, где L — гладкий замкнутый контур в плоскости комплексного переменного. Через $X_\varphi^+(X_\varphi^-)$ обозначим подпространство в X_φ, состоящее из функций $f\in X_\varphi$, являющихся предельными значениями слева (справа) относительно положительно ориентированного контура L функций, голоморфных внутри и вне L и обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке. Нетрудно доказать, что $X_\varphi^+ \cdot X_\varphi^-)$—замкнутое подпространство в X_φ.

Теорема 11. *Для того чтобы $\mathscr{B}$-пространство X_φ (X_φ^0) представляло прямую сумму $\mathscr{B}$-пространств X_φ^+ (X_φ^{0+}) и X_φ^- (X_φ^{0-}), т. е.*

$$X_\varphi = X_\varphi^+ \oplus X_\varphi^- \quad (X_\varphi^0 = X_\varphi^{0+} \oplus X_\varphi^{0-}), \tag{22}$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор $S: X_\varphi \to X_\varphi$ [11]

$$S(f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - t}$$

был ограничен в X_φ (X_φ^0).

Доказательство. Пусть имеет место (22), тогда получим

$$S\Phi^+ = \Phi^+,\quad \Phi^+\in X_\varphi^+,\quad S\Phi^- = -\Phi^-,\quad \Phi^-\in X_\varphi^-.$$

Из этих равенств следует, что $S: X_\varphi \to X_\varphi$. Отсюда и из (22) следует, что оператор S ограничен в X_φ. Обратно, если оператор $S: X_\varphi \to X_\varphi$ ограничен, то оператор $P_1(f) = \frac{1}{2}(f + Sf)$ $\left(P_2(f) = \frac{1}{2}(-f + Sf)\right)$, $f\in X_\varphi$, будет проектором из X_φ на X_φ^+ (X_φ^-). Существование проектора P_1 (P_2) влечет выполнение равенства (22). Теорема доказана.

В пространствах X_φ (X_φ^0) можно рассмотреть известную задачу линейного сопряжения (задачу Римана) [11]. Из теоремы 11 можно получить критерий разрешимости этой задачи, а также сингулярного интегрального уравнения.

5. Рассмотрим класс $\mathscr{B}$-пространств, который можно построить, отправляясь от пространств $X_\varphi(X_\varphi^0)$. Через Φ обозначим множество всех функций $\varphi(\tau, x)$, удовлетворяющих условиям 1)—8), а через $\varphi_p(\tau, x)$, $p\geqslant 2$,— композицию из p функций $\varphi(\tau, x)$, т. е. $\varphi_p(\tau, x) = (\varphi\circ\varphi\circ\ldots\circ\varphi)(\tau, x)$.

Введем множества $Y_{\varphi_p} = \{x\in X_\varphi^0 : \sup\limits_\tau \varphi_p(\tau, x) < \infty\}$, $Y_{\varphi_p}^0 = \{x\in Y_{\varphi_p} : \lim\limits_{\tau\to 0}\varphi_p(\tau, x) = 0\}$. Предположим, что в Y_{φ_p} существует хотя бы один элемент x из X_φ^0 такой, что

$$\lim_{\tau\to 0}\varphi_p(\tau, x) \neq 0,\quad \varphi_p(\tau, x) < \infty. \tag{23}$$

Теорема 12. *Y_{φ_p} и $Y_{\varphi_p}^0$ — $\mathscr{B}$-пространства над тем же числовым полем, что и X, если норму ввести по формуле* $\|x\|_{\varphi_p} = \|x\|_\varphi + \sup\{\varphi_p(\tau, x) : 0 < \tau \leqslant 1\}$, $x\in Y_{\varphi_p}(Y_{\varphi_p}^0)$.

Доказательство теоремы по существу такое же, как и доказательство теоремы 1.

Можно определить другой класс $\mathscr{B}$-пространств, рассмотрев композицию разных элементов $\varphi(\tau, x)$ и $\varphi_1(\tau, x)$ из Φ. Множества

$$Y_{\varphi,\varphi_1} = \{x \in X^0_{\varphi_1} : \sup_\tau (\varphi \circ \varphi_1)(\tau, x) < \infty\}$$

и

$$Y^0_{\varphi,\varphi_1} = \{x \in Y_{\varphi,\varphi_1} : \lim_{\tau\to 0} (\varphi \circ \varphi_1)(\tau, x) = 0\}$$

с нормой

$$\| x \|_{\varphi,\varphi_1} = \| x \|_{\varphi_1} + \sup \{(\varphi \circ \varphi_1)(\tau, x) : 0 < \tau \leqslant 1\}, \tag{24}$$

где $x \in Y_{\varphi,\varphi_1}$ $(Y^0_{\varphi,\varphi_1})$ — $\mathscr{B}$-пространства, при этом предполагается, что выполняется условие, равносильное (23) и Y^0_{φ,φ_1} — бесконечномерное нормированное пространство. Отметим, что в композиции $\varphi \circ \varphi_1$ внутренняя функция $\varphi_1(\tau, x)$ определена на $(0, 1] \times X$, а внешняя $\varphi(\tau, x)$ — на $[0, 1] \times \Phi$. Свойства 5а) и 5б) для композиции $\varphi \circ \varphi_1$ запишутся следующим образом: 5а) $\| x_n - x_0 \|_{\varphi_1} \to 0$ при $n \to \infty$ влечет поточечную сходимость последовательности $\{(\varphi \circ \varphi_1)(\tau, x_n)\}$ к $(\varphi \circ \varphi_1)(\tau, x_0)$ при $n \to \infty$ $\forall \tau \in (0, 1]$ и $x_n, x_0 \in X_{\varphi_1}$; 5б) для любого $\tau_0 \in (0, 1]$ существует постоянная M_{τ_0} такая, что выполняется неравенство $\sup \{(\varphi \circ \varphi_1)(\tau, x) : \tau \in [\tau_0, 1]\} \leqslant M_{\tau_0} \sup \{\varphi_1(\tau, x) : \tau \in (0, 1]\}$, где $x \in X_{\varphi_1}$.

Доказательства следующих утверждений аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для X^0_φ (X_φ).

Лемма 3. *Пусть $x_n, x_0 \in Y_{\varphi,\varphi_1}$ $(Y^0_{\varphi,\varphi_1})$, $n = 1, 2, \ldots$, и при всех n и $\tau_1, \tau_2 \in (0, 1]$, для композиции $(\varphi \circ \varphi_1)(\tau, x_n)$ выполняется неравенство* (4) *и $(\varphi \circ \varphi_1)(\tau, x_0) \neq 0$. Кроме того, пусть*

$$\lim_{n\to\infty} \| x_n - x_0 \|_{\varphi_1} = 0. \tag{25}$$

Тогда для всех n выполняется неравенство

$$\| x_n \|_{\varphi,\varphi_1} \leqslant M \| x_0 \|_{\varphi,\varphi_1},$$

где M — некоторая положительная постоянная, не зависящая от n.

Лемма 4. *Пусть $x_n, x_0 \in Y_{\varphi,\varphi_1}$ $(Y^0_{\varphi,\varphi_1})$ и для всех n выполняется неравенство* (4). *Последовательность $\{x_n\}$ будет сильно (слабо) сходиться к x_0 тогда и только тогда, когда будут выполняться условия:* 1) $\|x_n\|_{\varphi,\varphi_1} \leqslant M$, *где $M > 0$ и не зависит от n;* 2) $\| x_n - x_0 \|_X \to 0$ *при $n \to \infty$.*

Следствие 5. *Пусть выполняются условия леммы 4. Последовательность $\{x_n\} \subset Y^0_{\varphi,\varphi_1}$ будет сходиться к $x_0 \in Y^0_{\varphi,\varphi_1}$ тогда и только тогда, когда будет выполняться одно из следующих условий:* 1) $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x_0 \|_{\varphi_1} = 0$; 2) $\lim_{n\to\infty} \| x_n - x_0 \|_X = 0$; 3) $\lim_{n\to\infty} \langle y^*, x_n \rangle = \langle y^*, x_0 \rangle$ *для любого элемента $y^* \in X^{0*}_{\varphi_1}$.*

Теорема 13. *Пусть $x_n, x_0 \in Y_{\varphi,\varphi_1}$ $(Y^0_{\varphi,\varphi_1})$, $n = 1, 2, \ldots$, и выполняется неравенство* (4) *для композиции $(\varphi \circ \varphi_1)(\tau, x_n)$ при всех n. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась по норме* (24) *к элементу x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* (25).

Теорема 14. *Единичный шар $B^0_\varphi = \{x \in Y^0_{\varphi,\varphi_1} : \| x \|_{\varphi,\varphi_1} \leqslant 1\}$ всюду плотен в единичном шаре $B_\varphi = \{x \in Y_{\varphi,\varphi_1} : \| x \|_{\varphi,\varphi_1} \leqslant 1\}$ в топологии, индуцированной нормой $\| \cdot \|_{\varphi_1}$.*

Теорема 15. *$Y^{0**}_{\varphi,\varphi_1}$ изометрически изоморфно $\mathscr{B}$-пространству Y_{φ,φ_1}.*

Теорема 16. *Пусть для любого $x \in K \subset Y^0_{\varphi,\varphi_1}$ композиция $\varphi_0\, \varphi_1$ удовлетворяет неравенству* (4). *Множество K будет относительно компактным (компактным в себе) тогда и только тогда, когда будет выполняться одно из следующих эквивалентных условий:* 1) *K относительно компактно (компактно в себе) по норме $\| \cdot \|_{\varphi_1}$;* 2) *относительно компактно (компактно в себе) по норме $\| \cdot \|_X$.*

6. Результаты исследования пространств X^0_φ, X_φ, Y^0_{φ,φ_1} и Y_{φ,φ_1} могут быть использованы для изучения конкретных функциональных пространств,

Гельдера [8, 9]. Остановимся кратко на исследовании пространств X_φ^0 (X_φ), конструируемых посредством сильно непрерывной полугруппы (группы) операторов.

По-видимому, модули непрерывности элементов $\mathscr{B}$-пространства были впервые определены в [6] с помощью сильно непрерывных полугрупп (групп) операторов. В [7] с помощью определенных таким образом модулей непрерывности построены пространства Липщица и установлены теоремы вложения.

Пусть X — сепарабельное $\mathscr{B}$-пространство и $\{U_\tau\}$ — сильно непрерывная полугруппа (группа) операторов в X, где $\tau \in [0, +\infty)$. Введем модуль непрерывности элемента $x \in X$ [6]: $\omega_k(\delta, x) = \sup\limits_{\tau \leqslant \delta} \| (U_\tau - E)^k x \|_X$, $k = 1, 2, \ldots$, $\omega_1(\delta, x) = \omega(\delta, x)$, где E — тождественный оператор в X. Пусть $\varphi(\delta) \geqslant 0$ — скалярная функция, обладающая свойствами обычного модуля непрерывности.

Введем множества $X_\varphi = \left\{ x \in X : \sup\limits_\delta \dfrac{\omega(\delta, x)}{\varphi(\delta)} < \infty \right\}$ и $X_\varphi^0 = \left\{ x \in X_\varphi : \lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\omega(\delta, x)}{\varphi(\delta)} = 0 \right\}$. Норму в X_φ (X_φ^0) определим по формуле $\| x \|_\varphi = \| x \|_X + \sup \left\{ \dfrac{\omega(\delta, x)}{\varphi(\delta)} : \delta \in [0, +\infty) \right\}$. В этой норме линейные пространства X_φ^0 и X_φ — $\mathscr{B}$-пространства. Предположим, что существует хотя бы один элемент $x \in X_\varphi$ такой, что имеет место $\varlimsup\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\omega(\delta, x)}{\varphi(\delta)} \neq 0$; $\mathscr{B}$-пространство X_φ^0 бесконечномерно и компактно вложено в X. Очевидно, можно ввести следующее пространство с интегральной характеристикой [4]: $J_\varphi = \left\{ x \in X : \left\| \dfrac{\omega(\cdot, x)}{\varphi(\cdot)} \right\|_E < \infty \right\}$, где $\|\cdot\|_E$ — норма некоторого идеального пространства E [4], сохраняя при этом предположения относительно X и X_φ^0 (X_φ). Имеет место следующая теорема.

Теорема 17. *Пусть x_n, $x_0 \in X_\varphi^0(J_\varphi)$, $n = 1, 2, \ldots$. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ слабо сходилась к x_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:* 1) $\| x_n \|_\varphi \leqslant M$, *где M — некоторая положительная постоянная;* 2) $\langle x^*, x_n \rangle \to \langle x^*, x_0 \rangle$ *при $n \to \infty$ и $x^* \in X_0^*$, где X_0^* — всюду плотное подмножество в X^*.*

Легко показать, что X_φ^0 (J_φ) — сепарабельное $\mathscr{B}$-пространство над тем же числовым полем, что и X.

7. Сделаем общие замечания относительно дальнейших результатов. Пусть X — сепарабельное и секвенциально полное локально выпуклое пространство над полем комплексных или действительных чисел. Тогда пространства X_φ^0 и X_φ будут секвенциально полными локально выпуклыми пространствами и, кроме того, X_φ^0 — сепарабельным. В рассматриваемом случае свойства 5а) и 5б) формулируются так: 5а) $p(x_n - x) \to 0$ при $n \to \infty$ и при любой полунорме p пространства X влечет поточечную сходимость $\{\varphi(\tau, x_n)\}$ в $(0, 1]$, где x_n, $x \in X$, $n = 1, 2, \ldots$; 5б) для любого $\tau_0 \in (0, 1]$ и при любой полунорме p в X существует $M_{\tau_0} > 0$ такое, что

$$\sup \{\varphi(\tau, x) : \tau \in (0, 1]\} \leqslant M_{\tau_0} p(x).$$

Теорема 18. *Для того чтобы множество $K \subset X_\varphi^0$ было относительно слабо компактно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:* 1) $p_\varphi(x) < \infty$ $\forall x \in K$ *и для полунормы p_φ* в X_φ^0, *определенной равенством* $p_\varphi(x) = p(x) + \sup\{\varphi(\tau, x) : \tau \in (0, 1]\}$, *где $p(\cdot)$ — некоторая полунорма в X;* 2) *замыкание $K \subset X_\varphi^0$ в X принадлежит X_φ^0.*

Такую же теорию, как и для пространств $X_\varphi^0(X_\varphi)$, можно построить, отправляясь от индуктивного предела $\mathscr{B}$-пространств (пространств Фреше), и получить те же самые результаты, используя несколько иную терминологию. Можно ввести локально выпуклые пространства векторных и операторных функций посредством аксиоматически определенной функции $\varphi(\tau, x)$.

1. *Никольский С. М.* Ряды Фурье функции с данным модулем непрерывности.— Докл. АН СССР, 1951, 52, № 3, с. 191—194.
2. *Кадец М. И.* О слабой и сильной сходимости.— Докл. АН СССР, 1958, 122, № 1, с. 13—16.
3. *Бабаев А. А.* Об одном обобщении теоремы Племеля — Привалова и его применения.— Уч. зап. Азерб. ун-та. Сер. физ.-мат. наук, 1963, № 4, с. 3—10.
4. *Берколайко М. З., Рутицкий Я. Б.* Об одном классе функциональных B-пространств. — Докл. АН СССР, 1979, 244, № 1, с. 16—19.
5. *Гусейнов А. И., Мухтаров Х. Ш.* Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений.— М. : Наука, 1980.— 416 с.
6. *Купцов Н. П.* Прямые и обратные теоремы теории приближений и полугруппы операторов.— Успехи мат. наук, 1968, 23, № 4, с. 117—178.
7. *Брудный Ю. И., Шалашов В. К.* Липшициевы пространства функций.— В кн.: Метрические вопросы теории функций и отображений.—Донецк: Изд-во Ин-та прикладн. матем. и мех. АН УССР, 1973, с. 3—60.
8. *Яндаров В. О.* О топологических свойствах некоторых классов непрерывных функций.— Сообщ. АН ГрССР, 1976, 83, № 3, с. 537—540.
9. *Яндаров В. О.* О сепарабельных B-пространствах.— Сообщ. АН ГрССР, 1980, 98, № 3, с. 533—536.
10. *Кальдерон А.* Промежуточные пространства и интерполяция, комплексный метод.— Математика, 1965, 9, вып. 3, с. 56—129.
11. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной.— Итоги науки. Современные проблемы математики, 1975, 7, с. 5—162.

Грозненский нефтяной институт

Поступила в редакцию 26.03.81