УДК 517

А. А. Калюжный

Одна теорема о существовании мультипликативной меры

В работах [1]—[3] введены и исследованы гиперкомплексные системы с континуальным базисом и доказано существование мультипликативной меры в случае компактного базиса [2]; в локально компактном случае этот вопрос был открыт [3]. В настоящей работе доказывается существование мультипликативной меры для гиперкомплексных систем с локально компактным базисом. Отметим также работы [4], [5], где проводились близкие рассмотрения. В частности, из результатов [5] следует существование мультипликативной меры для некоторого специального класса гиперкомплексных систем с локально компактным базисом.

Пусть Q — сепарабельное полное локально компактное пространство, $\mathcal{B}(Q)$ — σ-алгебра его борелевских подмножеств, $\mathcal{B}_0(Q)$ — кольцо его борелевских подмножеств, имеющих компактное замыкание. Функцию $\mathcal{B}(Q)\times \times\mathcal{B}(Q)\times Q \ni (A, B, s) \to \gamma(A, B, s) \in [0, \infty]$ будем называть структурной мерой, если 1) при фиксированных $B \in \mathcal{B}_0(Q)$ и $s \in Q$ она является регулярной борелевской мерой относительно A; 2) $\gamma(B, A, s)$ непрерывна и финитна по s при фиксированных $A, B \in \mathcal{B}_0(Q)$; 3) для каждых $A, B, C \in \mathcal{B}_0(Q)$ и $s \in Q$ справедливо соотношение ассоциативности

$$\int \gamma(A, B, r)\, d_r\gamma(E_r, C, s) = \int \gamma(B, C, r)\, d_r\gamma(A, E_r, s)$$

(здесь и далее интегрирование ведется по всему пространству Q); 4) для каждых $A, B \in \mathcal{B}_0(Q)$ и $s \in Q$ справедливо соотношение коммутативности $\gamma(A, B, s) = \gamma(B, A, s)$.

Мультипликативной мерой называется регулярная борелевская мера m, положительная на открытых множествах и такая, что для каждых A, $B \in \mathcal{B}_0(Q)$ выполнено соотношение

$$\int \gamma(A, B, s)\, dm(s) = m(A)\, m(B). \qquad (1)$$

Теорема. *Если структурная мера $\gamma(A, B, s)$ конечна при любых фиксированных B и s, при этом $\gamma(Q, B, s)$ — непрерывная ограниченная функция от s и $\gamma(Q, O, s) > 0$ для каждого открытого $O \in B_0(Q)$ и каждого $s \in Q$, то существует по крайней мере одна мультипликативная мера.*

Доказательство этой теоремы — модификация доказательства теоремы о существовании мультипликативной меры для гиперкомплексных систем с компактным базисом [2]. Поэтому только наметим его, останавливаясь более подробно на преодолении специфических трудностей, возникающих в локально компактном случае.

Рассмотрим пространство $C_b(Q)$ непрерывных вещественных ограниченных функций с равномерной нормой. Определим оператор $T_B (B \in \mathcal{B}_0(Q))$ с помощью равенства $(T_B f)(s) = \int f(r)\, d_r\gamma(E_r, B, s)$, $f \in C_b(Q)$. T_B — линейный непрерывный оператор, переводящий пространство $C_b(Q)$ в себя. Кроме того, если функция $f(s)$ принадлежит внутренности конуса неотрицательных функций в $C_b(Q)$, то $(T_O f)(s) > 0$ для каждого открытого множества $O \in \mathcal{B}_0(Q)$. Далее, операторы T_B $(B \in \mathcal{B}_0(Q))$ коммутируют.

Через $M(Q)$ обозначим пространство, сопряженное к $C_b(Q)$, пусть $M^+(Q)$ — конус, двойственный к конусу $C_b^+(Q)$ неотрицательных функций из $C_b(Q)$. Известно, что $M(Q)$ изометрически изоморфно пространству регулярных ограниченных конечно аддитивных мер на алгебре, порожденной замкнутыми множествами, при этом этот изоморфизм сохраняет отношение порядка (см., например, [6]).

Пусть $f^*(s)$ — внутренняя точка конуса неотрицательных функций в пространстве $C_b(Q)$. Тогда в силу леммы 1.2 работы [7] $\mu(f^*) \geqslant \rho \|\mu\|$ для всех $\mu \in M^+(Q)$, где $\rho > 0$ — радиус сферы $S(f^*, \rho)$, входящей в $C_b^+(Q)$. Обозначим через H' множество мер $\mu \in M^+(Q)$, удовлетворяющих равенству $\mu(f^*) = \rho$. Легко видеть, что H' компактно в слабой топологии и выпукло. Обозначим через H подмножество H', состоящее из σ-аддитивных мер. В силу теорем 1 и 3 § 20 работы [8] множество H слабо замкнуто и, следовательно, компактно в слабой топологии. Очевидно, что H выпукло и непусто.

Для каждого открытого множества $O \in \mathcal{B}_0(Q)$ введем оператор $A_O\mu$ с помощью следующей формулы: $A_O\mu = T_O^*\mu / \mu(T_O f^*)$ $(\mu \in H)$. Нетрудно видеть, что оператор A_O переводит H в H. Покажем, что A_O непрерывен в слабой топологии в каждой точке H. Из непрерывности $\mu(f)$ $(f \in C_b(Q))$ в слабой топологии и компактности H следует, что функция $\mu \to \mu(T_O f^*)$ принимает на H наименьшее значение. Пусть $\tilde{\mu} \in H$ — точка, в которой реализуется $\inf_{\mu \in H} \mu(T_O f^*)$. Тогда

$$\mu(T_O f^*) \geqslant \tilde{\mu}(T_O f^*) \geqslant \inf_{r \in Q} f^*(r)\, \tilde{\mu}(\gamma(Q, O, s)) = c_O > 0,$$

так как $\gamma(Q, O, s) > 0$ для всех $s \in Q$, а мера $\tilde{\mu}$ ненулевая. Тогда непрерывность оператора A_O в слабой топологии вытекает из непрерывности $T_O^*\mu$ и $\mu(T_O f^*)$.

По теореме Маркова—Какутани получим, что семейство операторов A_O обладает общей неподвижной точкой $l \in H$. Отсюда следует, что найдется $dl(s)$ — неотрицательная, конечная, регулярная σ-аддитивная мера на σ-алгебре борелевских множеств, одна и та же для всех открытых $O \in \mathcal{B}_0(Q)$, такая, что

$$\int (T_O f)(s)\, dl(s) = \lambda_O \int f(s)\, dl(s). \qquad (2)$$

Полагая здесь $f(s) \equiv 1$, получаем, что $\lambda_O = \int \gamma(Q, O, s)\, dl(s) / l(Q)$.

С помощью (2) можно показать, что функция множеств m, определяемая равенством $m(A) = \int \gamma(Q, A, s)\, dl(s)/l(Q)$ $(A \in \mathcal{B}_0(Q))$ и есть искомая мультипликативная мера. Доказательство в основном базируется на лемме, следующей из аналога леммы 1 работы [2].

Лемма. *Для каждого $B \in \mathcal{B}_0(Q)$ можно выбрать последовательность открытых множеств $O_n \supseteq B$ такую, что для каждого $s \in Q$ $\gamma(Q, O_n, s)$ сходится к $\gamma(Q, B, s)$.*

З а м е ч а н и я. 1. Любые две мультипликативные меры абсолютно непрерывны относительно друг друга. Это следует из (1) и положительности мультипликативной меры на открытых множествах. Тем самым мультипликативная мера единственна с точностью до эквивалентности.

2. Условия, налагаемые на рост структурной меры, не особенно ограничительны. Во всяком случае, они выполняются для всех нормальных гиперкомплексных систем.

1. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Континуальные алгебры.— Докл. АН СССР, 1950, **72**, № 1, с. 5—8.
2. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Гиперкомплексные системы с компактным базисом. —Укр. мат. журн., 1951, **3** № 2, с. 184—204.
3. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Гиперкомплексные системы с континуальным базисом.— Успехи мат. наук, 1957, **12**, № 1, с. 147—152.
4. *Ionescu Tulcea C., Simon A. B.* Spectral represantations and unbounded convolution operators.— Proc. Nat. Acad. Sci., 1959, **45**, N 12, p. 1765—1767.
5. *Spector R.* Measures invariantes sur les hypergroupes.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, **239**, p. 147—165.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория.— М.: Изд-во иностр. лит., 1962.— 895 с.
7. *Крейн М. Г., Рутман М. А.* Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха.— Успехи мат. наук, 1948, **3**, № 1, с. 3—95.
8. *Александров А. Д.* Additive set functions in abstract spaces. III.— Мат. сб., 1943, **13**, с. 169—238.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 09.11 81
после переработки — 16.04.82